Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Золотарёв, Об одном классе коммутативных систем линейных операторов, *Функц. анализ и его прил.*, 2012, том 46, выпуск 4, 86–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:33:14

УДК 517.948

Об одном классе коммутативных систем линейных операторов

© 2012. В. А. ЗОЛОТАРЕВ

Введение. Напомним ([1]–[3]), что линейный оператор A , действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H , называется вполне несамосопряженным, если не существует нетривиального приводящего подпространства, на котором он индуцирует самосопряженный оператор. Известная теорема М. С. Лившица ([1]–[3]) утверждает следующее.

Теорема 1. Пусть A — линейный ограниченный вполне несамосопряженный оператор A , обладающий следующими свойствами: 1) $A_I \geq 0$ ($2iA_I = A - A^*$); 2) спектр оператора A сосредоточен в нуле; 3) $\text{rank } A_I = 1$. Тогда этот оператор унитарно эквивалентен оператору интегрирования

$$(\tilde{A}f)(x) = i \int_x^l f(t) dt, \quad (1)$$

который действует в $L^2_{(0,l)}$ ($0 < l < \infty$), причем l есть собственное число оператора $2A_I$.

Естественной является постановка следующей задачи (М. С. Лившиц). Обозначим через Ω компакт в $\mathbb{R}^2_+$, и пусть $a = \sup\{x : (x, y) \in \Omega\}$, $b = \sup\{y : (x, y) \in \Omega\}$. Зададим в пространстве L^2_Ω систему линейных ограниченных операторов

$$(\tilde{A}_1 f)(x, y) = \chi_\Omega(x, y) i \int_x^a f(t, y) dt, \quad (\tilde{A}_2 f)(x, y) = \chi_\Omega(x, y) i \int_y^b f(x, s) ds, \quad (2)$$

считая, что $f(x, y)$ продолжена нулем вне области Ω , где $\chi_\Omega(x, y)$ — характеристическая функция множества Ω .

В данной работе мы ограничимся случаем, когда Ω есть область одного из следующих типов: (а) Ω есть прямоугольник $[0, a] \times [0, b]$; (б) область Ω ограничена прямыми $x = a$, $y = b$ и кривой

$$L = \{(x, p(x)) : p(x) \in C^1_{[0,a]}, p(0) = b, p(a) = 0\}, \quad (3)$$

задаваемой гладкой монотонно убывающей функцией $p(x)$ на $[0, a]$ ($0 < a, b < \infty$). В обоих этих случаях операторы $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ превращаются в операторы частного интегрирования (по x и y соответственно). Описанную в п. (б) область обозначим через Ω_L .

Сформулируем теперь упомянутую задачу Лифшица.

Задача. Описать класс систем линейных операторов $\{A_1, A_2\}$, заданных в гильбертовом пространстве H , которые унитарно эквивалентны описанной выше системе $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ в L^2_Ω .

Первый результат в этом направлении был получен в работе [4]. Чтобы его сформулировать, определим подпространства

$$H_k = \overline{(A_k)_I H} \quad (2i(A_k)_I = A_k - A_k^*, \quad k = 1, 2) \quad (4)$$

в H , и пусть $C = [A_2, A_1^*]$, $D = [A_2, A_1]$ — коммутаторы.

Теорема 2. Пусть в гильбертовом пространстве H задана система линейных ограниченных операторов $\{A_1, A_2\}$, такая, что каждый из операторов A_k ($k = 1, 2$) вполне несамосопряжен, причем: 1) A_k диссипативны; 2) $\dim H_0 = 1$, где $H_0 = H_1 \cap H_2$; 3) спектр каждого оператора A_k сосредоточен в нуле; 4) $C = D = 0$. Тогда эта система операторов унитарно эквивалентна системе $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ в L_Ω^2 , где $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ — прямоугольник, причем $a = 2\langle (A_1)_I h_0, h_0 \rangle$, $b = 2\langle (A_2)_I h_0, h_0 \rangle$ ($h_0 \in H_0$, $\|h_0\| = 1$).

Обобщение этого результата на случай систем операторов $\{A_1, A_2\}$, для которых выполняются предположения 1)–3) теоремы 2 и $D = 0$, а коммутатор C нильпотентен, $C^n = 0$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), было получено в [5]. При этом оказалось, что компакт $\Omega \subset \mathbb{R}_+^2$ является множеством, ограниченным прямыми $x = a$, $y = b$ ($0 < a, b < \infty$) и ломаной L_n , линейные участки которой параллельны осям координат, а число звеньев равно $2n$. Случай нильпотентности обоих коммутаторов C и D рассмотрен в работе [6]. Из работ [5] и [6] следует, что алгебраические свойства системы $\{A_1, A_2\}$ (нильпотентность C и D) определяют геометрическую конфигурацию компакта Ω .

Данная работа посвящена решению упомянутой задачи для $\Omega = \Omega_L$.

2. Свойства системы операторов $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ в $L_{\Omega_L}^2$. Зададим гладкие неотрицательные монотонно возрастающие функции

$$\lambda(y) = a - q(y), \quad \mu(x) = b - p(x) \quad (5)$$

($q(y)$ — функция, обратная к $p(x)$). Рассмотрим подпространства

$$L_k = \overline{(\tilde{A}_k)_I L_{\Omega_L}^2} \quad (k = 1, 2). \quad (6)$$

Функции, входящие в пространство L_1 , зависят от переменной y и, таким образом, отождествляются с функциями, определенными на $[0, b]$. Легко видеть, что это отождествление дает унитарный изоморфизм между пространствами L_1 и $L_{(0,b)}^2(\lambda(y)dy)$. Аналогично возникает изоморфизм между L_2 и $L_{(0,a)}^2(\mu(x)dx)$. При этом операторы $2(\tilde{A}_1)_I|_{L_1}$ и $2(\tilde{A}_2)_I|_{L_2}$ унитарно эквивалентны операторам умножения на функции $\lambda(y)$ и $\mu(x)$ соответственно.

Нетрудно доказать, что оператор $\tilde{C} = [\tilde{A}_2, \tilde{A}_1^*]$, где $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ имеют вид (2) и действуют в $L_{\Omega_L}^2$, принадлежит классу Гильберта–Шмидта, а его спектр сосредоточен в нуле, $\sigma(\tilde{C}) = \{0\}$, причем $\overline{\tilde{C}L_{\Omega_L}^2} = L_1$; $\overline{\tilde{C}^*L_{\Omega_L}^2} = L_2$.

Легко установить, используя работы [1]–[3], что характеристическая функция $S(z)$ оператора A_1 , заданная равенством $S(z) = I_{L_1} - P_{L_1}(\tilde{A}_1 - \lambda I)^{-1}P_{L_1}^*\sigma_1$, $\sigma_1 = 2(\tilde{A}_1)_I|_{L_1}$, P_{L_1} — ортопроектор в $L_{\Omega_L}^2$ на L_1 , является скалярным оператором $S(z) = \exp\{i\lambda(y)/z\}I_{L_1}$.

3. Самосопряженные операторы с простым спектром. Как известно [7], ограниченный неотрицательный самосопряженный оператор с простым спектром унитарно эквивалентен оператору умножения на независимую переменную λ в пространстве $L_{(0,a)}^2(d\sigma(\lambda))$.

Определение. Пусть мера $d\sigma(\lambda)$ абсолютно непрерывна, $d\sigma(\lambda) = m(\lambda) d\lambda$. Будем говорить, что она обладает AC_0 -свойством, если

$$\int_0^\lambda \frac{d\sigma(t)}{t} < \infty \quad (\lambda \in [0, a]). \quad (7)$$

Определим положительную монотонно возрастающую функцию $y(\lambda)$,

$$y(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\sigma(t)}{t} \quad (\lambda \in [0, a]), \quad (8)$$

и обозначим через $\lambda(y)$ обратную к ней функцию. В дальнейшем это соглашение об обозначении обратной функции применяется без дополнительных пояснений.

Функцию $\sigma(\lambda) = \langle E_\lambda h_0, h_0 \rangle$, где $\|h_0\| = 1$, а E_λ — разложение единицы ограниченного самосопряженного оператора B с простым спектром, действующего в гильбертовом пространстве H , будем в дальнейшем называть спектральной мерой оператора B относительно вектора $h_0 \in H$. Нетрудно показать, что если B — ограниченный самосопряженный оператор с простым спектром, заданный в гильбертовом пространстве H , и $\sigma(B) = [0, a]$, а его спектральная мера $\sigma(\lambda)$ (относительно порождающего [7] вектора $h_0 \in H$) абсолютно непрерывна и обладает AC_0 -свойством, то B унитарно эквивалентен оператору умножения на $\lambda(y)$ в пространстве $L^2_{(0,b)}(\lambda(y)dy)$.

Используя этот факт и вид характеристической функции оператора A_1 (см. п. 2) можно доказать теорему, которая обобщает теорему 1.

Теорема 3. Пусть A — ограниченный диссипативный вполне несамосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H и $\sigma(A) = \{0\}$, причем:

1) оператор $2A_I$, суженный на $H_1 = \overline{A_I H}$, имеет простой спектр, $\sigma(2A_I) = [0, a]$ ($0 < a < \infty$), а его спектральная мера $\sigma(\lambda)$ относительно порождающего вектора $h_0 \in H_1$ абсолютно непрерывна и обладает AC_0 -свойством;

2) при всех $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq 0$) имеет место равенство $[A_I, P_{H_1}(A - zI)^{-1}P_{H_1}] = 0$ (P_{H_1} — ортопроектор на H_1).

Тогда оператор A унитарно эквивалентен оператору интегрирования $\tilde{A}_1$ в пространстве $L^2_{0,L}$; при этом кривую L вида (3) задает функция $q(y) = a - \lambda(y)$.

4. Системы операторов класса K_∞ . Рассмотрим две абсолютно непрерывные меры

$$d\sigma(\lambda) = m(\lambda) d\lambda, \quad d\omega(\mu) = n(\mu) d\mu, \quad (9)$$

заданные на конечных интервалах $\lambda \in [0, a]$, $\mu \in [0, b]$, где $m(\lambda) \geq 0$ и $n(\mu) \geq 0$. Пусть меры $d\sigma(\lambda)$ и $d\omega(\mu)$ обладают AC_0 -свойством. Такие меры будем называть согласованными, если

$$n(\mu)m(\lambda(b - \mu)) = \mu\lambda(b - \mu) \quad (\mu \in [0, b]). \quad (10)$$

Это условие вытекает из того, что в выражениях (5) для $\lambda(y)$, $\mu(x)$ функции $q(y)$ и $p(x)$ взаимно обратны.

Определение. Систему линейных ограниченных операторов $\{A_1, A_2\}$, заданную в гильбертовом пространстве H , будем относить к классу K_∞ , если

1) $D = [A_2, A_1] = 0$;

2) $\overline{C}H = H_1$, $\overline{C}^*H = H_2$, где $C = [A_2, A_1^*]$, а H_k имеют вид (3) ($k = 1, 2$);

3) оператор $C = [A_2, A_1^*]$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта, а его спектр сосредоточен в нуле.

Из предыдущих рассуждений следует, что система операторов $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ вида (2), заданная в $L^2_{\Omega_L}$, принадлежит классу K_∞ .

Аналогично формулам (8) сопоставим абсолютно непрерывной мере $d\omega(\mu)$, обладающей AC_0 -свойством, положительную монотонно возрастающую функцию

$$x(\mu) = \int_0^\mu \frac{d\omega(s)}{s} \quad (\mu \in [0, b]). \quad (11)$$

Нетрудно показать, что для системы операторов $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$, заданной в гильбертовом пространстве $L^2_{\Omega_L}$, справедливо соотношение

$$(I_{L_1} - E_{\lambda(p(t))}^1) \tilde{C} (I_{L_2} - E_{\mu(t)}^2) = 0 \quad (12)$$

для всех $t \in [0, a]$, где E_λ^1 и E_μ^2 — разложения единицы операторов $2(\tilde{A}_1)|_{L_1}$ и $2(\tilde{A}_2)|_{L_2}$; при этом $\tilde{C} = [\tilde{A}_2, \tilde{A}_1^*]$; легко видеть, что

$$(\tilde{C}f)(x, y) = \int_y^b ds \int_{q(s)}^{q(y)} dt f(t, s)$$

Основной результат работы, который дает решение задачи п. 1 в случае области Ω_L , состоит в следующем.

Теорема 4. *Предположим, что система операторов $\{A_1, A_2\}$ принадлежит классу K_∞ , причем каждый из операторов вполне несамосопряжен, диссипативен, $\sigma(A_k) = \{0\}$ ($k = 1, 2$) и, кроме того:*

- 1) $\dim H_0 = 1$, где $H_0 = H_1 \cap H_2$, а H_k имеют вид (3) ($k = 1, 2$);
- 2) сужения $P_{H_k} 2(A_k)|_{H_2}$ являются операторами с абсолютно непрерывным простым спектром и $\sigma(P_{H_1} 2(A_1)|_{H_1}) = [0, a]$, $\sigma(P_{H_2} 2(A_2)|_{H_2}) = [0, b]$;
- 3) спектральные меры $\sigma(\lambda)$ и $\omega(\mu)$ относительно вектора $h_0 \in H_0$, отвечающие $P_{H_1} 2(A_1)|_{H_1}$ и $P_{H_2} 2(A_2)|_{H_2}$, абсолютно непрерывны и обладают AC_0 -свойством; при этом имеет место (10), где $\lambda(y)$ — функция, обратная к $y(\lambda)$ из (8);
- 4) для всех $t \in [0, a]$ выполнено условие

$$(I_{H_1} - E_{\lambda(y(t))}^1) C (I - E_{\mu(t)}^2) = 0,$$

где E_λ^1 и E_μ^2 — разложения единицы $2(A_1)|_{H_1}$ и $2(A_2)|_{H_2}$, а функции $\mu(x)$ и $\lambda(y)$ являются обратными к $x(\mu)$, $y(\lambda)$, которые имеют вид (11), (8) соответственно, и $C = [A_2, A_1^*]$;

- 5) для каждого из операторов A_1, A_2 выполнено условие 2) из теоремы 3.
- Тогда существует такая кривая L вида (3), что система $\{A_1, A_2\}$ унитарно эквивалентна интегрированию $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$ в $L^2_{\Omega_L}$.

Изложим вкратце основные идеи, положенные в основу доказательства теоремы 4. Сначала, используя предположения 1)–3), 5) этой теоремы, доказывается, что существует гильбертово пространство $L^2_{\Omega_L}$ и такой унитарный оператор U , отображающий $H_1 + H_2$ на $L_1 + L_2$ (H_k и L_k имеют соответственно вид (3) и (6),

$k = 1, 2$), который осуществляет унитарную эквивалентность между операторами $P_{H_1+H_2}2(A_k)_I|_{H_1+H_2}$ и $P_{L_1+L_2}2(\tilde{A}_k)_I|_{L_1+L_2}$ ($k = 1, 2$). Доказательство этого утверждения основано на теореме 3. Следующий этап доказательства теоремы 4 состоит в продолжении оператора U с подпространства $H_1 + H_2$ на все H так, чтобы он унитарным образом отображал H на $L_{\Omega_L}^2$ и имела бы место унитарная эквивалентность систем операторов $\{A_1, A_2\}$ и $\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$. Устанавливается, что при выполнении предположений 1)–5) теоремы построенный оператор U (заданный на $H_1 + H_2$) осуществляет унитарную эквивалентность коммутаторов $C = [A_2, A_1^*]$ и $\tilde{C} = [\tilde{A}_2, \tilde{A}_1^*]$. Нетрудно показать, что из полной несамосопряженности операторов A_1 и A_2 следует, что подпространства H_k (см. (3)) ($k = 1, 2$) имеют вид

$$H_1 = \text{span}\{A_2^n h_0 : n \in \mathbb{Z}_+, h_0 \in H_0\}, \quad H_2 = \text{span}\{A_1^n h_0 : n \in \mathbb{Z}_+, h_0 \in H_0\}.$$

Используя данную структуру этих подпространств и то, что $UC = \tilde{C}U$, можно доказать, что сужения $A_1|_{H_2}$ и $A_2|_{H_1}$ под действием унитарного оператора $U: H_1 + H_2 \rightarrow L_1 + L_2$ переходят в сужения операторов интегрирований $\tilde{A}_1|_{L_2}$ и $\tilde{A}_2|_{L_1}$ соответственно.

Далее нетрудно установить, что

$$H = \text{span}\{A_1^n A_2^m h_0 : n, m \in \mathbb{Z}_+, h_0 \in H_0\}. \quad (13)$$

Поэтому естественно продолжить оператор U на все пространство H при помощи формулы

$$UA_1^n A_2^m h_0 = \tilde{A}_1^n \tilde{A}_2^m f_0 \quad (n, m \in \mathbb{Z}_+), \quad (14)$$

где $h_0 \in H_0$, а $f_0 \in L_0$ ($L_0 = L_1 \cap L_2$). Необходимо показать, что таким образом продолженный оператор является унитарным отображением пространства H на $L_{\Omega_L}^2$. Последнее следует из унитарности оператора U на $H_1 + H_2$ и того, что $UC = \tilde{C}U$. Теперь искомая унитарная эквивалентность $UA_k = \tilde{A}_k U$ ($k = 1, 2$) следует из определения оператора U и равенства (13), а также из того, что замыкание линейной оболочки векторов $\tilde{A}_1^n \tilde{A}_2^m f_0$ ($n, m \in \mathbb{Z}_+, f_0 \in L_0$) дает все $L_{\Omega_L}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. С. Лившиц, Матем. сб., **61** (1946), 236–260. [2] М. С. Лившиц, А. А. Янцевич, *Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах*, Изд. Харьк. ун-та, Харьков, 1971. [3] В. А. Золотарев, *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов*, Изд. Харьк. ун-та, Харьков, 2003. [4] В. А. Золотарев, ДАН Арм. ССР, **63** (1976), 136–140. [5] В. А. Золотарев, Вестник Харьк. ун-та, **43** (1978), 69–76. [6] В. А. Золотарев, Вестник Харьк. ун-та, **31** (1979), 56–58. [7] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. т. 1*, Изд. ХГУ, Харьков, 1977.

Физико-технический институт низких температур
НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию
28 декабря 2010 г.

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
e-mail: vazolotarev@gmail.com