Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Лебедев, О преобразовании Фурье характеристических функций областей с C^1 -гладкой границей, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 33–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3093>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:42:55

О преобразовании Фурье характеристических функций областей с C^1 -гладкой границей

© 2013. В. В. ЛЕБЕДЕВ

Рассматриваются области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей. Исследуется следующий вопрос: для каких областей D преобразование Фурье $\widehat{1_D}$ характеристической функции 1_D принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$?

Введение

Пусть D — ограниченная область (открытое связное множество) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Рассмотрим ее характеристическую функцию 1_D , т. е. функцию, принимающую значение $1_D(t) = 1$ при $t \in D$ и значение $1_D(t) = 0$ при $t \notin D$. Рассмотрим преобразование Фурье $\widehat{1_D}$ этой функции. В настоящей работе мы изучаем следующий вопрос: для каких областей мы имеем $\widehat{1_D} \in L^p(\mathbb{R}^n)$? Интерес представляет лишь случай $1 < p < 2$.

Нам будет удобно иметь дело с пространствами $A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, умеренных распределений f на $\mathbb{R}^n$, таких, что преобразование Фурье $\widehat{f}$ принадлежит $L^p(\mathbb{R}^n)$. Норма в $A_p(\mathbb{R}^n)$ определяется естественным образом:

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Напомним, что (см., например, [1, гл. V, §1]) при $1 \leq p \leq 2$ преобразование Фурье (равно как и его обратное) является ограниченным оператором из $L^p(\mathbb{R}^n)$ в $L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$; поэтому каждое распределение из $A_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$, является функцией из $L^q(\mathbb{R}^n)$.

Прямое вычисление показывает, что если D — куб в $\mathbb{R}^n$, то $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 1$. То же верно в случае, когда D — многогранник (т. е. конечное объединение симплексов). С другой стороны, пользуясь хорошо известной асимптотикой функций Бесселя, можно убедиться, что если $D \subseteq \mathbb{R}^n$ — шар, то $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 2n/(n+1)$ и $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \leq 2n/(n+1)$. Такой же результат имеет место в общем случае для ограниченных областей с дважды гладкой границей. (Это вытекает из теорем 1, 2 настоящей работы, см. следствие 2.) Таким образом, для (ограниченных) областей с C^2 -гладкой границей $2n/(n+1)$ является критическим значением показателя интегрируемости преобразования Фурье характеристической функции.

В настоящей работе мы получим ряд результатов о поведении преобразования Фурье характеристических функций ограниченных областей с C^1 -гладкой границей. Этот случай, вообще говоря, существенно отличается от дважды гладкого, что показывает (см. §3) пример области $D \subseteq \mathbb{R}^2$, граница которой

C^1 -гладкая и вместе с тем $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1$. (Критическое значение для плоских областей с дважды гладкой границей равно $4/3$.)

Отметим, что различные вопросы о поведении на бесконечности (порядке убывания к нулю) преобразования Фурье характеристических функций областей и близкие вопросы о поведении преобразования Фурье (гладких) мер, сосредоточенных на поверхностях, исследовались многими авторами и относятся к классической тематике гармонического анализа, см. обзорную статью Стейна [2], где имеется обширная библиография, а также его книгу [3] (гл. VIII). Основными инструментами для получения асимптотических оценок в этих исследованиях являются метод стационарной фазы и лемма ван дер Корпута. Применение этих методов требует значительной гладкости границы области, как минимум, равной двум уже в плоском случае. Важную роль при таком подходе играет кривизна поверхности (границы области). Наш подход не использует никаких соображений, связанных с кривизной, и позволяет рассматривать области с C^1 -гладкой границей.

Мы обозначаем границу области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ через ∂D . Говоря, что граница области D является C^1 -гладкой или C^2 -гладкой, мы имеем ввиду, что в окрестности каждой своей точки граница ∂D является графиком некоторой (вещественной) функции класса C^1 или C^2 соответственно (т.е. функции, у которой все частные производные первого или второго порядка соответственно непрерывны).

Для всякой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей пусть $\nu_D(x)$ — единичная внешняя нормаль к ∂D в точке $x \in \partial D$. Возникающее таким образом отображение $\nu_D: \partial D \rightarrow S^{n-1}$ границы области D в единичную сферу S^{n-1} с центром в начале координат мы называем нормальным отображением. Через $\omega(\nu_D, \delta)$ обозначим модуль непрерывности отображения ν_D :

$$\omega(\nu_D, \delta) = \sup_{x, y \in \partial D; |x-y| \leq \delta} |\nu_D(x) - \nu_D(y)|, \quad \delta \geq 0,$$

где $|u|$ — длина вектора $u \in \mathbb{R}^n$. Пусть далее $\omega(\delta)$ — произвольная неубывающая непрерывная функция на $[0, \infty)$, такая, что $\omega(0) = 0$. В случае, когда $\omega(\nu_D, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow +0$, мы говорим, что граница ∂D является $C^{1, \omega}$ -гладкой. Для ограниченных областей это условие эквивалентно тому, что в окрестности каждой своей точки граница области D является графиком некоторой функции класса $C^{1, \omega}$. Другими словами — для каждой точки $x \in \partial D$ можно найти окрестность B , содержащую x , и область $V \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, такую, что $B \cap \partial D$ является графиком некоторой (вещественной) функции $\varphi \in C^{1, \omega}(V)$, т.е. функции с условием $\omega(V, \nabla \varphi, \delta) = O(\omega(\delta))$, $\delta \rightarrow +0$, где

$$\omega(V, \nabla \varphi, \delta) = \sup_{x, y \in V; |x-y| \leq \delta} |\nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(y)|, \quad \delta \geq 0,$$

— модуль непрерывности градиента $\nabla \varphi$ функции φ .

Если граница ∂D области D является C^1 -гладкой, C^2 -гладкой или $C^{1, \omega}$ -гладкой, то мы соответственно пишем $\partial D \in C^1$, $\partial D \in C^2$, $\partial D \in C^{1, \omega}$.

Если $\omega(\delta) = \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, то мы пишем просто $C^{1, \alpha}$ вместо C^{1, δ^α} .

В §1 мы даем простое доказательство включения $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$, верного при $p > 2n/(n+1)$ для всех ограниченных областей $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей (теорема 1). Для выпуклых областей (без предположения гладкости границы) такое утверждение было ранее получено Герцем [4].

В §2 получен основной результат настоящей работы. А именно, мы показываем (теорема 2), что если $\partial D \in C^{1,\omega}$ и

$$\int_0^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{\omega(\delta)^{n-p}} d\delta = \infty,$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$. В частности (следствие 1), если $\partial D \in C^{1,\alpha}$, то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ при

$$p \leq 1 + \frac{(n-1)\alpha}{n+\alpha}.$$

В свою очередь отсюда, полагая $\alpha = 1$ и учитывая предыдущий результат, получаем указанное в начале введения утверждение о критическом показателе для областей с дважды гладкой границей (следствие 2).

В §3 мы рассматриваем плоские области. В соответствии с указанным выше результатом, если для области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ мы имеем $\partial D \in C^{1,\omega}$ и

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta = \infty,$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^2)$. В частности, если $\partial D \in C^{1,\alpha}$, то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^2)$ при $p \leq 1 + \alpha/(2+\alpha)$. Мы показываем (теорема 3), что этот результат является точным в том смысле, что для каждого класса $C^{1,\omega}$ (при некотором простом условии, наложенном на ω) существует ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^2$, такая, что $\partial D \in C^{1,\omega}$ и $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1$, для которых

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta < \infty.$$

В частности (следствие 3), если $0 < \alpha < 1$, то существует плоская область D с $C^{1,\alpha}$ -гладкой границей, такая, что $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1 + \alpha/(2+\alpha)$. Кроме того, отсюда вытекает, что (следствие 4) существует плоская область D с C^1 -гладкой границей, такая, что $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1$ (достаточно взять ω убывающей к нулю медленнее любой степени, т.е. так, что $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta)/\delta^\varepsilon = \infty$ при всех $\varepsilon > 0$).

Результаты настоящей работы существенным образом опираются на результаты, полученные автором в [5], [6], где для вещественных C^1 -гладких функций φ исследовался рост норм экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в пространствах A_p . Вопрос о росте норм экспонент естественным образом возникает в связи с известной теоремой Берлинга–Хелсона (см. историю вопроса в [5]). Простые соображения (лемма 1 настоящей работы) позволяют свести изучение характеристических функций к изучению поведения экспонент.

Через $|E|$ мы обозначаем лебегову меру (измеримого) множества $E \subseteq \mathbb{R}^n$ и через $|E|_{S^{n-1}}$ сферическую меру множества $E \subseteq S^{n-1}$. Через (x, y) обозначается скалярное произведение векторов x и y в $\mathbb{R}^n$. Если $E \subseteq \mathbb{R}^n$ и $t \in \mathbb{R}^n$, то полагаем $E + t = \{x + t : x \in E\}$. Через $c, c_p, c_{p,n}$ обозначаются различные положительные константы.

Результаты настоящей работы были частично представлены на 11-й и 14-й летних Санкт-Петербургских конференциях по математическому анализу ([7], [8]) и полностью — на III международной конференции «Гармонический анализ и приближения», Цахкадзор (Армения) [9].

Автор благодарит Е. А. Горина, который прочитал введение и сделал ряд полезных замечаний.

§1. Общий случай. Области с C^1 -гладкой границей

Теорема 1. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такая, что $\partial D \in C^1$. Тогда $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 2n/(n+1)$.

Доказательство. При $s > 0$ рассмотрим пространства Соболева $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ функций $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$\|f\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s} + 1) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty.$$

Легко убедиться, что

$$W_2^s(\mathbb{R}^n) \subseteq A_p(\mathbb{R}^n)$$

при $2n/(n+2s) < p < 2$. В самом деле, положим $p^* = 2/p$, $1/p^* + 1/q^* = 1$. Мы имеем $spq^* > n$ и, пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_{A_p(\mathbb{R}^n)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|^p d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{f}(\xi)| (|\xi|^s + 1))^p \frac{1}{(|\xi|^s + 1)^p} d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\widehat{f}(\xi)| (|\xi|^s + 1))^{pp^*} d\xi \right)^{1/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(|\xi|^s + 1)^{pq^*}} d\xi \right)^{1/q^*} \\ &\leq c_{p,s} \|f\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}^p. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы остается воспользоваться тем, что для любой ограниченной области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ с C^1 -гладкой границей мы имеем $1_D \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$ при всех $s < 1/2$. Последний факт является тривиальным следствием теоремы о (поточечных) мультипликаторах в пространствах Соболева [10, §5].

Мы приведем независимое простое и короткое доказательство включения $1_D \in W_2^s$, $s < 1/2$. Хорошо известно, что при $0 < s < 1$ норма $\|\cdot\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}$ и норма

$$\|f\| = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|t|^{n+2s}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t) - f(x)|^2 dx \right) dt \right)^{1/2} \quad (1)$$

эквивалентны (см., например, [11, гл. V, §3.5]). Заметим теперь, что при любом $t \in \mathbb{R}^n$ симметрическая разность

$$((D-t) \setminus D) \cup (D \setminus (D-t))$$

множеств $D-t$ и D содержится в (замкнутой) $|t|$ -окрестности границы ∂D области D и поэтому имеет (лебегову) меру, не превосходящую $c|t|$. Ясно также, что эта симметрическая разность имеет меру, не превосходящую $2|D|$. Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |1_D(x+t) - 1_D(x)|^2 dx \leq \min(c|t|, 2|D|), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

и остается воспользоваться эквивалентностью нормы $\|\cdot\|_{W_2^s(\mathbb{R}^n)}$ и нормы (1). Теорема доказана¹⁾.

¹⁾Отметим, что [12, следствие 2.2] если $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, — множество положительной меры, то $1_E \notin W_2^{1/2}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 1. Метод доказательства теоремы 1 позволяет рассматривать произвольные множества (не обязательно области). Напомним [13], что верхняя размерность Минковского $\overline{\dim}_M F$ произвольного ограниченного множества $F \subseteq \mathbb{R}^n$ определяется следующим образом:

$$\overline{\dim}_M F = \inf\{0 \leq \gamma \leq n : |(F)_\delta| = O(\delta^{n-\gamma}), \delta \rightarrow +0\},$$

где $(F)_\delta$ есть δ -окрестность множества F . Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, — ограниченное множество положительной меры. Пусть a — верхняя размерность Минковского его границы ∂E . Предположим, что $a < n$. Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, использованные выше, видим, что тогда $1_E \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$ при всех $s < (n - a)/2$. Отсюда, в свою очередь, получаем $1_E \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при всех $p > 2n/(2n - a)$. Отметим, что при $s < (n - a)/2$ использование нормы (1) правомерно, поскольку $a \geq n - 1$. В самом деле, убедимся, что если множество $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ограничено и имеет положительную меру, то $\overline{\dim}_M \partial E \geq n - 1$. Считая, что $E \setminus \partial E \neq \emptyset$ (иначе доказывать нечего), фиксируем точку $x_0 \in E \setminus \partial E$. Существует открытый шар B с центром в x_0 , который не содержит точек границы ∂E и, более того, находится на положительном расстоянии от ∂E . Обозначим через S граничную сферу шара B . Определим отображение $\theta: \mathbb{R}^n \setminus B \rightarrow S$ следующим образом. Возьмем точку $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$ и проведем через нее луч с началом в x_0 . Обозначим через $\theta(x)$ точку пересечения этого луча со сферой S . Ясно, что отображение θ липшицево (более того, оно нестягивающее, т.е. $|\theta(x_1) - \theta(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ при всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \setminus B$). Легко увидеть, что образом границы множества E при отображении θ является вся сфера S . Вместе с тем, как известно [13, гл. 7], при липшицевых отображениях размерность множества не может увеличиться. Таким образом,

$$n - 1 = \overline{\dim}_M S = \overline{\dim}_M \theta(\partial E) \leq \overline{\dim}_M \partial E.$$

§2. Области с $C^{1,\omega}$ -гладкой границей

Теорема 2. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такая, что $\partial D \in C^{1,\omega}$. Если

$$\int_0^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}} d\delta = \infty,$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$.

Из теоремы 2 немедленно получаем

Следствие 1. Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такая, что $\partial D \in C^{1,\alpha}$. Если

$$p \leq 1 + \frac{(n-1)\alpha}{n+\alpha},$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$.

Отметим случай областей с дважды гладкой границей и даже более общий $C^{1,1}$ -случай, а именно, пользуясь следствием 1 и теоремой 1, получаем

Следствие 2. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такая, что $\partial D \in C^{1,1}$. Тогда $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 2n/(n+1)$ и $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \leq 2n/(n+1)$. В частности, это так для ограниченных областей с дважды гладкой границей.

Прежде чем доказывать теорему, изложим некоторые предварительные сведения и докажем одну лемму.

Напомним (см., например, [11, гл. IV, §3.1]), что функция $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ называется L^p -мультипликатором Фурье ($1 \leq p \leq \infty$), если оператор Q , заданный соотношением

$$\widehat{Qf} = m\widehat{f}, \quad f \in L^p \cap L^2(\mathbb{R}^n),$$

является ограниченным оператором в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Пространство $M_p(\mathbb{R}^n)$ всех таких мультипликаторов, снабженное нормой

$$\|m\|_{M_p(\mathbb{R}^n)} = \|Q\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)},$$

является банаховой алгеброй (относительно обычного умножения функций). Хорошо известно, что характеристическая функция произвольного параллелепипеда является мультипликатором при всех p , $1 < p < \infty$ (см., например, [11, гл. IV, §4.1], а также [14, гл. I, §1.3]).

Заметим, что в интересующем нас случае $1 < p < 2$ каждый L^p -мультипликатор Фурье является поточечным мультипликатором в A_p , т. е. если $m \in M_p(\mathbb{R}^n)$, то для любой функции $f \in A_p(\mathbb{R}^n)$ имеем $mf \in A_p(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\|mf\|_{A_p} \leq \|m\|_{M_p} \|f\|_{A_p}. \quad (2)$$

В этом легко убедиться следующим образом. Оценка (2) верна для любой функции $f \in A_p \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ (это очевидно, поскольку преобразование Фурье и его обратное отличаются лишь знаком переменной и нормирующим множителем). Ясно, что множество $A_p \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $A_p(\mathbb{R}^n)$. Пусть $f \in A_p(\mathbb{R}^n)$ — произвольная функция. Пусть $f_k \in A_p \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2, \dots$, — последовательность функций, сходящаяся к f в $A_p(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$\|mf_j - mf_k\|_{A_p} = \|m \cdot (f_j - f_k)\|_{A_p} \leq \|m\|_{M_p} \|f_j - f_k\|_{A_p} \rightarrow 0.$$

Очевидно, что пространства $A_p(\mathbb{R}^n)$ банаховы, поэтому последовательность mf_k , $k = 1, 2, \dots$, сходится в $A_p(\mathbb{R}^n)$ к некоторой функции $g \in A_p(\mathbb{R}^n)$. В силу неравенства Хаусдорфа–Юнга [1, гл. V, §1], которое в наших обозначениях имеет вид $\|\cdot\|_{L^q} \leq \|\cdot\|_{A_p}$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p \leq 2$, видим, что последовательности $\{f_k\}$ и $\{mf_k\}$ сходятся в $L^q(\mathbb{R}^n)$ к f и g соответственно. Таким образом, $mf = g$, и остается перейти к пределу в неравенстве $\|mf_k\|_{A_p} \leq \|m\|_{M_p} \|f_k\|_{A_p}$.

Пусть D_1 — область в $\mathbb{R}^n$ и $D_2 = l(D_1)$ — ее образ при невырожденном аффинном отображении $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Легко увидеть, что $1_{D_1} \in A_p(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $1_{D_2} \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Достаточно заметить, что если $l(x) = Qx + b$, то для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ имеем $|\widehat{f \circ l}(u)| = |\det Q|^{-1} |\widehat{f}((Q^{-1})^* u)|$, где Q^{-1} — матрица, обратная к Q , и $(Q^{-1})^*$ — матрица, сопряженная к Q^{-1} .

Пусть E — произвольное множество в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Следуя [6], скажем, что функция f , заданная на E , принадлежит пространству $A_p(\mathbb{R}^m, E)$, если существует функция $F \in A_p(\mathbb{R}^m)$, такая, что ее сужение $F|_E$ на множество E совпадает с f . Определим норму в $A_p(\mathbb{R}^m, E)$, полагая

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m, E)} = \inf_{F|_E = f} \|F\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}.$$

Заметим, что если I — параллелепипед в $\mathbb{R}^m$ и f — функция на I , то, полагая

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^\circ = \|F\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}, \quad (3)$$

где F — это функция f , продолженная нулем на дополнение $\mathbb{R}^m \setminus I$ (т.е. $F = f$ на I и $F = 0$ на $\mathbb{R}^m \setminus I$), мы получаем норму $\|\cdot\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^\circ$, эквивалентную норме $\|\cdot\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}$ при $1 < p < 2$. Это следует из того, что при $1 < p < \infty$ характеристическая функция всякого параллелепипеда является L^p -мультипликатором Фурье.

Основной доказательства теоремы 2 является следующий результат, полученный автором в [6, теорема 1'']. Пусть $1 \leq p < 2$. Пусть V — область в $\mathbb{R}^m$ и $\varphi \in C^{1,\omega}(V)$ — вещественная функция. Предположим, что градиент $\nabla\varphi$ функции φ не вырожден на V , т.е. множество $\nabla\varphi(V)$ имеет положительную меру. Тогда для всех тех $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geq 1$, для которых $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{R}^m, V)$, имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m, V)} \geq c \left(|\lambda|^{1/p} \chi^{-1} \left(\frac{1}{|\lambda|} \right) \right)^m, \quad (4)$$

где χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$, и $c = c(p, \varphi) > 0$ не зависит от λ .

Следующая далее простая лемма 1 (которая будет также использована в §3) позволяет свести вопрос о включении $1_D \in A_p$ к вопросу о поведении экспонент $e^{i\lambda\varphi}$ в A_p .

Для вектора $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и числа $a \in \mathbb{R}$ пусть (x, a) обозначает вектор $(x_1, \dots, x_m, a) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Пусть I — открытый параллелепипед в $\mathbb{R}^m$ с ребрами, параллельными координатным осям. Пусть φ — непрерывная ограниченная функция на I , причем $\varphi(t) > 0$ при всех $t \in I$. Рассмотрим следующую область G в $\mathbb{R}^{m+1}$:

$$G = \{(t, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : t \in I, 0 < y < \varphi(t)\}.$$

Всякую область такого вида мы называем правильной областью, порожденной парой (I, φ) .

Лемма 1. Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ — правильная область, порожденная парой (I, φ) . Пусть $1 < p < 2$. Включение $1_G \in A_p(\mathbb{R}^{m+1})$ имеет место тогда и только тогда, когда $e^{i\lambda\varphi} \in A_p(\mathbb{R}^m, I)$ для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda|^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^p d\lambda < \infty.$$

Доказательство. Для $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ определим функцию F_λ на $\mathbb{R}^m$, полагая

$$F_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{1}{-i\lambda} (e^{-i\lambda\varphi(t)} - 1), & \text{если } t \in I, \\ 0, & \text{если } t \in \mathbb{R}^m \setminus I. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\widehat{1_G}(u, \lambda) = \widehat{F_\lambda}(u), \quad (u, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

Действительно, прямое вычисление дает

$$\begin{aligned} \widehat{1_G}(u, \lambda) &= \iint_{t \in I, 0 < y < \varphi(t)} e^{-i(u, t)} e^{-i\lambda y} dt dy = \int_I \left(\int_0^{\varphi(t)} e^{-i\lambda y} dy \right) e^{-i(u, t)} dt \\ &= \int_I \frac{1}{-i\lambda} (e^{-i\lambda\varphi(t)} - 1) e^{-i(u, t)} dt = \widehat{F_\lambda}(u). \end{aligned}$$

Таким образом, $1_G \in A_p(\mathbb{R}^{m+1})$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{R}} \|F\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)}^p d\lambda < \infty.$$

Остается лишь учесть, что

$$\|F\lambda\|_{A_p(\mathbb{R}^m)} = \frac{1}{|\lambda|} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^\circ,$$

где $\|\cdot\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^\circ$ — эквивалентная норма в $A_p(\mathbb{R}^m, I)$, определенная выше (см. (3)). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что вопреки утверждению теоремы $1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$.

Мы можем окружить каждую точку x границы ∂D открытым параллелепипедом $\Pi_x \ni x$, столь малым, что пересечение $D \cap \Pi_x$ является правильной областью после подходящего вращения и сдвига. Извлечем из покрытия $\{\Pi_x, x \in \partial D\}$ границы ∂D конечное подпокрытие. Заметим, что $\nu_D(\partial D) = S^{n-1}$; поэтому по крайней мере для одного из параллелепипедов Π_x , который мы обозначим через Π , имеем

$$|\nu_D(\partial D \cap \Pi)|_{S^{n-1}} > 0. \quad (5)$$

Рассмотрим область $G = D \cap \Pi$. Так как характеристическая функция любого параллелепипеда является L^p -мультипликатором, то $1_G = 1_\Pi \cdot 1_D \in A_p(\mathbb{R}^n)$. Заменяя, если нужно, область G ее копией, полученной вращением и сдвигом, можем считать, что G — правильная область. Эта область порождена парой (I, φ) , где I — некоторый параллелепипед в $\mathbb{R}^m$, $m+1 = n$, с ребрами, параллельными координатным осям, и φ — некоторая функция из $C^{1,\omega}(I)$.

Легко видеть, что условие (5) влечет за собой невырожденность градиента функции φ на I , т. е. условие $|\nabla\varphi(I)| > 0$. В самом деле (напомним, что если $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $a \in \mathbb{R}$, то (x, a) обозначает вектор $(x_1, \dots, x_m, a) \in \mathbb{R}^{m+1}$), рассмотрим отображение

$$\beta(t) = (t, \varphi(t)), \quad t \in I$$

(β отображает I на график функции φ). Нормаль ν_D и градиент $\nabla\varphi$ функции φ связаны соотношением

$$\nu_D \circ \beta(t) = \frac{1}{\sqrt{|\nabla\varphi(t)|^2 + 1}} (-\nabla\varphi(t), 1), \quad t \in I.$$

Таким образом, полагая

$$\gamma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{|\xi|^2 + 1}} (-\xi, 1), \quad \xi \in \mathbb{R}^m,$$

имеем $\nu_D \circ \beta = \gamma \circ \nabla\varphi$. Поэтому для множества $W = \nabla\varphi(I)$ получаем

$$\gamma(W) = \gamma(\nabla\varphi(I)) = \nu_D \circ \beta(I) = \nu_D(\partial D \cap \Pi),$$

и соотношение (5) влечет за собой $|\gamma(W)|_{S^{n-1}} > 0$. Поскольку γ — это диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^m$ на верхнюю полусферу

$$S_+^m = \{x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : |x| = 1, x_{m+1} > 0\}$$

(где $m+1 = n$), видим, что $|W| > 0$.

Мы видим, таким образом, что правильная область G порождена парой (I, φ) , где $\varphi \in C^{1,\omega}(I)$ — функция с невырожденным градиентом, и вместе с тем $1_G \in A_p(\mathbb{R}^{m+1})$.

По лемме 1

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda|^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^p d\lambda < \infty,$$

откуда

$$\int_{\lambda \geq 1} \frac{1}{\lambda^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^p d\lambda < \infty,$$

и, поскольку $1 \in A_p(\mathbb{R}^m, I)$, $p > 1$, мы видим, что

$$\int_1^\infty \frac{1}{\lambda^p} \|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{R}^m, I)}^p d\lambda < \infty.$$

Отсюда, полагая $V = I$ в оценке (4), получаем

$$\int_1^\infty \lambda^{m-p} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^{mp} d\lambda < \infty,$$

т. е. (напомним, что $m = n - 1$)

$$\int_1^\infty \lambda^{n-1-p} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^{(n-1)p} d\lambda < \infty.$$

Следующая лемма, имеющая чисто технический характер, завершает доказательство теоремы.

Лемма 2. Пусть $n \geq 2$, $1 < p < 2$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\int_1^\infty \lambda^{n-1-p} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^{(n-1)p} d\lambda < \infty$;
- 2) $\int_0^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}} d\delta < \infty$.

Разумеется, чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно убедиться, что $1) \Rightarrow 2)$. Обратная импликация при $n = 2$ потребует ниже, в §3.

Доказательство леммы 2. При $0 < \varepsilon < 1$ положим

$$I(\varepsilon) = \int_{1/\chi(1)}^{1/\chi(\varepsilon)} \lambda^{n-1-p} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^{(n-1)p} d\lambda, \quad J(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}} d\delta.$$

Имеем

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{n-p} \int_{1/\chi(1)}^{1/\chi(\varepsilon)} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^{(n-1)p} d\lambda^{n-p}.$$

После замены переменной $\lambda = 1/\chi(\delta)$ и интегрирования по частям получаем

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{n-p} \left(\frac{\varepsilon^{n(p-1)}}{(\omega(\varepsilon))^{n-p}} - \frac{1}{(\omega(1))^{n-p}} \right) + \frac{(n-1)p}{n-p} J(\varepsilon). \quad (6)$$

Пользуясь этим соотношением, видим, что

$$I(\varepsilon) \geq \frac{-1}{(n-p)(\omega(1))^{n-p}} + \frac{(n-1)p}{n-p} J(\varepsilon);$$

поэтому $1) \Rightarrow 2)$.

Обратно, пусть выполнено условие 2). Тогда, поскольку

$$\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \frac{\delta^{n(p-1)-1}}{(\omega(\delta))^{n-p}} d\delta \geq \frac{1}{(\omega(\varepsilon))^{n-p}} \int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} \delta^{n(p-1)-1} d\delta \geq c_{n,p} \frac{\varepsilon^{n(p-1)}}{(\omega(\varepsilon))^{n-p}},$$

имеем

$$\frac{\varepsilon^{n(p-1)}}{(\omega(\varepsilon))^{n-p}} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

и в силу соотношения (6) получаем условие 1). Лемма, а с ней и теорема доказаны.

Замечание 2. Теорема 2 (и вытекающее из нее следствие 1) имеет локальный характер. Эта теорема остается в силе, если предполагать, что лишь часть границы области D , т. е. пересечение $B \cap \partial D$, где B — некоторая окрестность в $\mathbb{R}^n$, является $C^{1,\omega}$ -гладкой и нормальное отображение ν , определенное на $B \cap \partial D$, невырожденно, т. е. $|\nu(B \cap \partial D)|_{S^{n-1}} > 0$. При этом условие ограниченности области D можно заменить более слабым условием $|D| < \infty$. (Модификация доказательства очевидна.)

При $n = 2$ условие невырожденности нормального отображения на $B \cap \partial D$ означает, что $B \cap \partial D$ не является прямолинейным интервалом.

§3. Области в $\mathbb{R}^2$

Здесь для каждого класса $C^{1,\omega}$ (при некотором простом условии, наложенном на ω) мы построим ограниченную область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ с $C^{1,\omega}$ -гладкой границей, такую, что характеристическая функция 1_D принадлежит A_p при p , настолько близких к 1, насколько позволяет теорема 2. При этом можно добиться, чтобы граница области D не содержала прямолинейных отрезков (таким образом, эта область существенно отличается от многоугольников).

В соответствии с теоремой 2, если D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial D \in C^{1,\omega}$ и

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta = \infty,$$

то $1_D \notin A_p(\mathbb{R}^2)$. В частности, это так, если $\partial D \in C^{1,\alpha}$ и $p \leq 1 + \alpha/(2 + \alpha)$. Следующая теорема показывает, что этот результат является точным.

Теорема 3. Пусть $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$ при всех достаточно малых $\delta > 0$. Существует ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ с $C^{1,\omega}$ -гладкой границей, такая, что $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех p , $1 < p < 2$, для которых

$$\int_0^1 \frac{\delta^{2p-3}}{\omega(\delta)^{2-p}} d\delta < \infty. \quad (7)$$

Кроме того, граница области D не содержит отрезков.

Из этой теоремы немедленно вытекают приведенные ниже следствия.

Следствие 3. Для любого α , $0 < \alpha < 1$, существует ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ с $C^{1,\alpha}$ -гладкой границей, такая, что $1_D \in A_p(\mathbb{R}^2)$ при всех $p > 1 + \alpha/(2 + \alpha)$. Граница области D не содержит отрезков.

Следствие 4. *Существует ограниченная область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ с C^1 -гладкой границей, такая, что $1_D \in \bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{R}^2)$. Граница области D не содержит отрезков.*

Отметим еще, что из теорем 2, 3 следует, что область $D \subseteq \mathbb{R}^2$ со свойствами $\partial D \in C^{1,\omega}$ и $1_D \in \bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{R}^2)$ существует тогда и только тогда, когда $\omega(\delta)$ стремится к 0 медленнее любой степени, т.е. когда $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta)/\delta^\varepsilon = \infty$ при всех $\varepsilon > 0$. Теорема 2 влечет за собой необходимость этого условия, теорема 3 — его достаточность¹⁾.

Автору неизвестно, верны ли аналогичные результаты для областей в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $A_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, — пространство распределений f на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел), таких, что последовательность коэффициентов Фурье $\widehat{f} = \{\widehat{f}(k), k \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит l^p . Положим

$$\|f\|_{A_p(\mathbb{T})} = \|\widehat{f}\|_{l^p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^p \right)^{1/p}.$$

(При $1 \leq p \leq 2$ всякое распределение из $A_p(\mathbb{T})$ является функцией из $L^q(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$, $1/p + 1/q = 1$.)

При $p > 1$ положим

$$\Theta_p(y) = \left(\int_1^y \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\tau} \right) \right)^p d\tau \right)^{1/p}, \quad y > 1,$$

где, как и выше, χ^{-1} — функция, обратная к $\chi(\delta) = \delta\omega(\delta)$.

В теореме 2 работы [5] в предположении, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ выполняется условие $\omega(2\delta) < 2\omega(\delta)$, нами построена вещественная функция φ на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, такая, что $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$ (т.е. φ есть 2π -периодическая функция класса $C^{1,\omega}(\mathbb{R})$) и при всех p , $1 < p < 2$, мы имеем

$$\|e^{i\lambda\varphi}\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \Theta_p(|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq 2. \quad (8)$$

Кроме того, функция φ нигде не линейна, т.е. не является линейной ни на каком интервале²⁾.

Ясно, что из оценки (8) мы получаем

$$\|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_p \Theta_p(|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \geq 2. \quad (9)$$

Ясно также, что для любой непрерывно дифференцируемой функции f на $\mathbb{T}$ мы имеем $f \in A_1(\mathbb{T})$ и

$$\|f\|_{A_1(\mathbb{T})} \leq c \|f\|_{C^1(\mathbb{T})},$$

где

$$\|f\|_{C^1(\mathbb{T})} = \max_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| + \max_{t \in \mathbb{T}} |f'(t)|.$$

¹⁾ Следует лишь заметить, что если указанное условие выполнено, то существует неубывающая непрерывная функция $\omega^*(\delta)$ на $[0, +\infty)$, стремящаяся к 0 медленнее любой степени, такая, что $\omega^*(2\delta) < 2\omega^*(\delta)$ при всех $\delta > 0$ и $\omega^*(\delta) = O(\omega(\delta))$ при $\delta \rightarrow +0$. Например, можно положить $\omega^*(\delta) = \delta/(1+\delta) + \delta \inf_{0 < x \leq \delta} \omega(x)/x$. В том, что второе слагаемое — неубывающая функция, легко убедиться, см. [15, гл. III, 3.2.5].

²⁾ В той же теореме 2 работы [5] подобный результат получен также при $p = 1$.

Поэтому

$$\|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_1(\mathbb{T})} \leq c\|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{C^1(\mathbb{T})} \leq c_\varphi|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Рассмотрим следующее множество Q на прямой $\mathbb{R}$:

$$Q = \{t \in (0, 2\pi) : \varphi'(t) > 0\}.$$

Поскольку $\varphi \neq \text{const}$ и $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$, ясно, что $Q \neq \emptyset$ и $Q \neq (0, 2\pi)$. Рассмотрим какой-либо интервал (a, b) , являющийся компонентой связности множества Q . По крайней мере в одном конце этого интервала производная φ' равна нулю. Мы можем считать, что в правом, т. е. $\varphi'(b) = 0$, в противном случае вместо $\varphi(t)$ и интервала (a, b) рассмотрим функцию $-\varphi(-t)$ и интервал $(-b, -a)$. Выберем теперь произвольно точку c , $a < c < b$. Заменяя функцию $\varphi(t)$ на $\varphi(t) - \varphi(c)$, мы можем считать, что $\varphi(c) = 0$. Положим $I = (c, b)$.

Таким образом, получаем нигде не линейную функцию $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$, удовлетворяющую условиям (9), (10), и интервал $I = (c, b) \subseteq [0, 2\pi]$, такой, что $\varphi(c) = 0$, функция φ строго возрастает на I и, кроме того, $\varphi'(c) > 0$, $\varphi'(b) = 0$.

Напомним известную связь [16, §44] между пространствами $A_p(\mathbb{T})$ и $A_p(\mathbb{R})$ при $1 < p \leq 2$. Если f есть 2π -периодическая функция и f^* — ее сужение на $[0, 2\pi]$, продолженное нулем на $\mathbb{R}$, т. е. $f^* = f$ на $[0, 2\pi]$, $f^* = 0$ на $\mathbb{R} \setminus [0, 2\pi]$, то $f \in A_p(\mathbb{T})$ тогда и только тогда, когда $f^* \in A_p(\mathbb{R})$, причем

$$c_1(p)\|f^*\|_{A_p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{A_p(\mathbb{T})} \leq c_2(p)\|f^*\|_{A_p(\mathbb{R})}.$$

Таким образом, из оценок (9) и (10) получаем при всех p , $1 < p < 2$,

$$\|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}, I)} \leq c_p \Theta_p(|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| \geq 2, \quad (11)$$

и соответственно

$$\|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}, I)} \leq c|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Рассмотрим правильную область $G \subseteq \mathbb{R}^2$, порожденную парой (I, φ) .

Лемма 3. При всех p , $1 < p < 2$, для которых выполнено условие (7), имеем $1_G \in A_p(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Легко убедиться, что условие (7) влечет за собой

$$\int_1^\infty \frac{1}{\lambda^p} (\Theta_p(\lambda))^p d\lambda < \infty. \quad (13)$$

Действительно, при любом $a > 1$, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{1}{\lambda^p} (\Theta_p(\lambda))^p d\lambda &= \frac{1}{-p+1} \int_1^a (\Theta_p(\lambda))^p d\lambda^{-p+1} \\ &= \frac{1}{-p+1} \left((\Theta_p(a))^p a^{-p+1} - \int_1^a \lambda^{-p+1} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^p d\lambda \right) \\ &\leq \frac{1}{p-1} \int_1^a \lambda^{-p+1} \left(\chi^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right)^p d\lambda, \end{aligned}$$

и, пользуясь леммой 2 при $n = 2$, получаем (13).

Следовательно (см. (11), (13)),

$$\int_{|\lambda| \geq 2} \frac{1}{|\lambda|^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}, I)}^p d\lambda < \infty.$$

Вместе с тем (см. (12))

$$\int_{|\lambda| < 2} \frac{1}{|\lambda|^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}, I)}^p d\lambda < \infty.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\lambda|^p} \|e^{i\lambda\varphi} - 1\|_{A_p(\mathbb{R}, I)}^p d\lambda < \infty.$$

Остается воспользоваться леммой 1. Лемма 3 доказана.

Завершим доказательство теоремы 3. Построенная нами область $G \subseteq \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$G = \{(t, y) : c < t < b, 0 < y < \varphi(t)\},$$

где $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{R})$ — нигде не линейная функция. Напомним, что в соответствии с нашим построением $\varphi(c) = 0$ и функция φ строго возрастает на интервале (c, b) . Кроме того, $\varphi'(c) > 0$, $\varphi'(b) = 0$. По лемме 3 при всех p , для которых выполнено условие (7), имеем $1_G \in A_p(\mathbb{R}^2)$. Растягивая (или сжимая) область G по вертикали при помощи аффинного преобразования плоскости, мы можем считать, что $\varphi'(c) = 1$. Пусть G^* — область, симметричная области G относительно прямой $t = b$. Положим $W = G \cup G^* \cup \xi$, где ξ — интервал с концами в точках $(b, 0)$ и $(b, \varphi(b))$. Возьмем теперь квадрат $\Pi \subseteq \mathbb{R}^2$ со стороной, равной $2(b - c)$. Искомую область D получим, беря четыре жесткие копии области W (т. е. копии, полученные вращением и сдвигом) и приклеивая их к сторонам квадрата Π с его внешней стороны. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 3 (и ее следствия 3, 4) допускает следующую модификацию. Утверждение о том, что граница области D не содержит отрезков, можно заменить на утверждение, что область D является выпуклой. Можно ли добиться выполнения этих условий одновременно, автору неизвестно. Указанная модификация следует из того, что оценка (8) верна для некоторой (вещественной) непостоянной функции $\varphi \in C^{1,\omega}(\mathbb{T})$, такой, что интервал $(0, 2\pi)$ является объединением трех интервалов, на каждом из которых производная φ' монотонна. Такая функция построена нами в [5] (см. построения, непосредственно предшествующие доказательству теоремы 2 в работе [5]).

Неясно, даже без предположений относительно гладкости границы, существует ли строго выпуклая область $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, такая, что $1_D \in \bigcap_{p>1} A_p(\mathbb{R}^n)$ (мы называем область строго выпуклой, если она является выпуклой и ее граница не содержит отрезков).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [2] И. Стейн, *Некоторые проблемы гармонического анализа, связанные с понятием кривизны и осцилляторными интегралами*, в кн.: Международный конгресс математиков в Беркли, 1986. Обзорные доклады, Мир, М., 1991, 297–232.
- [3] E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [4] C. S. Herz, *Fourier transforms related to convex sets*, Ann. of Math., **75**:1 (1962), 81–92.

- [5] В. В. Лебедев, *Количественные оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона*, Матем. сб., **201**:12 (2010), 103–130.
- [6] В. В. Лебедев, *Оценки в теоремах типа теоремы Берлинга–Хелсона. Многомерный случай*, Матем. заметки, **90**:3 (2011), 394–407.
- [7] V. V. Lebedev, *On the Fourier transform of the characteristic function of a domain in R^n* , in: 11th Summer St. Petersburg Meeting in Math. Analysis; Euler Int. Math. Inst., St. Petersburg, Aug. 15–20, 2002, Abstracts, p. 24.
- [8] V. Lebedev, *The domains with C^1 -smooth boundary and the Fourier transform of their characteristic functions*, in: 14th Summer St. Petersburg Meeting in Math. Analysis; Euler Int. Math. Inst., St. Petersburg, June. 6–11, 2005, Abstracts, p. 18.
- [9] V. Lebedev, *On the Fourier transform of the indicator of a domain with C^1 -smooth boundary*, in: Int. Conference on Harmonic Analysis and Approximation III; Sept. 20–27, 2005, Tsahkadzor, Armenia, Abstracts, Yerevan, 2005, 50–51.
- [10] H. Triebel, *Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers*, Rev. Mat. Complut., **15**:2 (2002), 475–524.
- [11] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [12] M. N. Kolountzakis, T. Wolff, *On the Steinhaus tiling problem*, Mathematika, **46**:2 (1999), 253–280.
- [13] P. Mattila, *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [14] Л. Хермандер, *Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига*, ИЛ, М., 1962.
- [15] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960.
- [16] M. Plancherel, G. Pólya, *Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. II*, Comm. Math. Helv., **10**:1 (1937), 110–163.

Московский институт электроники и математики
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: lebedevhome@gmail.com

Поступило в редакцию
20 мая 2011 г.