Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Гусейн-Заде, Об эквивариантном аналоге дзета-функции монодромии, *Функци. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 17–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3095>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:13:59

УДК 515.165

Об эквивариантном аналоге дзета-функции монодромии*

© 2013. С. М. Гусейн-Заде

Предлагается эквивариантный аналог дзета-функции монодромии роста, инвариантного относительно действия конечной группы G , как элемент кольца Гротендика конечных $(\mathbb{Z} \times G)$ -множеств. Формулируются эквивариантные аналоги теоремы Себастьяни–Тома и формулы А’Кампо.

Эта работа (в несколько более кратком виде) была по сути написана в феврале 2008 г., когда и была утеряна вместе с внешним жестким диском в Мадриде. Довольно длительное время настроение восстанавливать ее отсутствовало. Однако в последнее время некоторые идеи из нее были использованы, в частности, в [3], [5]. Это подтолкнуло к возвращению к работе. Большая часть работы была написана во время, когда автор пользовался гостеприимством Математического института Макса Планка в Бонне. Автор признателен А. И. Эстерову за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

Ряд инвариантов особенностей аналитических пространств и ростков аналитических функций на них имеют эквивариантные аналоги для особенностей с действием конечной группы G и G -инвариантных (или G -эквивариантных) ростков функций на них. Так, в [10] в качестве эквивариантного аналога числа Милнора G -инвариантного ростка функции на пространстве $(\mathbb{C}^n, 0)$ (с действием группы G) рассматривается некоторый элемент кольца $R(G)$ (виртуальных представлений группы G). Важным инвариантом ростка аналитической функции на ростке аналитического пространства (вообще говоря, особого) является дзета-функция классической монодромии ростка.

Пусть $f: (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — росток комплексно-аналитической функции на ростке $(V, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ аналитического пространства (вообще говоря, особого). Для достаточно малого $\delta > 0$ ограничение функции f на пересечение $V \cap B_\delta(0)$ пространства V с (замкнутым) шаром $B_\delta(0)$ радиуса δ с центром в начале координат в $\mathbb{C}^N$ является локально тривиальным расслоением над проколотой окрестностью нуля в $\mathbb{C}$ (расслоением Милнора ростка f ; см. [7]). Слой $M_f = f^{-1}(\varepsilon) \cap B_\delta(0)$ этого расслоения ($0 < |\varepsilon| \ll \delta$ достаточно малы) называется *слоем Милнора* ростка f . Преобразование $\Gamma_f: M_f \rightarrow M_f$ монодромии расслоения Милнора ростка f , соответствующее петле $\varepsilon \cdot \exp(2\pi i \tau)$ ($\tau \in [0, 1]$), называется *преобразованием (классической) монодромии* ростка f . (Оно определено однозначно с точностью до изотопии.) Действие преобразования монодромии в группах (ко)гомологий слоя Милнора называется *оператором (классической) монодромии* ростка f .

*Работа частично поддержана грантами правительства России 11.G34.31.0005, РФФИ–10-01-00678, НШ–4850.2012.1 и фонда Саймонса для математиков преподавателей-исследователей.

Замечание. Практически без изменений все утверждения о монодромии в этой работе могут формулироваться для ростка $f: (V, W) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, где W — компактное аналитическое пространство.

Дзета-функцией отображения $\varphi: X \rightarrow X$ (достаточно хорошего пространства X , скажем, разности двух компактных субаналитических пространств) называется рациональная функция

$$\zeta_\varphi(t) := \prod_{q \geq 0} \{ \det(\text{id} - t\varphi_{|H_c^q(X; \mathbb{R})}^*) \}^{(-1)^q},$$

где φ^* — действие преобразования φ в группах $H_c^q(X; \mathbb{R})$ когомологий с компактными носителями. Степень дзета-функции $\zeta_\varphi(t)$ (степень числителя минус степень знаменателя) равна эйлеровой характеристике $\chi(X)$ пространства X (также определяемой через когомологии с компактными носителями). Дзета-функция $\zeta_f(t) := \zeta_{\Gamma_f}(t)$ классической монодромии ростка f представима в виде $\prod_{m \geq 1} (1 - t^m)^{s_m}$, где s_m — целые числа, конечное число которых отлично от нуля. Это следует, например, из подходящего варианта формулы А'Кампо [2].

Замечание. Использование в определениях групп когомологий с компактными носителями связано с тем, что в этом случае эйлерова характеристика обладает свойством аддитивности по отношению к разбиению на непересекающиеся подпространства, а дзета-функция отображения — соответствующим свойством мультипликативности, эквивариантный аналог которого сформулирован ниже в предложении 3. Эйлерова характеристика аддитивно продолжается на алгебру субаналитических множеств.

Дзета-функция $\zeta_\varphi(t)$ преобразования $\varphi: X \rightarrow X$ может быть выражена через числа Лефшеца $L(\varphi^k)$ степеней φ^k преобразования φ , $k \geq 1$. Определим целые числа r_i , $i = 1, 2, \dots$, рекуррентно уравнениями

$$L(\varphi^m) = \sum_{i|m} r_i. \quad (1)$$

Число r_m «считает» точки $x \in X$, φ -орбиты которых имеют порядок m (т.е. $\varphi^m(x) = x$, $\varphi^i(x) \neq x$ для $0 < i < m$). Поэтому r_m делится на m , $r_m = ms_m$. Тогда

$$\zeta_\varphi(t) = \prod_{m \geq 1} (1 - t^m)^{s_m}.$$

(В этой формуле для дзета-функции произвольного преобразования, в отличие от формулы для дзета-функции преобразования классической монодромии, может быть бесконечное количество отличных от нуля показателей s_m . Так будет, например, для отображения окружности в себя степени два или для автоморфизма двумерного тора, задаваемого матрицей из $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ с неединичными по модулю собственными значениями.)

Предположим, что на ростке $(V, 0)$ имеется (аналитическое) действие конечной группы G , а росток f инвариантен относительно этого действия: $f(gx) = f(x)$ для любого $g \in G$. Слои Милнора M_f ростка f является G -пространством, т.е. пространством с действием группы G , группы когомологий $H_c^q(M_f)$ являются пространствами G -представлений (G -модулями). Обозначим через $[H^q(M_f)]$ класс G -модуля $H^q(M_f)$ в кольце $R(G)$ (виртуальных) представлений

группы G . Эквивариантная эйлерова характеристика слоя Милнора M_f ростка f обычно определяется как $\sum_q (-1)^q [H^q(M_f)] \in R(G)$ (см., например, [10]). В такой постановке естественное обобщение понятия дзета-функции монодромии ростка на эквивариантный случай отсутствует. Мы предлагаем возможное обобщение и описываем некоторые его свойства.

Сначала несколько модифицируем определение (эквивариантной) эйлеровой характеристики. Для удобства мы будем рассматривать ее на категории субаналитических пространств. (Слой Милнора ростка является, конечно, таким пространством.) Группа Гротендика $K_0(\Omega)$ некоторой алгебры Ω пространств или множеств (возможно, с дополнительными структурами) — это абелева группа, порожденная классами $[X]$ изоморфизма пространств или множеств X из Ω по модулю соотношений $[X] = [Y] + [X \setminus Y]$ для $Y \subset X$. Обычно группа Гротендика алгебры пространств или множеств является кольцом с умножением, определяемым декартовым произведением. Эйлерова характеристика может рассматриваться как гомоморфизм из кольца Гротендика субаналитических пространств в кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел. В свою очередь, кольцо $\mathbb{Z}$ может быть естественным образом отождествлено с кольцом Гротендика $K_0(\text{f.s.})$ конечных множеств.

Аналогично эквивариантная эйлерова характеристика может быть определена как гомоморфизм из кольца Гротендика субаналитических пространств с субаналитическим действием (конечной) группы G в кольцо Гротендика $K_0(\text{f.}G\text{-s.})$ конечных G -множеств (finite G -sets), называемое также кольцом Бернсайда группы G ; см., например, [9], [8]. (Конечное G -множество — это конечное множество с действием группы G . Кольцо Гротендика $K_0(\text{f.}G\text{-s.})$ как свободная абелева группа порождено неприводимыми конечными G -множествами. Такие G -множества находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности $\mathfrak{H} \in \text{consub}(G)$ подгрупп группы G : подгруппе $H \subset G$ ($H \in \mathfrak{H}$) соответствует класс G -множества G/H .) Если X — субаналитическое пространство с действием конечной группы G , то существует его представление в виде объединения клеток в конечном CW-комплексе (и даже симплексов в конечном симплицальном комплексе), такое, что действие элементов группы G согласовано с разбиением пространства X на клетки и, более того, если $g\sigma = \sigma$ для некоторой клетки σ , то $g|_\sigma = \text{id}$. Множество C_n клеток размерности n — конечное G -множество. Эквивариантная эйлерова характеристика $\chi_G(X)$ G -пространства X может быть определена как альтернированная сумма $\sum_{n \geq 0} (-1)^n [C_n] \in K_0(\text{f.}G\text{-s.})$ классов G -множеств C_n . Эквивалентное определение эквивариантной эйлеровой характеристики $\chi_G(X)$ (которое, в частности, показывает корректность определения) состоит в следующем. Для класса сопряженности $\mathfrak{H} \in \text{consub}(G)$ подгрупп группы G положим $X^{(\mathfrak{H})} := \{x \in X : G_x \in \mathfrak{H}\}$, где $G_x := \{g \in G : gx = x\}$ — подгруппа изотропии точки x . Тогда

$$\chi_G(X) = \sum_{\mathfrak{H}} \chi(X^{(\mathfrak{H})}/G)[G/H] = \sum_{\mathfrak{H}} (\chi(X^{(\mathfrak{H})})|H|/|G|)[G/H], \quad (2)$$

где суммирование ведется по всем классам $\mathfrak{H} \in \text{consub}(G)$, H — представитель класса сопряженности $\mathfrak{H}$.

Пусть $K_0(\text{perm.})$ — кольцо Гротендика перестановок на конечных множествах. Оно может рассматриваться как кольцо Гротендика конечных $\mathbb{Z}$ -множеств. Как абелева группа $K_0(\text{perm.})$ является свободной абелевой группой,

порожденной циклическими перестановками. Для перестановки как отображения конечного множества (нульмерного топологического пространства) в себя определена ее дзета-функция. Дзета-функция циклической перестановки m элементов равна $1 - t^m$. Виртуальной перестановке $(A_1, \sigma_1) - (A_2, \sigma_2)$ поставим в соответствие ее дзета-функцию, определяемую как отношение $\zeta_{\sigma_1}(t)/\zeta_{\sigma_2}(t)$ дзета-функций перестановок σ_i . Нетрудно видеть, что тем самым определено взаимно однозначное отображение из кольца Гротендика $K_0(\text{perm.})$ на множество рациональных функций вида $\prod (1 - t^m)^{s_m}$ с конечным числом показателей s_m , отличных от нуля. (Тем самым на множестве последних определяется структура кольца. При этом «суммой» двух функций указанного вида является их произведение. Это следует иметь в виду для понимания того, почему предложение 3 указано выше как эквивариантный аналог свойства мультипликативности дзета-функции отображения.) Таким образом, дзета-функция роста функции может рассматриваться как элемент кольца Гротендика перестановок $K_0(\text{perm.})$. (Дзета-функция роста как элемент кольца $K_0(\text{perm.})$ может быть определена как виртуальная перестановка, «обычная» дзета-функция которой совпадает с «обычной» дзета-функцией роста. Другое определение: это — виртуальная перестановка, числа Лефшеца степеней которой совпадают с числами Лефшеца степеней преобразования классической монодромии.) Аналогично дзета-функция отображения $\varphi: X \rightarrow X$ может рассматриваться как элемент кольца Гротендика $K_0(\text{l.f.perm.})$ «локально конечных» перестановок. (Детали можно найти ниже в эквивариантной ситуации.)

Эквивариантное число Лефшеца $L^G(\varphi)$ (G -эквивариантного) отображения G -пространства X в себя было определено в [8] как элемент кольца Гротендика $K_0(\text{f.G-s.})$. Оно определено для отображений конечных G -CW-комплексов, а также дополнений к G -подкомплексам в конечных G -CW-комплексах. Если X — замкнутое G -многообразие, то $L^G(\varphi)$ может быть определено как (конечное) G -множество неподвижных точек общего G -эквивариантного шевеления отображения φ , в котором точки берутся с подходящими знаками. Если X — компактное G -многообразие с краем, то имеет место то же самое утверждение, если дополнительно потребовать, чтобы рассматриваемое шевеление не имело неподвижных точек на границе ∂X . (В [6] рассматривается другой эквивариантный аналог числа Лефшеца, приспособленный к решаемой там задаче.)

G -перестановка G -множества A (конечного или бесконечного) — это взаимно однозначное G -эквивариантное отображение σ множества A в себя, или, что то же самое, — структура $(\mathbb{Z} \times G)$ -множества на A . G -перестановка σ *конечна*, если соответствующее G -множество A конечно. Будем говорить, что G -перестановка σ *локально конечна*, если $\mathbb{Z}$ -орбита любой точки конечна и для любого натурального числа M множество точек, $\mathbb{Z}$ -орбиты которых имеют порядок, не превосходящий M , конечно. (Степень локально конечной перестановки тоже локально конечна.) Множества классов изоморфизма конечных и локально конечных G -перестановок являются полукольцами относительно обычных операций: несвязного объединения и декартова произведения. Множество неприводимых (т. е. не представимых в виде несвязного объединения нетривиальных элементов) G -перестановок находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\text{consubf}(\mathbb{Z} \times G)$ классов сопряженности подгрупп конечного индекса в группе $\mathbb{Z} \times G$. Подгруппа $\hat{H} \subset \mathbb{Z} \times G$ конечного индекса может быть

описана тройкой (H, m, α) , где H — подгруппа группы G , m — натуральное число, α — элемент группы C_H/H , где C_H — централизатор подгруппы H , $C_H = \{a \in G : a^{-1}Ha = H\}$. Тройке (H, m, α) соответствует подгруппа $\hat{H}(H, m, \alpha)$ группы $\mathbb{Z} \times G$, порожденная $\{0\} \times H$ и (m, α) . Для $g \in C_H$ мы позволим себе писать $\hat{H}(H, m, g)$ вместо $\hat{H}(H, m, [g])$, где $[g]$ — класс элемента g в C_H/H . Обозначим класс сопряженности подгруппы $\hat{H}(H, m, \alpha)$ в $\mathbb{Z} \times G$ через $\hat{\mathfrak{H}}(H, m, \alpha)$. Тройки (H, m, α) и (H', m', α') эквивалентны (т. е. соответствующие им подгруппы в $\mathbb{Z} \times G$ сопряжены), если $m' = m$ и существует такой элемент $g \in G$, что $H' = g^{-1}Hg$, $\alpha' = g^{-1}\alpha g$. Пусть $K_0(\text{f.}G\text{-perm.})$ и $K_0(\text{l.f.}G\text{-perm.})$ — кольца Гротендика конечных и локально конечных G -перестановок соответственно. Как группа $K_0(\text{f.}G\text{-perm.})$ является свободной абелевой группой, порожденной классами изоморфизма неприводимых G -перестановок;

$$K_0(\text{l.f.}G\text{-perm.}) = \left\{ \sum_{\hat{\mathfrak{H}} \in \text{consubf}(\mathbb{Z} \times G)} k_{\hat{\mathfrak{H}}} [\mathbb{Z} \times G / \hat{H}] \right\},$$

где, вообще говоря, может быть бесконечно много ненулевых коэффициентов $k_{\hat{\mathfrak{H}}}$ ($\hat{H}$ — представитель класса $\hat{\mathfrak{H}}$).

Для локально конечной G -перестановки σ , рассматриваемой как отображение дискретного топологического пространства в себя, определено эквивариантное число Лефшеца $L^G(\sigma) \in K_0(\text{f.}G\text{-s.})$ в смысле [8]. Это просто множество неподвижных точек перестановки σ (т. е. действия элемента $(1, e) \in \mathbb{Z} \times G$), рассматриваемое как G -множество. Для виртуальной G -перестановки $[\sigma_1] - [\sigma_2] \in K_0(\text{l.f.}G\text{-perm.})$ его следует определить как $L^G(\sigma_1) - L^G(\sigma_2)$. (Для $g \in G$ отображение $g\sigma$ (т. е. действие элемента $(1, g) \in \mathbb{Z} \times G$) тоже является локально конечной G -перестановкой и поэтому определено эквивариантное число Лефшеца $L^G(g\sigma)$.)

Пусть $\varphi: X \rightarrow X$ есть G -эквивариантное отображение G -пространства X («хорошего» в описанном выше смысле) в себя.

Определение. Эквивариантная дзета-функция ζ_{φ}^G отображения φ — это такая виртуальная G -перестановка $[\sigma] \in K_0(\text{l.f.}G\text{-perm.})$, для которой $L^G(g\sigma^m) = L^G(g\varphi^m)$ для всех $m \geq 1$ и $g \in G$.

Предложение 1. Эквивариантная дзета-функция G -эквивариантного отображения φ определена корректно (т. е. соответствующая (виртуальная) G -перестановка $[\sigma]$ существует и единственна).

Доказательство. Предположим, что

$$\zeta_{\varphi}^G = \sum_{\hat{\mathfrak{H}} \in \text{consubf}(\mathbb{Z} \times G)} k_{\hat{\mathfrak{H}}} [(\mathbb{Z} \times G) / \hat{H}].$$

Тогда для $g \in C_H$ коэффициент $\ell_{\hat{\mathfrak{H}}}(m, g)$ при образующей $[G/H]$ в $L^G(g\varphi^m)$ равен

$$\sum_{\hat{\mathfrak{H}} \subset \hat{\mathfrak{H}}(H, m, g)} k_{\hat{\mathfrak{H}}}.$$

Система

$$\ell_{\hat{\mathfrak{H}}}(m, g) = \sum_{\hat{\mathfrak{H}} \subset \hat{\mathfrak{H}}(H, m, g)} k_{\hat{\mathfrak{H}}}$$

является треугольной (относительно естественного упорядочения троек $(\mathfrak{H}, m, \alpha)$) системой уравнений, позволяющей рекуррентно находить коэффициенты $k_{\hat{\mathfrak{H}}}$. $\square$

Следующие свойства эквивариантной дзета-функции являются простыми следствиями определения.

Предложение 2. Если G -отображения $\varphi_i: X \rightarrow X$, $i = 1, 2$, гомотопны в классе G -отображений, то $\zeta_{\varphi_1}^G = \zeta_{\varphi_2}^G$.

Предложение 3. Предположим, что G -отображение $\varphi: X \rightarrow X$ переводит в себя некоторое G -инвариантное подпространство $Y \subset X$ и его дополнение $X \setminus Y$. Тогда $\zeta_{\varphi}^G = \zeta_{\varphi|_Y}^G + \zeta_{\varphi|_{X \setminus Y}}^G$.

Предложение 4. Для G -отображений $\varphi_i: X_i \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, имеет место равенство $\zeta_{\varphi_1 \times \varphi_2}^G = \zeta_{\varphi_1}^G \cdot \zeta_{\varphi_2}^G$. (Здесь $\varphi_1 \times \varphi_2$ — отображение пространства $X_1 \times X_2$ в себя, переводящее $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ в $(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$.)

Замечание. Предложения 3 и 4 позволяют определить эквивариантную дзета-функцию монодромии как гомоморфизм кольца Гротендика ростков конструктивных G -инвариантных функций на ростках конструктивных G -множеств в кольцо Гротендика конечных $(\mathbb{Z} \times G)$ -множеств.

Предложение 5. Предположим, что $X = X^{(5)}$, т.е. группы изотропии всех точек в X сопряжены подгруппе $H \in \mathfrak{H}$, и пусть $\varphi: X \rightarrow X$ — отображение, такое, что $g\varphi^m(x) \neq x$ для всех $x \in X$, $g \in G$, $m = 1, \dots, m_0 - 1$ (т.е. при $1 \leq m < m_0$ отображение φ^m не переводит никакую G -орбиту в себя); $g_0\varphi^{m_0} = \text{id}$. (Заметим, что в этом случае g_0 лежит в централизаторе C_H подгруппы H .) Тогда

$$\zeta_{\varphi}^G = \frac{\chi(X/G)}{m_0} [(\mathbb{Z} \times G)/\hat{H}(H, m_0, g_0)] = \chi(X/(\mathbb{Z} \times G)) [(\mathbb{Z} \times G)/\hat{H}(H, m_0, g_0)]$$

(в этом случае фактор $X/(\mathbb{Z} \times G)$ определен).

Сформулируем эквивариантные аналоги некоторых известных утверждений о монодромии и ее дзета-функции.

Пусть $f_1: (V_1, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ и $f_2: (V_2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ — два ростка G -инвариантных комплексно-аналитических функций. Суммой Себастьяни–Тома ростков f_1 и f_2 называется росток $f_1 \oplus f_2: (V_1 \times V_2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, задаваемый формулой $(f_1 \oplus f_2)(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$. Росток $f_1 \oplus f_2$ инвариантен относительно естественного (диагонального) G -действия на $(V_1 \times V_2, 0)$. Следующее утверждение является эквивариантным аналогом теоремы Себастьяни–Тома, утверждающей, что оператор монодромии суммы Себастьяни–Тома ростков функций на аффинных пространствах $(\mathbb{C}^n, 0)$ с изолированными критическими точками в начале координат равен тензорному произведению операторов монодромии ростков (или, точнее, ее следствия для дзета-функции монодромии).

Теорема 1 (эквивариантная теорема Себастьяни–Тома).

$$\zeta_{f_1 \oplus f_2}^G = \zeta_{f_1}^G + \zeta_{f_2}^G - \zeta_{f_1}^G \cdot \zeta_{f_2}^G.$$

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что слой Милнора $V_{f_1 \oplus f_2}$ ростка $f_1 \oplus f_2$ может быть G -эквивариантно стянут на джойн $V_{f_1} \star V_{f_2}$ слоев Милнора ростков f_1 и f_2 , см., например, [1, разд. 2.7]. При этом преобразование монодромии на $V_{f_1} \star V_{f_2}$ является джойном соответствующих преобразований на

V_{f_1} и V_{f_2} . Наконец, джойн $V_{f_1} \star V_{f_2}$ представим в виде (несвязного) объединения G -инвариантных подпространств V_{f_1} , V_{f_2} и $(V_{f_1} \star V_{f_2}) \setminus (V_{f_1} \cup V_{f_2}) \simeq V_{f_1} \times V_{f_2} \times (0, 1)$ (с тривиальным действием G на $(0, 1)$), к которому можно применить предложение 3. $\square$

Пусть $(V, 0)$ — росток комплексно-аналитического G -пространства чистой размерности n , и пусть $f: (V, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ есть G -инвариантный росток комплексно-аналитической функции, такой, что множество V_{sing} особенностей пространства V содержится в нулевом множестве уровня $\{f = 0\}$ ростка f (например, V имеет изолированную особенность в начале координат). Пусть $\pi: (X, D) \rightarrow (V, 0)$ ($D = \pi^{-1}(0)$) есть G -разрешение особенности f , являющееся изоморфизмом вне $\{f = 0\}$. Это означает, что:

- (i) X — (неособое) комплексно-аналитическое многообразие размерности n с действием группы G ;
- (ii) π — собственное аналитическое отображение, коммутирующее с действием группы G ;
- (iii) полный прообраз $\pi^{-1}(\{f = 0\})$ нулевого множества уровня ростка f является дивизором с нормальными пересечениями на X .

G -разрешение особенности всегда существует. Условие (iii) эквивалентно тому, что в окрестности любой точки $x \in \pi^{-1}(\{f = 0\})$ существует локальная система координат $u_1, \dots, u_n$ на X , центрированная в точке x , в которой поднятие $\tilde{f} := f \circ \pi$ ростка f на пространство разрешения X имеет вид $\tilde{f}(u_1, \dots, u_n) = u_1^{m_1} \cdots u_n^{m_n}$, где m_i — неотрицательные целые числа, не все равные нулю. Мы будем предполагать также, что и *исключительный дивизор* $D = \pi^{-1}(0)$ является дивизором с нормальными пересечениями на X и что для любой точки $x \in D$ все компоненты E_i исключительного дивизора D , проходящие через точку x , инвариантны относительно подгруппы G_x изотропии точки x .

Замечание. Последнее условие не очень существенно и требуется здесь только для удобства рассуждений. Добиться его выполнения всегда можно дополнительными раздутиями (σ -процессами) вдоль парных пересечений компонент E_i . При этом возникают новые компоненты, неособые части которых (в исключительном дивизоре) имеют нулевые эйлеровы характеристики. Нетрудно видеть, что они не вносят вклад в правую часть формулы (3) ниже.

Пусть $D = \bigcup_{i=1}^s E_i$ — разложение исключительного дивизора D на неприводимые компоненты и $\mathring{E}_i$ — неособая часть компоненты E_i в полном прообразе $\pi^{-1}(\{f = 0\})$ нулевого множества уровня, т.е. сама компонента E_i минус ее пересечения со всеми остальными компонентами дивизора $\pi^{-1}(\{f = 0\})$. Пусть $\mathring{D} = \bigcup_{i=1}^s \mathring{E}_i$ — неособая часть исключительного дивизора D в $\pi^{-1}(\{f = 0\})$, $\widehat{D} = \mathring{D}/G$ — соответствующее факторпространство, т.е. пространство орбит действия группы G на $\mathring{D}$, и пусть $j: \mathring{D} \rightarrow \widehat{D}$ — отображение факторизации.

Пусть $\{\Xi\}$ — стратификация пространства $\widehat{D}$, такая, что:

- (i) каждый страт Ξ — связное комплексно-аналитическое многообразие и поэтому содержится в образе одной компоненты $\mathring{E}_i$ под действием отображения j ;
- (ii) над каждым стратом Ξ отображение j является накрытием.

Как и выше, для точки $x \in X$ через G_x обозначается ее подгруппа изотропии. Из свойства (ii) вытекает, что подгруппы изотропии всех точек из связанной компоненты прообраза $j^{-1}(\Xi)$ страта Ξ совпадают, а подгруппы изотропии всех точек из прообраза $j^{-1}(\Xi)$ сопряжены друг другу в G . Обозначим соответствующий класс сопряженности через $\mathfrak{H}_\Xi$. Для страта Ξ возьмем точку $x \in j^{-1}(\Xi)$. Пусть $m_x = m_\Xi$ — кратность нуля поднятия $\tilde{f} = f \circ \pi$ функции f на пространство разрешения X вдоль компоненты $\mathring{D}$, содержащей точку x . (Она же — кратность функции $\tilde{f}$ в точке x .) Подгруппа изотропии G_x точки x действует на слое над точкой x (одномерного) нормального расслоения к неособой части $\mathring{D}$ исключительного дивизора. Пусть H_x — подгруппа группы G_x , состоящая из элементов, действие которых на слое тривиально. Заметим, что $G_x \subset C_{H_x}$, а фактор G_x/H_x является циклической группой, порядок которой $n_x = |G_x/H_x| =: n_\Xi$ делит кратность m_x . Действие (представление) группы G_x/H_x на слое задает гомоморфизм (даже мономорфизм) группы G_x/H_x в $\mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$. Пусть α_x^{-1} — элемент этой группы, переходящий в $\exp(2\pi i/n_x)$. Положим $\hat{H}_x = \hat{H}(H_x, m_x/n_x, \alpha_x)$. Нетрудно видеть, что класс сопряженности $\hat{\mathfrak{H}}(H_x, m_x/n_x, \alpha_x)$ подгруппы $\hat{H}(H_x, m_x/n_x, \alpha_x)$ в $\mathbb{Z} \times G$ не зависит от выбора точки $x \in j^{-1}(\Xi)$. Представитель этого класса будем обозначать через $\hat{H}_\Xi$.

Теорема 2 (эquivариантная формула А'Кампо).

$$\zeta_f^G = \sum_{\Xi} \chi(\Xi) \cdot [(\mathbb{Z} \times G)/\hat{H}_\Xi]. \quad (3)$$

Доказательство. Поскольку разрешение π является изоморфизмом вне $f^{-1}(0)$, отображение π определяет отождествление слоя Милнора M_f с его прообразом $\pi^{-1}(M_f) \subset X$. Так же, как и в обычной (неequivариантной) ситуации (см. [4], [2]), можно построить G -equivариантную деформационную ретракцию окрестности полного прообраза $\pi^{-1}(f^{-1}(0)) = \tilde{f}^{-1}(0)$ нулевого множества уровня $f^{-1}(0)$ на сам прообраз $\tilde{f}^{-1}(0)$, такую, что вне окрестности объединения всех пересечений компонент дивизора $\tilde{f}^{-1}(0)$, т.е. там, где в локальных координатах $\tilde{f}(u_1, \dots, u_n) = u_1^m$, ретракция переводит точку $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ в точку $(0, u_2, \dots, u_n)$ (в некоторых координатах). Можно также построить G -equivариантное преобразование монодромии $\tilde{\Gamma}$ на $\pi^{-1}(M_f)$, коммутирующее с ретракцией и такое, что в окрестности точки, где $\tilde{f}(u_1, \dots, u_m) = u_1^m$, оно переводит $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \pi^{-1}(M_f)$ в $(\exp(2\pi i/m)u_1, u_2, \dots, u_n)$. Из предложения 3 следует, что equivариантная дзета-функция $\zeta_f^G = \zeta_{\tilde{\Gamma}}^G$ равна сумме equivариантных дзета-функций преобразования монодромии на прообразах стратов Ξ и на окрестностях пересечений компонент полного прообраза $f^{-1}(0)$.

Нетрудно показать, что equivариантная дзета-функция преобразования монодромии на окрестности пересечения компонент дивизора $f^{-1}(0)$ равна нулю. Это можно вывести из того, что слой Милнора в такой окрестности может быть представлен как расслоение на окружности, согласованное с действием группы, а преобразование монодромии может быть построено таким, что оно сохраняет это расслоение.

Эquivариантная дзета-функция преобразования монодромии $\tilde{\Gamma}$ на прообразе страта Ξ дается предложением 5. Действительно, пересечение слоя Милнора

$\pi^{-1}(M_f)$ с нормальным слоем к $\mathring{D}$ в точке из $\pi^{-1}(\Xi)$ состоит из m_Ξ точек, переставляемых преобразованием монодромии $\tilde{\Gamma}$ циклически. Пересечения с орбитами группы G разбивает эти точки на n_Ξ групп по m_Ξ/n_Ξ точек в каждой. (Здесь, конечно, термин «группа» имеет не тот смысл, что в остальных местах, но, к моему удивлению, я не нашел подходящего синонима.) Преобразование монодромии $\tilde{\Gamma}$ переставляет эти группы циклически. Поэтому при $m = 1, \dots, m_\Xi/n_\Xi - 1$ m -я степень преобразования монодромии не сохраняет никакую G -орбиту. В свою очередь, m_Ξ/n_Ξ -я степень преобразования монодромии переводит любую точку y из нормального слоя в точке x в точку $a^{-1}y$, где $a \in \alpha_x$. Поэтому преобразование $a \circ \tilde{\Gamma}^{m_\Xi/n_\Xi}$ действует на пересечениях слоя Милнора $\pi^{-1}(M_f)$ с нормальными слоями к $\mathring{D}$ во всех точках из $\pi^{-1}(\Xi)$ тождественно, что и требуется в предложении 5. Поэтому рассматриваемая эквивариантная дзета-функция равна $\chi(\Xi) \cdot [(\mathbb{Z} \times G)/\hat{H}_\Xi]$, что доказывает утверждение. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*. Т. II. Монодромия и асимптотики интегралов, Наука, М., 1984.
- [2] N. A'Campo, *La fonction zêta d'une monodromie*, Comm. Math. Helv., **50** (1975), 233–248.
- [3] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade, *Equivariant Poincaré series of filtrations*, Revista Matemática Complutense, **26**:1 (2013), 241–251; <http://arxiv.org/abs/1005.5656>.
- [4] C. H. Clemens, *Picard–Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities*, Trans. Amer. Math. Soc., **136** (1969), 93–108.
- [5] W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade, *Saito duality between Burnside rings for invertible polynomials*, Bull. London Math. Soc., **44**:4 (2012), 814–822; <http://arxiv.org/abs/1105.1964>.
- [6] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernandez, *On an equivariant version of the zeta function of a transformation*, <http://arxiv.org/abs/1203.3344>.
- [7] Lê Dũng Tráng, *Some remarks on relative monodromy*, in: Real and Complex Singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, 397–403.
- [8] W. Lück, J. Rosenberg, *The equivariant Lefschetz fixed point theorem for proper co-compact G-manifolds*, in: High-dimensional manifold topology, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003, 322–361.
- [9] T. tom Dieck, *Transformation Groups and Representation Theory*, Lecture Notes in Math., vol. 766, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [10] C. T. C. Wall, *A note on symmetry of singularities*, Bull. London Math. Soc., **12**:3 (1980), 169–175.