Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Горин, С. Норвидас, Универсальные символы на локально компактных абелевых группах, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 1–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:09:07

Универсальные символы на локально компактных абелевых группах*

© 2013. Е. А. Горин, С. Норвидас

С точки зрения элементарного функционального анализа неравенства Бернштейна — это в основном точные оценки норм некоторых операторов свертки ограниченных на вещественной оси целых функций не выше фиксированного конечного экспоненциального типа с (комплексными) борелевскими мерами конечной полной вариации.

Если считать функции заданными на некоторой локально компактной абелевой группе и нормы равномерными, то обобщенные пространства Бернштейна параметризуются компактами двойственной группы X , а символы операторов — сужениями на компакты в X функций, локально совпадающих с преобразованиями Фурье мер. Среди символов есть такие, что в случае равномерных норм (и, как оказывается, тогда и в более общих случаях) норма оператора совпадает с его спектральным радиусом, и главный результат работы — описание соответствующих (универсальных) символов в терминах положительно определенных функций. Особенное место занимают связанные группы.

Введение

Мы предполагаем известными основные понятия теории целых функций, теории коммутативных банаховых алгебр над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и коммутативного гармонического анализа. Отметим, что все необходимые сведения, включая терминологию и обозначения, имеются в [1] и [2]. Довольно многое остается содержательным, если иметь в виду группы $\mathbb{R}^m$, их дискретные аналоги $\mathbb{Z}^m$ и двойственные группы $\mathbb{T}^m$, стандартно связанные с группой $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

При $\sigma > 0$ обозначим через $\mathbf{B}_\sigma$ пространство всех целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, ограниченных на вещественной оси. Из теоремы Фрагмена–Линделёфа вытекает, что это пространство является банаховым относительно поточечных линейных операций и $\sup$ -нормы по вещественной оси.

В пространстве $\mathbf{B}_\sigma$ непрерывно действует оператор $a = -id/d\lambda$, причем его спектр совпадает с промежутком $[-\sigma, \sigma]$ на двойственной оси. Основное тригонометрическое неравенство Бернштейна утверждает, что в $\mathbf{B}_\sigma$ норма этого оператора равна σ , т. е. совпадает с его спектральным радиусом. Аналогично можно интерпретировать ряд других неравенств Бернштейна, заменяя оператор a подходящими функциями от этого оператора, и в случае пространств $\mathbf{B}_\sigma$ все такие функции, как оказалось, имеют простое общее описание в терминах положительно определенных функций на вещественной оси (такой подход к неравенствам Бернштейна был обозначен еще в [3]).

Иначе обстоит дело при расширении класса пространств. Чтобы не прибегать к намекам и ненужным повторам, мы сразу дадим несколько общих определений.

*Второй автор пользовался поддержкой Научного совета Литвы (грант No. MIP-12090).

В дальнейшем Λ — локально компактная абелева группа. Все абелевы группы (за понятными исключениями) записываются аддитивно, и это относится и к двойственной группе X . Результат спаривания характера $x \in X$ и элемента $\lambda \in \Lambda$ обозначается через $\langle x, \lambda \rangle$.

Стандартная алгебра комплексных борелевских мер конечной полной вариации на Λ обозначается через $M = M(\Lambda)$. Идеал мер, абсолютно непрерывных по мере Хаара, обозначается через $L = L(\Lambda)$. Этот идеал естественно отождествляется с лебеговым пространством $L^1(\Lambda)$. Пространство $(C^*$ -алгебру $C_b(\Lambda)$ всех ограниченных непрерывных функций с $\sup$ -нормой здесь удобно рассматривать как часть сопряженного к $L^1(\Lambda)$ пространства.

Символом на (двойственной) группе X называется такая функция f , что $f|Q = \hat{\mu}|Q$ для каждого компакта $Q \subset X$, где $\hat{\mu}$ — преобразование Фурье меры $\mu \in M$ (вообще говоря, зависящей от Q).

Для каждого компакта $Q \subset X$ через $\mathbf{B}(Q)$ обозначается пространство Бернштейна тех $g \in C_b(\Lambda)$, преобразование Фурье которых (как функционалов над L) сосредоточено на Q . В случае $Q = [-\sigma, \sigma] \subset \mathbb{R}$ определения пространств $\mathbf{B}(Q)$ и $\mathbf{B}$ согласованы.

Через S обозначается регулярное представление группы Λ левыми сдвигами s_λ пространства $C_b(\Lambda)$, так что $(s_\lambda g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(\lambda + t)$. Пространства $\mathbf{B}(Q)$ инвариантны относительно операторов представления. Сужения представления на $\mathbf{B}(Q)$ равномерно непрерывны. Мы не будем вводить дополнительных обозначений для сужений, из контекста всегда будет ясно, о чем идет речь.

Представление S продолжается до представления алгебры M операторами в пространствах $\mathbf{B}(Q)$ по формуле (слева мы сознательно пишем $\hat{\mu}$, а не μ)

$$(\hat{\mu}(S)g)(\lambda) = \int_{\Lambda} g(\lambda + t) \mu(dt). \quad (1)$$

Легко убедиться, что при $\Lambda = \mathbb{R}$ возникающее функциональное исчисление согласовано со стандартным, использующим формулу Коши. Например, в случае $\mathbf{B}_\sigma$ ничего, кроме замены оператора a представлением $\lambda \rightarrow \exp i\lambda a$, не происходит.

Далее, без труда проверяется, что $\hat{\mu}(S) = 0$ в $\mathbf{B}(Q)$, если $\hat{\mu}(x) = 0$ в некоторой окрестности компакта Q . Поэтому для символа f корректно положить $f(S) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mu}(S)$, если f и $\hat{\mu}$ совпадают в некоторой окрестности компакта Q .

В отличие от случая промежутка на оси в общем случае вопрос о совпадении нормы и спектрального радиуса оператора $f(S)$ в $\mathbf{B}(Q)$ не имеет простого ответа. Поэтому представляется разумным выяснить, для каких символов f совпадение имеет место при любом выборе компакта $Q \subset X$, т. е. описать *универсальные символы*. Первые результаты на эту тему были кратко опубликованы в [4], где рассматривались операторы в пространствах Бернштейна, связанных с $\mathbb{R}^n$. Случай общих локально компактных абелевых групп кратко обсуждался в заметке [5].

Цель данной работы — дать ясное представление об универсальных символах в терминах положительно определенных функций на группах.

Пусть f — комплексная функция, заданная на некотором множестве Q , и $x_0 \in Q$ — такая точка, что $|f(x)| \leq |f(x_0)| \neq 0$ для всех $x \in Q$. Функцию $f(x+x_0)/f(x_0)$ на $-x_0+Q$ будем называть *стандартной редукцией* функции f .

Мы покажем, что универсальность символа f равносильна возможности продолжить стандартную редукцию этого символа до положительно определенной (не обязательно непрерывной) функции на X для каждого конечного множества $Q \subset X$.

В случае связных групп класс конечных подмножеств можно заменять другими, например, для евклидовых пространств — парами параллельных отрезков равной длины. Кроме того, все универсальные символы f в этом случае допускают представление $f = \chi \cdot (f_1 \circ \varphi)$, где χ — характер, f_1 — одномерный универсальный символ и φ — непрерывный гомоморфизм в аддитивную группу $\mathbb{R}$.

В отличие от прежних подходов здесь мы не используем предшествующих результатов о совпадении нормы и спектрального радиуса для индивидуальных $\mathbf{B}(Q)$, и это вполне естественно, так как универсальность символа — более грубое свойство.

§1. Положительно определенные функции

Функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ на группе X называется *положительно определенной*, если при каждом выборе точек $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, и каждом выборе комплексных констант $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{0 \leq j, k \leq n} f(x_j - x_k) \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0. \quad (2)$$

Из неравенства (2) вытекает, что $|f(x)| \leq f(0)$ и что $f(-x) = \overline{f(x)}$ при всех $x \in X$.

Класс всех положительно определенных функций на X обозначается через $\text{PD}(X)$. Если группа X локально компактна, то класс *непрерывных* функций из $\text{PD}(X)$ совпадает с классом преобразований Фурье регулярных борелевских мер $0 \leq \mu \in M(\Lambda)$ (теорема Бохнера).

Теорема Бохнера — удобный инструмент, и ее можно применять к разрывным функциям, заменяя (по умолчанию) группу X ее дискретным вариантом X_d (тогда двойственная к X группа Λ заменяется компактом Бора Λ_b). Ниже мы перечислим несколько свойств положительно определенных функций, которые проще всего выводятся из теоремы Бохнера. Следующее утверждение хорошо известно.

Лемма 1. Пусть $f \in \text{PD}(X)$ и $|f(x_0)| = f(0)$ при некотором $x_0 \in X$. Тогда

$$f(x + x_0) \cdot f(0) = f(x) \cdot f(x_0) \quad \text{при всех } x \in X.$$

Из леммы 1 сразу вытекает, что оба множества

$$\{x \mid f(x) = f(0)\} \quad \text{и} \quad \{x \mid |f(x)| = f(0)\}$$

являются подгруппами. Кроме того, получается, что f — характер группы X , если $|f(x)| = 1$ при всех $x \in X$.

В ряде случаев теорему Бохнера можно приспособить для доказательства непрерывности. Промежуточный ход — классическое неравенство М. Г. Крейна или его обобщения. Следующая лемма, приведенная в [5], содержит одно из таких обобщений (неравенству Крейна в этой лемме отвечает $n = 1$).

Лемма 2. Пусть $f \in \text{PD}(X)$, и пусть $x_k, y_k \in X$, где $1 \leq k \leq n$. Тогда

$$\left| f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) - f\left(\sum_{k=1}^n y_k\right) \right|^2 \leq 2nf(0) \sum_{k=1}^n \{f(0) - \text{Re } f(x_k - y_k)\}. \quad (3)$$

Доказательство. Мы можем считать, что $f = \hat{\mu}$, где μ — вероятностная борелевская мера на Λ , так что $f(0) = 1$. При $\lambda \in \Lambda$ положим для краткости

$$\alpha_k = \langle x_k, \lambda \rangle, \quad \beta_k = \langle y_k, \lambda \rangle \quad \text{и} \quad \gamma_k = \overline{\alpha_k} \cdot \beta_k,$$

так что α_k , β_k и γ_k — функции от λ , по модулю равные 1. Ниже суммы и произведения берутся по индексу k , $1 \leq k \leq n$, причем пределы изменения индекса опущены.

Левая часть неравенства (3) совпадает с

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Lambda} \left(\sum \langle x_k, \lambda \rangle - \sum \langle y_k, \lambda \rangle \right) \mu(d\lambda) \right|^2 &= \left| \int_{\Lambda} \left(\prod \alpha_k - \prod \beta_k \right) \mu(d\lambda) \right|^2 \\ &= \left| \int_{\Lambda} \left(\prod \alpha_k \right) \left(1 - \prod \gamma_k \right) \mu(d\lambda) \right|^2. \end{aligned}$$

Применяя к последнему члену неравенство Коши–Буняковского (в L^2 по мере), получим, что он не превосходит

$$\int_{\Lambda} \left| 1 - \prod \gamma_k \right|^2 \mu(d\lambda).$$

Далее,

$$1 - \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots = (1 - \gamma_1) + \gamma_1(1 - \gamma_2) + \gamma_1 \gamma_2(1 - \gamma_3) + \cdots.$$

Наконец, применим неравенство Коши–Буняковского к правой части последнего тождества. Тогда получится, что левая часть в (3) не превосходит

$$n \int_{\Lambda} \sum |1 - \gamma_k|^2 \mu(d\lambda),$$

и дальнейшее очевидно. □

Подмножество $Q \subset X$ будем называть *насыщенным*, если для каждой точки $x_0 \in Q$ из непрерывности PD-функции на $-x_0 + Q$ вытекает ее непрерывность всюду.

Насыщенность следующих множеств (а)–(с) можно выводить из неравенства Крейна, но проще использовать неравенство (3): (а) замыкание непустого открытого множества; (b) поверхность положительной гауссовой кривизны; (с) орбита гладкой кривой $r = r(t)$, $|t| < \varepsilon$, в $\mathbb{R}^n$, для которой векторы $r', r'', \dots, r^{(n)}$ линейно независимы при каждом t .

§2. Алгебра мер

Этот параграф в заметной мере имеет вспомогательный характер. Мы рассматриваем банаховы алгебры A с единицей $\mathbb{I}$ над полем $\mathbb{C}$. Поскольку речь идет о метрических свойствах, относительно нормы предполагается, что $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ для каждой пары $a, b \in A$ и $\|\mathbb{I}\| = 1$.

Спектр элемента $a \in A$ обозначается через $\text{spes}(a)$ или, более аккуратно, через $\text{spes}_A(a)$. Для спектрального радиуса используется обозначение $|a|_\infty$. Элемент a может попадать в различные банаховы алгебры, однако спектральный радиус топологически устойчив. Если все-таки имеет смысл уточнить, в какой алгебре «мы живем», то мы можем написать $|a|_A$.

Через A^{-1} обозначается группа обратимых элементов из A с топологией, индуцированной вложением в A .

Если алгебра A коммутативна, то $\text{Spes}(A)$ — пространство ее максимальных идеалов в топологии Гельфанда, т.е. в слабой топологии сопряженного пространства A^* , если максимальные идеалы отождествлять с гомоморфизмами $A \rightarrow \mathbb{C}$, ядрами которых они являются.

Так как мы начинаем с локально компактных абелевых групп, для наших целей в основном хватает коммутативных алгебр, хотя, вообще говоря, не исключается алгебра $\mathcal{L}(E)$ всех ограниченных операторов банахова пространства E , например, пространства $\mathbf{B}(Q)$.

Как ясно из введения, одна из главных алгебр, с которыми мы будем иметь дело, — это алгебра $M = M(\Lambda)$. Преобразование Фурье превращает свертку мер в произведение функций на двойственной к Λ группе X , так что X погружается в пространство максимальных идеалов алгебры $M(\Lambda)$, но, вообще говоря, не исчерпывает даже границу Шилова. Напротив, у L нет других гомоморфизмов в $\mathbb{C}$, кроме точечных. Вместе с тем локально на X алгебры $\widehat{M}$ и $\widehat{L}$ совпадают (т.е. совпадают их сужения на каждый компакт из X). Дополненный единицей (если ее нет), идеал L становится регулярной по Шилу алгеброй на одноточечном расширении группы X .

Оболочкой идеала в коммутативной банаховой алгебре называется совокупность всех максимальных идеалов, включающих данный. Иначе говоря, оболочка — это множество комплексных гомоморфизмов, аннулирующих этот идеал.

Пусть Q — компакт в X . По теореме Шилова среди замкнутых идеалов в M с оболочкой Q имеется минимальный — замыкание идеала мер $\mu \in M$, для которых $\widehat{\mu}(x) = 0$ в некоторой окрестности компакта Q . Этот идеал обозначается через $J(Q)$. Максимальным идеалом с данной оболочкой является идеал $I(Q)$ всех мер μ , для которых $\widehat{\mu}|_Q = 0$. Поэтому

$$J(Q) \subset K \subset I(Q) \quad (4)$$

для каждого замкнутого идеала K с оболочкой Q . Соотношение (4) потребуется при рассмотрении представлений, более общих, чем S .

Из определений легко вытекает, что имеет место естественный изоморфизм $\mathbf{B}(Q) = (M/J(Q))^*$. Справа M можно заменить на L с одновременной заменой $J(Q)$ на $J(Q) \cap L$.

Оператор $f(S)$ в $\mathbf{B}(Q)$ становится сопряженным оператору, порожденному умножением на $\widehat{\mu}$ (в $\widehat{M}$ -представлении), где $\widehat{\mu}$ реализует символ f в окрестности компакта Q . Отсюда следует, что спектр оператора $f(S)$ в $\mathbf{B}(Q)$ совпадает с множеством значений символа f на Q . Поэтому определение спектрального радиуса часто становится тривиальной задачей. Кстати, грубая оценка нормы получается из формулы (1). Если взять в такой оценке нижнюю грань по классу эквивалентности относительно идеала $J(Q)$, то получается точная оценка (пока рассматривается представление S), однако эта задача обычно далеко не тривиальная.

§3. Универсальные символы (общие группы)

Линейный функционал ψ на банаховой алгебре называется *неотрицательным*, если $\|\psi\| = \psi(\mathbb{I})$. Если дополнительно $\|\psi\| = 1$, то такой функционал называется *состоянием*.

Состояния составляют слабо замкнутый выпуклый компакт в единичной сфере сопряженного пространства. Крайние точки этого компакта называются *чистыми состояниями*.

Например, в случае алгебры $A = C(Q)$ всех непрерывных функций на компакте Q с поточечными операциями и $\sup$ -нормой неотрицательным функционалам отвечают неотрицательные борелевские меры, состояниям — вероятностные меры, а чистым состояниям — δ -меры.

Все мультипликативные функционалы суть состояния, однако их множество может быть небольшим (и даже пустым в некоммутативной ситуации), тогда как чистых состояний «много», и это вытекает из теоремы Хана–Банаха.

Следующий факт хорошо известен.

Лемма 3. Для C^* -алгебр условие неотрицательности ($\|\psi\| = \psi(\mathbb{I})$) функционала ψ эквивалентно его эрмитовой неотрицательности ($\psi(a^*a) \geq 0$).

В ближайших абзацах нам удобно будет обозначать характеры на Λ через e_x , так что $e_x(\lambda) = \langle x, \lambda \rangle$.

Пусть Y — подмножество в X , содержащее точку 0. Обозначим через $\mathbf{A}(Y)$ линейную оболочку системы $\{e_x \mid x \in Y\}$ (так что $\mathbf{A}(Y)$ содержит главный характер e_0) и снабдим это векторное пространство $\sup$ -нормой по Λ .

Пусть f — такая функция на Y , что $|f(x)| \leq f(0) = 1$. Определим линейный оператор $F: \mathbf{A}(Y) \rightarrow \mathbf{A}(Y)$ равенством $Fe_x = f(x)e_x$. Положим $\psi(g) \stackrel{\text{def}}{=} (Fg)(0)$, $g \in \mathbf{A}(Y)$.

Лемма 4. Следующие условия эквивалентны: (a) $\|F\| = 1$; (b) $\|\psi\| = \psi(e_0) = 1$; (c) функция f имеет положительно определенное продолжение на X .

Доказательство. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать группу X дискретной.

Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) тривиальна. Предположим, что (b) имеет место. Функционал ψ продолжается на пополнение с сохранением условия (b) и по теореме Хана–Банаха на $C_b(\Lambda)$. По лемме 3 продолженный функционал (мы не меняем обозначения) будет положительным в обычном смысле. Искомое продолжение функции f дает функция $x \rightarrow \psi(e_x)$, $x \in X$. Заключительную импликацию (c) $\Rightarrow$ (a) проще всего вывести при помощи теоремы Бохнера. $\square$

Замечание. Приведенное рассуждение выглядит как фрагмент доказательства теоремы Эберлейна (см., например, [6, с. 32]). Однако в этом доказательстве положительная определенность играет малозаметную промежуточную роль, тогда как в лемме 4 — центральную. Отметим, что существование продолжения не зависит от выбора точки максимума, что легко вытекает из леммы 1.

Теорема 1. Символ f тогда и только тогда является универсальным, когда его стандартная редукция с каждого конечного подмножества имеет положительно определенное продолжение.

Доказательство. В одну сторону утверждение тривиально, и мы будем считать выполненным условие продолжения, связанное с конечными подмножествами.

Пусть Q — компакт в X . Будем считать, что для некоторой точки $x_0 \in X$ выполняется соотношение $|f(x)| \leq f(x_0) = 1$. В такой ситуации мы должны убедиться, что $\|f(S)\| = 1$ в $\mathbf{B}(Q)$.

Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть V — такая предкомпактная открытая окрестность компакта Q , что $|f(x)| \leq 1 + \varepsilon$ в ее замыкании $\bar{V}$. Пусть $z \in \bar{V}$ — такая точка, в которой $|f(x)|$ достигает максимума на $\bar{V}$. По лемме 4 функция $f(x+z)/f(z)$ продолжается с множества $-z + \bar{V}$ до положительно определенной функции h с условием $h(0) = 1$. Поскольку множество $-z + \bar{V}$ является насыщенным, функция h непрерывна. По теореме Бохнера $h = \hat{\mu}$, где μ — вероятностная борелевская мера на Λ . Так как

$$f(x) = f(z) \cdot \hat{\mu}(x - z) \quad \text{при } x \in \bar{V},$$

то $\|f(S)\|_{\mathbf{B}(Q)} \leq 1 + \varepsilon$. □

При $\sigma > 0$ и $p \geq 1$ обозначим через H_σ^p совокупность целых функций экспоненциального типа $\leq \sigma$, сужения которых на вещественную ось принадлежат лебегову пространству $L^p(\mathbb{R})$. Из неравенства Иенсена для верхней полуплоскости вытекает, что $H_\sigma^p \subset \mathbf{B}_\sigma$. Отсюда легко следует, что относительно поточечных операций и L^p -нормы по оси H_σ^p является банаховым пространством. Для таких пространств и их абстрактных аналогов сохраняются (в сторону достаточности) теоремы о совпадении нормы и спектрального радиуса и, стало быть, бернштейновские неравенства. Мы опишем простую общую схему, позволяющую это доказать.

Пусть A — комплексная банахова алгебра с единицей, причем норма удовлетворяет стандартными условиям. Пусть (как обычно) A^{-1} — группа обратимых элементов алгебры A с топологией, индуцированной вложением в A .

Пусть

$$\Lambda \ni \lambda \xrightarrow{T} t_\lambda \in A^{-1}$$

— представление группы Λ в A^{-1} . Будем говорить, что представление T *нормальное*, если дополнительно $\|t_\lambda\| = 1$ при всех $\lambda \in \Lambda$.

Нормальное представление индуцирует представление алгебры $M = M(\Lambda) \rightarrow A$ по формуле

$$\hat{\mu}(T) = \int_{\Lambda} t_\lambda \mu(d\lambda).$$

Это представление обозначается тем же символом T .

Пусть $K = \ker(T)$ — ядро гомоморфизма алгебр. Тогда K — замкнутый идеал. Оболочка этого идеала (т.е. совокупность гомоморфизмов алгебры M в $\mathbb{C}$, аннулирующих этот идеал) называется *спектром представления T* и обозначается через $\text{Spec}(T)$. Легко проверить, что

$$\text{Spec}(\hat{\mu}(T)) = \{\hat{\mu}(x) \mid x \in \text{Spec}(T)\}.$$

Обозначение x для точки пространства максимальных идеалов имеет определенный смысл, так как мы собираемся проверить, что $\text{Spec}(T)$ — компакт, попадающий в X (при естественном отождествлении объектов).

Приводимое ниже рассуждение аналогично тому, которое применяется в [7] по близкому поводу.

Обозначим через A_T минимальную замкнутую подалгебру с единицей, содержащую все элементы t_λ , $\lambda \in \Lambda$. Ясно, что A_T будет содержать весь образ

алгебры M в A . Если заменить область значений с A на A_T , то ядро представления не изменится. Это позволяет считать, что с самого начала $A_T = A$. В частности, алгебру A можно считать коммутативной, а образ — всюду плотным в A .

Пусть $R = T|L$ — сужение представления T на L , и пусть φ — мультипликативный функционал на алгебре A . Если R^* — встречное отображение (оно инъективно), то $R^*\varphi$ — мультипликативный функционал на алгебре L . Все такие функционалы реализуются точками группы X , т. е. имеют форму $\mu \rightarrow \hat{\mu}(x_0)$. Так как R^* слабо-слабо непрерывно, то получается, что $Q \stackrel{\text{def}}{=} R^*(\text{Спец}(A))$ — компакт в X . Этот компакт, как вытекает из следующей леммы, совпадает со $\text{Спец}(T)$.

Лемма 5. $J(Q) \subset K \subset I(Q)$.

Доказательство. Достаточно было бы доказать только правое включение, однако для этого нам потребуется левое, с которого мы и начнем.

Пусть $\mu \in M$ и $\hat{\mu}(x) = 0$ в некоторой окрестности V компакта Q , имеющей компактное замыкание. Существует такая мера $\nu \in L$, что $\hat{\nu}|Q = 1$ и $\hat{\nu}(x) = 0$ вне V . Тогда $\mu * \nu = 0$, так что $\hat{\mu}(T) \cdot \hat{\nu}(T) = 0 \in A$. Но $\hat{\nu}(T) \in A^{-1}$, так что $\hat{\mu}(T) = 0$, т. е. $\mu \in K$. Поэтому $J(Q) \subset K$.

Пусть теперь $\mu \in K$. Существует такая мера $\nu \in L$, что $\mu(x) = \nu(x)$ в некоторой окрестности компакта Q . По доказанному $\mu - \nu \in K$, так что $\nu \in K$. Следовательно, $\hat{\nu}|Q = 0$. Поэтому $\hat{\mu}|Q = 0$, т. е. $\mu \in I(Q)$. $\square$

Из определения сразу следует, что $\|\hat{\mu}(T)\| \leq \text{var}(\mu)$. В правой части этого неравенства можно перейти к нижней грани по мерам ν , сравнимым с μ по модулю K . Но эта нижняя грань совпадает с $\|\hat{\mu}(S)\|_{\mathbf{B}(Q)}$. В частности, если норма оператора $\hat{\mu}(S)$ в $\mathbf{B}(Q)$ совпадает со спектральным радиусом, то это остается верным и в отношении $\hat{\mu}(T)$, так как спектры (и, стало быть, спектральные радиусы) этих операторов совпадают.

Ясно, что практически все сказанное распространяется с функций вида $\hat{\mu}$ на произвольные символы.

Следствие. Если f — универсальный символ, то $\|f(T)\| = |f(T)|_\infty$ для каждого нормального представления T .

§4. Одномерные универсальные символы

Мы начнем с нескольких замечаний общего характера.

Согласно основной структурной теореме, каждая связная локально компактная абелева группа есть прямое произведение компактной группы и евклидова пространства. Этим отчасти объясняется роль одномерного случая. Более того, выясняется, что без предварительного тщательного изучения этого случая не видно подхода к общим евклидовым пространствам. Наконец, для таких групп роль одномерных универсальных символов ясна из формулировки окончательного результата, приведенной в конце введения.

Общий критерий универсальности, связанный с конечными множествами, обманчиво прост. Дело в том, что испытывать все конечные множества сложно даже в одномерном случае. Практически наиболее удобны достаточно просто устроенные и более обширные компакты, например, отрезки на прямой $\mathbb{R}$, однако класс отрезков не улавливает универсальности. Наиболее простым примером

на эту тему служит, пожалуй, функция $(1 + x^2)^{-1}$. Однако, как мы покажем, достаточно внешне незначительного расширения класса отрезков.

Мы начнем с общего определения.

Бисегмент в локально компактной абелевой группе X — это множество вида

$$\{x_1 + \omega([0, \varepsilon])\} \cup \{x_2 + \omega([0, \varepsilon])\},$$

где $\omega: \mathbb{R} \rightarrow X$ — непрерывный гомоморфизм, $x_1, x_2 \in X$, $\varepsilon > 0$ и отображение $\omega|_{[0, \varepsilon]}$ биективно. В частности, при $x_1 = x_2$ получается *сегмент*.

Ясно, что в евклидовом пространстве бисегмент — это пара параллельных отрезков одинаковой длины.

Мы покажем, что *для связных групп в критерии универсальности класс конечных подмножеств можно заменить классом бисегментов*. Непрерывности положительно определенного продолжения не требуется, однако, если речь идет об одномерных символах, то непрерывность *наследуется*, так как бисегмент на прямой — насыщенное множество.

Теперь мы переключимся на одномерный случай. Через f обозначается одномерный символ. Предполагается (если противное не оговаривается явно), что *стандартная редукция со всех бисегментов имеет положительно определенное продолжение*. Среди прочего будет показано, что тогда символ универсальный. Для дальнейшего будет важен не только этот факт, но и специфические свойства одномерных универсальных символов, которые будут отмечены по ходу дела.

Если $f \in \text{PD}(X)$, то и $|f|^2 \in \text{PD}(X)$. Случай неотрицательных функций рассматривается в первую очередь, и (снова, пока противное не оговаривается) *предполагается, что $f \geq 0$* .

Следующее предложение будет именоваться (довольно перегруженным термином) *принцип максимума*.

Лемма 6. *Если верхняя грань значений функции f на интервале (a, b) достигается в некоторой точке этого интервала, то $f = \text{const}$ на этом интервале.*

Доказательство. Мы будем считать, что $0 \in (a, b)$ и что $f(0) = 1$ — верхняя грань значений функции f на интервале (a, b) . Кроме того, можно предположить, что $f \in \text{PD}(\mathbb{R})$. Теперь будем рассуждать от противного.

Если 0 — предельная точка множества $\{x \mid f(x) = 1\}$, то ввиду леммы 1 функция f имеет сколь угодно малые положительные периоды и, стало быть, $f = \text{const}$.

Поэтому 0 — изолированная точка этого множества. Следовательно, существует такое $c > 0$, что $f(x) < 1$, если $0 < |x| \leq c$.

Существует такая строго убывающая к нулю последовательность $\{x_k\} \subset (0, c]$, что $f(x) < f(x_k)$, если $x_{k-1} \leq x \leq c$. Пусть y_k — максимальная из точек промежутка $[x_k, x_{k-1})$, в которой значение f совпадает с $f(x_k)$. Замена последовательность $\{x_k\}$ последовательностью $\{y_k\}$, мы будем считать, что $f(x) < f(x_k)$, если $x_k < x \leq c$.

Выберем теперь такое n , чтобы иметь $3x_n \leq c$, и рассмотрим бисегмент $Q = [-c, -x_n] \cup [x_n, c]$. Заметим, что $\pm x_n$ — точки максимума на Q . Стандартная редукция с Q является положительно определенной функцией, для которой (снова по лемме 1) число $2x_n$ служит периодом. Но тогда $f(3x_n) = f(x_n)$ и возникает противоречие. $\square$

Через $\underline{m}(f)$ обозначается множество глобальных минимумов функции f (оно может оказаться пустым). Сначала мы перечислим некоторые свойства неотрицательных f , вытекающие из принципа максимума.

Следствие 1. (a) Каждая точка локального максимума принадлежит множеству $\underline{m}(f)$ глобальных минимумов. (b) Множество $\underline{m}(f)$ замкнуто и связно. (c) На бесконечных компонентах дополнения к $\underline{m}(f)$ функция f строго монотонно возрастает к $+\infty$ при $|x| \rightarrow +\infty$. (d) f является универсальным символом. (e) Если $\underline{m}(f) = [-a, a]$ — симметричный конечный отрезок, то f — четная функция.

Доказательство. (a) Пусть a — точка локального максимума. По лемме 6 f — константа в некоторой окрестности точки a . Если теперь $f(b) < f(a)$, то вопреки лемме f имеет строгий максимум внутри интервала с концами a, b . (b) Замкнутость очевидна. Если $a < b < c$, причем $a, b \in \underline{m}(f)$, но $c \notin \underline{m}(f)$, то на (a, c) возникает противоречие с леммой. (c) Предположим для определенности, что b — правый конец множества $\underline{m}(f)$. Строгое возрастание очевидно. Если при $x \rightarrow \infty$ функция f имеет конечный предел, то возникает противоречие с неравенством Крейна (с леммой 2). (d) Если $x_1 < \dots < x_n$ — конечный набор точек, то максимум достигается хотя бы в одной из точек x_1, x_n . Поэтому достаточно начать с сегмента $[x_1, x_n]$. (e) Пусть $b > a$, $-c < -a$ и $f(b) = f(-c) = 1$. Мы должны убедиться, что $b = c$. Пусть $g(x)$ — положительно определенное продолжение функции $f(x+b)$ с $[-c-b, 0]$. Функция g будет периодической с периодом $b+c$. Кроме того, она вещественная и, следовательно, четная. Положим $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \underline{m}(f)$. Имеем $g(a-b) = \alpha$, так что $g(b-a) = \alpha$. Далее, $g(-a-b) = f(-a) = \alpha$. Поэтому (периодичность) $g(c-a) = \alpha$, так что $g(c-a) = g(b-a)$. Значит, неравенство $c < b$ исключено. $\square$

Теперь условие $f \geq 0$ снимается. Все, что собрано в следствии 2, легко вытекает из следствия 1 и леммы 1, так что доказательства мы опускаем.

Следствие 2. (a) f является универсальным символом. (b) На множестве $\underline{m}(|f|)$ функция f совпадает с характером. (c) Если $\underline{m}(|f|)$ — симметричный конечный отрезок, то $|f|^2$ и $(\operatorname{Re} f)^2$ — четные функции.

Примеры. (a) Если f — вещественная четная функция и $f, f', f'' \geq 0$ при $x > 0$, то f — универсальный символ (аналог признака Пойи). Действительно, достаточно проверять сужения на отрезки $[-a, a]$. Стандартная редукция принимает одинаковые значения на концах, так что (необходимо и) достаточно убедиться в неотрицательности коэффициентов Фурье, так как положительная определенность в таком случае влечет за собой периодичность. (b) Все вещественные четные полиномы с неотрицательными коэффициентами — универсальные символы (очевидно). Заметим, что (вместе с тем) каждый конечный набор $\{z_1, \dots, z_n\}$ комплексных чисел, среди которых нет положительных, включается в набор нулей некоторого четного полинома с неотрицательными коэффициентами. (c) Все полиномы 1-й степени — универсальные символы. Более того, полином — универсальный символ, если все его нули расположены на прямой, ортогональной вещественной оси. (d) Для полинома $x^4 + ax^2 + b$ с вещественными коэффициентами условия $a \geq 0, b \geq 0$ не только достаточны, но и необходимы для универсальности.

Полиномы 2-й степени. Исследуем на универсальность полиномы вида $f(x) = x^2 + ax + b$ с комплексными коэффициентами. Мы будем постепенно

сужать класс полиномов в предположении универсальности, используя указанные выше свойства «по умолчанию».

Так как f — нетривиальный полином, то $\underline{m}(|f|) = \{\text{точка}\}$, и мы будем считать, что эта точка — начало координат 0. Вещественная часть полинома f должна быть четной, а мнимая — нечетной. Поэтому, исключая тривиальные ситуации, мы можем считать, что $f(x) = -x^2 + 2ix + t$, где $t \in \mathbb{R}$. При $t \leq 1$ оба корня полинома лежат на общей вертикальной прямой. Поэтому при таких t универсальность есть. При $t > 2$ у четного полинома $|f(x)|^2$ степени 4 появляется отрицательный коэффициент. Поэтому при таких t не только f , но и $|f|^2$ не будет универсальным символом.

Итак, остается понять, что происходит на сегменте $[1, 2]$ значений t . Заметим, что $f(-x) = \overline{f(x)}$. Это свойство (эрмитовость) вместе с монотонным возрастанием на положительной полуоси функции $|f|$ во многом определяет последующие рассуждения.

Положим $f = |f|e^{i\theta}$, где $\theta = \theta(x)$ — нечетная и строго монотонно возрастающая на полуоси $\mathbb{R}_+$ непрерывная функция со значениями в $(0, \pi)$. В случае нашего полинома $\text{ctg } \theta(x) = (t - x^2)/2x$.

Фиксируем $\sigma > 0$ и определим функцию g равенством

$$f(x) = f(-\sigma)g(x + \sigma) \quad (x \in [-\sigma, \sigma]),$$

так что $g(0) = 1$. Разумеется, g зависит от параметров t и σ . Ясно, что функция $f(x)$ будет универсальным символом в точности при тех t , для которых $g(x)e^{-i\theta(x)x/\sigma}$ имеет 2σ -периодическое положительно определенное продолжение, и дело сводится к проверке неотрицательности ее коэффициентов Фурье, что приводит к условию

$$(-1)^k \operatorname{Re} \int_0^\sigma f(x) e^{i\lambda_k x} dx \geq 0, \quad (5)$$

где $\lambda_k = (\pi k - \theta(\sigma))/\sigma$ и $k = 0, 1, 2, \dots$. Условие (5) можно преобразовать, интегрируя по частям. В нашем случае процедура оборвется на втором шаге. После простых преобразований для таких полиномов условие (5) переписывается в виде

$$\operatorname{Re}(f'(\sigma) + if''(\sigma)/\lambda_k) e^{-i\theta(\sigma)} \geq 0. \quad (6)$$

Легко видеть, что значение $k = 1$ критическое, т.е. выполнение условия (6) при $k = 1$ влечет за собой выполнение этого условия при остальных k .

Отсюда вытекает, что рассматриваемый полином тогда и только тогда является универсальным символом, когда при всех σ выполняется условие

$$\text{ctg } \theta + 1/(\pi - \theta) \leq 1/\sigma. \quad (7)$$

После напрашивающихся замен $\tau = t - 1$, $\lambda = \pi - \theta$ дело сводится к исследованию поведения на интервале $(0, \pi)$ элементарной функции ψ/φ^2 , где $\varphi = \sin \lambda - \lambda \cos \lambda$ и $\psi = \lambda^2 - \sin^2 \lambda$.

Задача кажется совсем простой, но в выкладках легко ошибиться. Вместо этого мы поручаем дело несложной программе, которая приводит к рис. 1.

Если поверить в этот рисунок, то станет очевидно, что кривая выпуклая. Возвращаясь к началу, мы получаем для точки перестройки $t_0 \approx 1,86$. Из выпуклости следует, что при $t_0 < t < 2$ возникает σ -лакуна неблагоприятных участков, которая пропадает при движении влево.

Рис. 1

§5. Универсальные символы на плоскости

При рассмотрении двумерной ситуации мы будем использовать комплексную координату вместо двух вещественных, т. е. $\mathbb{C}$ вместо $\mathbb{R}^2$.

В дальнейшем удобно иметь перед глазами приводимый ниже рис. 2 (хотя первоначально точки могут располагаться более свободно). На нем видно 6 точек, расположенных на единичной окружности, но сама окружность не указана. Смысл всех прямых либо ясен, либо проясняется по ходу дела.

В следующих леммах, пока противное не оговаривается, рассматривается *положительный*¹⁾ плоский символ f , имеющий положительно определенную стандартную редукцию с бисегментов. Как всегда, $\mathbb{T}$ — единичная окружность и $\mathbb{D}$ — (открытый) единичный диск с границей $\mathbb{T}$.

Лемма 7. Пусть $a, b \in \mathbb{T}$, причем $a \neq b$. Предположим, что $f(a) = f(b) = f(0) = 1$. Тогда во всех точках w хотя бы одного из отрезков

$$[0, a], [0, b] \text{ или } [-\varepsilon \cdot (b - a), \varepsilon \cdot (b - a)], \text{ где } \varepsilon > 0,$$

имеем $f(w) = 1$.

Доказательство. Если $a + b = 0$, то $q[a, b]$ будет достигать максимума в какой-нибудь внутренней точке отрезка. Например, при $q[a, b] \leq 1$ такой точкой служит 0. Однако в силу принципа максимума тогда $q[a, b] = \text{const}$. Это позволяет в дальнейшем считать, что $a + b \neq 0$. Совершая поворот, мы сведем дело к ситуации, когда $-1 < \text{Re } a < 0$, $\text{Im } a > 0$ и $b = \bar{a}$. Эта ситуация отражена на рис. 2 (остается объяснить, что такое z).

Можно считать, что во всех внутренних точках отрезка $[0, a]$ выполняется неравенство $f(w) < 1$. Действительно, в противном случае, согласно принципу максимума, $f|[0, a] = \text{const}$ и реализуется первая из указанных в лемме возможностей. Аналогично, можно считать, что $f(w) < 1$ во всех внутренних точках отрезка $[0, \bar{a}]$.

¹⁾Расширение класса до неотрицательных символов тривиально.

Рис. 2

Далее, $f(\lambda) < 1$ во всех внутренних точках треугольника с вершинами $0, a, \bar{a}$. Действительно, если в некоторой точке w_0 выполняется противоположное неравенство, то мы проведем через эту точку вертикальную прямую и рассмотрим отрезок этой прямой с концами на сторонах треугольника. На этом отрезке нарушится принцип максимума. Поэтому такой точки w_0 нет.

Нам остается сделать последний шаг. Предположим, что для некоторой последовательности $\{t_k\}$ положительных чисел имеем $t_k \rightarrow 0$ и $f(it_k) > 1$. Пусть t_k — некоторая из этих точек, достаточно близкая к точке 0 . Рассмотрим отрезок $[it_k, at_k]$. Значения функции f на концах этого отрезка расположены по разные стороны от точки 1 . Поэтому внутри этого отрезка найдется такая точка z , что $f(z) = 1$. Точка $a - z$ попадет внутрь указанного выше треугольника. С бисегмента $[0, z] \cup [a - z, a]$ наша функция будет продолжаться до положительно определенной (так как ее значение в точке 0 максимально на этом бисегменте). Так как $f(z) = f(0)$, то z будет периодом продолжения. Но тогда получится, что $f(a - z) = 1$. Однако точка $a - z$ расположена строго внутри треугольника, а там значения функции f строго меньше, чем 1 . Полученное противоречие означает, что такой последовательности t_k нет и, стало быть, $f(it) \leq 1$ при всех достаточно малых положительных t . Аналогично, но с заменой a на $\bar{a}$, устанавливается, что и $f(-it) \leq 1$. Наконец, в этой ситуации из принципа максимума вытекает, что f не меняется на отрезке $[-it, it]$, так как $f(0) = 1$.

Таким образом, если две первых возможности не реализуются, то реализуется последняя. $\square$

Следствие 1. *Предположим, что на отрезке $[-1, 1]$ выполняются условия $f(-1) < 1$, $f(0) = 1$, $f(1) > 1$. Тогда существует такое $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, что $f|_{[0, w]} = 1$.*

Действительно, на открытой верхней и открытой нижней полуокружностях найдется по точке, в которой f принимает значение 1 . $\square$

Следствие 2. *Предположим, что выполняются условия предыдущего следствия. Пусть $f(a) < 1$ в некоторой точке a вещественной оси. Тогда через*

точку a проходит (наклонная) прямая l , во всех точках z которой $f(z) = f(a)$.

Доказательство. Выберем точку w в соответствии со следствием 1 и проведем через точку a прямую l в направлении вектора w . Пусть $l' \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in l \mid f(z) < 1\}$. Тогда l' — (относительно) открытое множество в l . Пусть (b, c) — составляющий интервал множества l' , содержащий точку a .

Если $|b| \neq \infty$, то рассмотрим (небольшой) отрезок $[b, a + \theta \cdot (b - a)]$, $0 < \theta < 1$, длины $\leq |z|$. Рассмотрим бисегмент, составленный из этого отрезка и отрезка $[0, \varepsilon w]$, $\varepsilon > 0$, той же длины. Стандартная редукция с этого бисегмента будет положительно определенной функцией, равной 1 всюду на отрезке $[0, \varepsilon w]$. Но тогда $f(b) = f(a + \theta \cdot (b - a)) < 1$, т.е. $b \in l'$, и возникает противоречие. Следовательно, $|b|$ не может быть конечным. Ясно, что и $|c|$ не может быть конечным. $\square$

Теперь мы можем считать, что на вещественной оси $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ имеем $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Допустим, что $f(a) < 1$ в вещественной точке, и выберем отрезок прямой, указанной в следствии 2, далеко справа. Мораль: *через точки вещественной оси проходит семейство параллельных прямых, на каждой из которых f не меняется.* Иначе говоря, можно так линейно преобразовать систему координат, чтобы f не зависела от одной из (новых) координат.

Теперь мы снимем условие $f \geq 0$ и положим $g = |f|^2$. Снова допустим, что $g(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +\infty$, тогда как $g(iy) = \text{const}$.

Фиксируем некоторое $a > 0$ и выберем такое $b > 0$, чтобы иметь $g(a) < g(b)$. На вертикальных прямых функция f высекает функции, кратные характерам. Рассмотрим функцию $f(z)/f(b + iy)$. Такая функция вместе с f принадлежит рассматриваемому классу. Ее значения на прямой $x = b$ равны 1, тогда как на прямой $x = a$ строго меньше, и поэтому функция не меняется на этой прямой. Поэтому высекающиеся характеры можно считать совпадающими (мы имеем в виду, что $\underline{m}(|f|)$ может оказаться нетривиальным, а f — нулевой на этом множестве). $\square$

§6. Общие связанные группы

Мы снова будем молчаливо предполагать, что $f \geq 0$. Общий случай сводится к этому практически так же, как и при $n = 2$. Как всегда, предполагается выполненным условие, связанное с бисегментами.

При рассмотрении функции f на векторных пространствах в основном используются два следующих элементарных свойства функций рассматриваемого класса.

(а) *Через каждую точку в каждой двумерной плоскости проходит прямая, на которой f имеет постоянное значение.*

(б) *Если через точку проходят две такие прямые, то f имеет постоянное значение на всей плоскости.*

Пусть l_1 и l_2 — пара параллельных прямых на плоскости. Из (а) и (б) вытекает:

(с) *Если $f|_{l_1} = \text{const}$, то и $f|_{l_2} = \text{const}$.*

Действительно, выберем какую-нибудь точку $a \in l_2$. По условию (а) через точку a проходит такая прямая l_3 , что $f|_{l_3} = \text{const}$. Если $l_2 \neq l_3$, то $l_1 \cap l_3 = \{\text{точка}\}$, но тогда f не меняется во всей плоскости. $\square$

Для наглядности рассмотрим $\mathbb{R}^3$. Легко видеть, что через каждую точку теперь проходит плоскость, на которой f не меняется. Если f не сводится к константе, то можно считать, что все такие плоскости ортогональны одной из осей координат, и т.д. $\square$

Эта «линейная алгебра» легко распространяется в категорию вещественных векторных пространств (легче всего — при помощи принципа максимальности Хаусдорфа). Для получения топологических вариантов пространство следует считать локально выпуклым. С другой стороны, в вещественных пространствах (Дэя) $L^p(0, 1)$ с $0 < p < 1$ много непрерывных положительно определенных функций, например,

$$f(x) = \int_0^1 e^{ix(t)} dt,$$

но ни непрерывных линейных функционалов, ни непрерывных характеров, ни чего-то похожего на непрерывные «универсальные символы», кроме констант, нет.

По существу нам остается рассмотреть связные компактные абелевы группы (чтобы убедиться, что там дело ограничивается кратными характеров).

Предположим теперь, что X — связная компактная (абелева) группа. Пусть f — непрерывная функция на X , для которой $|f(x)| \leq f(0) = 1$ для всех $x \in X$, имеющая стандартную редукцию с каждого бисегмента. Мы докажем, что f — характер.

Для этого напомним, что однопараметрической подгруппой называется образ в группе непрерывного гомоморфизма вещественной оси.

Пусть Y — объединение всех однопараметрических подгрупп в X . Известно (см., например, [2, гл. 2, §2, упр.4] или [8, гл. 6, §25, (25.20)]), что Y всюду плотно в X (это обстоятельство фактически — критерий связности).

Мы используем также тот факт, что f имеет представление $\chi \cdot \exp ig$, где χ — характер, а g — вещественная непрерывная функция, однозначно определенная условием $g(0) = 0$ (см., например, [9]).

Пусть Z — однопараметрическая подгруппа. Из одномерных соображений, связанных со стандартной редукцией, вытекает, что $f|_Z$ индуцирует характер χ_Z на $\mathbb{R}$. Вместе с тем мы можем «провести через Z на $\mathbb{R}$ » и представление $\chi \cdot \exp ig$. Допуская вольность в обозначениях, мы можем теперь записать равенство $\chi_Z \cdot \bar{\chi} = ig$ на $\mathbb{R}$. Ввиду непрерывности отсюда следует, что g — аддитивный характер, причем непременно нулевой, так как функция g является ограниченной. Мораль: $\chi_Z = \chi$ на Z . Возвращаясь к началу, получаем, что $f = \chi$.

Сопоставляя установленные факты, мы получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть X — локально компактная абелева группа и f — символ. Тогда следующие условия эквивалентны.

- (а) Символ f универсальный.
- (б) Стандартная редукция символа f с каждого конечного подмножества имеет положительно определенное продолжение.
- (с) Стандартная редукция символа f с каждого бисегмента имеет положительно определенное продолжение.
- (d) Стандартная редукция символа f с каждого компакта имеет положительно определенное продолжение.
- (е) Символ f имеет представление

$$f = \chi \cdot f_1 \circ \varphi,$$

в котором χ — характер, f_1 — одномерный универсальный символ и φ — непрерывный аддитивный гомоморфизм в группу вещественных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*. In collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, and V. Tkachenko, Transl. Math. Monographs, vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [2] Н. Бурбаки, *Спектральная теория*, Мир, М., 1972.
- [3] Е. А. Горин, *Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии*, УМН, **33**:4 (202) (1978), 169–188.
- [4] С. Т. Норвидас, *Об устойчивости дифференциальных операторов в пространствах целых функций*, Докл. АН СССР, **291**:3 (1986), 548–551.
- [5] E. A. Gorin, *Universal symbols on locally compact Abelian groups*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **51**:2 (2003), 199–204.
- [6] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Interscience, New York, 1967.
- [7] Ю. И. Любич, В. И. Мацаев, Г. М. Фельдман, *О представлениях с отделимым спектром*, Функц. анализ и его прил., **7**:2 (1973), 52–61.
- [8] Э. Хьюитт, К. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. 1, Наука, М., 1975.
- [9] Е. А. Горин, *Функционально-алгебраический вариант теоремы Бора–ван Кампена*, Матем. сб., **82(124)**:2(6) (1970), 260–272.

Московский педагогический государственный
университет, математический факультет
e-mail: evgeny.gorin2012@gmail.com

Институт математики и информатики
Вильнюсского университета
e-mail: norvidas@gmail.com

Поступило в редакцию
29 августа 2012 г.