Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Мутафян, Б. Л. Фейгин, Квантовая тороидальная алгебра $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$: вычисление характеров некоторых представлений как производящих функций плоских разбиений, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 62–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:04:23

Квантовая тороидальная алгебра $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$: вычисление характеров некоторых представлений как производящих функций плоских разбиений*

© 2013. Г. С. МУТАФЯН, Б. Л. ФЕЙГИН

Доказана формула для производящей функции плоских разбиений $\{a_{i,j}\}$ с ограничением $a_{m,n} = 0$, являющейся характером неприводимого представления квантовой тороидальной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ в случае $K = q_1^m q_2^n$.

§1. Введение

В статье [1] исследовались представления квантовой тороидальной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$. Был выделен некоторый класс представлений (называемых представлениями Мак-Магона), базис которых индексируется плоскими разбиениями.

Определение 1.1. *Плоским разбиением* a *целого неотрицательного числа* N (или, иначе, *плоским разбиением веса* N) называется набор целых неотрицательных чисел $a_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3, \dots$, удовлетворяющих следующему условию:

(а) $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j} = N$ (введем обозначение $|a| = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$, т.е. будем писать $|a| = N$);

(б) $a_{i,j} \geq a_{i,j+1}$, $a_{i,j} \geq a_{i+1,j}$ для любых i, j .

Алгебра $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ зависит от трех комплексных параметров q_1, q_2, q_3 , связанных условием $q_1 q_2 q_3 = 1$, и двух параметров K_1, K_2 , называемых уровнями. В представлениях Мак-Магона, о которых идет речь, один из параметров полагается равным 1, а второй обозначается через K . В базисе, индексируемом плоскими разбиениями, действие образующих алгебры может быть указано явно. При общих значениях параметров это представление неприводимо. Простейший случай, когда оно становится приводимым, это когда параметры удовлетворяют соотношению $K = q_1^m q_2^n$, а в остальном — общие. В этом случае в неприводимом факторе базис задается плоскими разбиениями с условием $a_{m+1,n+1} = 0$.

В работе [1] высказана гипотеза о характере этого представления. В настоящей статье мы доказываем эту гипотезу. Гипотеза мотивирована тем, что фактор алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ по идеалу, существующему при условии $K = q_1^m q_2^n$, изоморфен эллиптической W -алгебре, ассоциированной с супералгеброй $\mathfrak{gl}(m, n)$. Поэтому естественно ожидать существования «бозонной» формулы для характера (т.е. формулы, напоминающей формулу Вейля для характеров представлений полупростых алгебр Ли).

*Работа Б. Л. Фейгина поддержана грантом РФФИ 12-01-00836-а, Русско-французским грантом 11-01-93105-НЦНИЛ-а и грантом РФФИ 12-01-00944-а «Геометрия многообразий Гизекера и теория представлений».

Приведем теперь явную формулировку доказываемого утверждения. Мы будем использовать обозначение $\sum_{\text{условие}} q^{|a|}$, подразумевая, что сумма берется по всем разбиениям a , удовлетворяющим заданному условию. Из сказанного следует, что характер упомянутого выше неприводимого фактора равен производящей функции

$$f_{m,n}(q) = \sum_{a_{m+1}, n+1=0} q^{|a|}.$$

В простейшем случае $m = 0$ эта функция задается известной из комбинаторики формулой Мак-Магона (см. [2]):

$$\sum_{a_1, n+1=0} q^{|a|} = \frac{1}{M_n}, \quad M_n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{\min(i, n)}.$$

В качестве гипотезы в [1] приведена явная формула для $f_{m,n}$, доказательство которой и является целью данной статьи:

Теорема 1.2. *Если $n \geq m \geq 1$, то*

$$f_{m,n} = \frac{1}{(Q_{\infty})^{m+n}} \sum_{k_1 \geq \dots \geq k_m \geq 0} \left((-1)^{\sum_{i=1}^m k_i} q^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (k_i^2 + (2i-1)k_i)} \right. \\ \left. \times \prod_{1 \leq i < j \leq m} (1 - q^{k_i - k_j + j - 1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - q^{k_i - k_j + j - i}) \right), \quad (1.1)$$

где $Q_{\infty} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)$ и мы считаем, что $k_j = 0$, если $j > m$.

Доказательство будет состоять из двух частей.

В комбинаторной части доказательства (§2) вычисление функции $f_{m,n}$ будет сведено к вычислению производящей функции разбиений с модифицированным весом. А именно, положим

$$|a|_m = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j} + m \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i}$$

и введем производящую функцию

$$g_{m,n}(q) = \sum_{a_{1,1} \leq n} q^{|a|_m}.$$

Целью комбинаторной части является доказательство равенства

$$f_{m,n}(q) = \frac{1}{M_m(q)} g_{m,n}(q), \quad (1.2)$$

Доказательство будет проведено прямым биективным методом. А именно, определим множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ следующим образом:

- $\mathfrak{A}$ — множество всех плоских разбиений $\{a_{i,j}\}$ с условием $a_{m+1, n+1} = 0$,
- $\mathfrak{B}$ — множество всех $\mathbb{N}$ -матриц b ширины m (т.е. наборов целых неотрицательных чисел $b_{i,j}$, $m \geq i \geq 1$, $j \geq 1$), вес которых вычисляется по формуле $|b| = \sum_{i,j} (i+j-1)b_{i,j}$,
- $\mathfrak{C}$ — множество всех плоских разбиений $\{c_{i,j}\}$, удовлетворяющих условиям $c_{1,1} \leq n$ и $c_{i,i} = c_{i+1,i} = \dots = c_{i+m,i}$ для любого i .

С помощью алгоритма RSK (см. разд. 2.1) каждое плоское разбиение $a \in \mathfrak{A}$ будет преобразовано в пару (b, c) , $b \in \mathfrak{B}$, $c \in \mathfrak{C}$, так, что $|a| = |b| + |c|$. Будет показано, что построенное отображение

$$\varphi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$$

является биекцией. Теперь (1.2) следует из очевидных равенств

$$\sum_{a \in \mathfrak{A}} q^{|a|} = f_{m,n}, \quad \sum_{b \in \mathfrak{B}} q^{|b|} = \frac{1}{M_m}, \quad \sum_{c \in \mathfrak{C}} q^{|c|} = g_{m,n}.$$

В алгебраической части доказательства методами теории представлений будет вычислена функция $g_{m,n}(q)$. Пусть π — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ со старшим весом $(\dots, n, n, 0, 0, \dots)$. Основная идея вычислений — представить $g_{m,n}$ как характер,

$$g_{m,n}(q) = \text{tr}(\mathcal{Q})|_{\pi'},$$

где π' — некоторое подпространство представления π , а затем построить комплекс (комплекс Кошуля), гомологии которого совпадали бы с π' . Тогда $g_{m,n}$ вычисляется как знакопеременная сумма характеров на компонентах комплекса (формула (3.30)).

Для определения пространства π' мы строим алгебру Клиффорда $\mathcal{C}$ с образующими $\psi_i^{(\alpha)}$, $\psi_i^{*(\alpha)}$ и соотношениями (3.15) и ее неприводимое представление $\mathcal{V}$, порожденное старшим вектором v (см. (3.17)). В этой алгебре выделяются коммутирующие подалгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$ и $\mathfrak{gl}(\infty)$. Относительно действия $\mathfrak{gl}(\infty)$ в представлении $\mathcal{V}$ выделяется подпредставление π . Если мы теперь «выкинем» из $\mathcal{C}$ образующие $\psi_i^{(\alpha)}$, $i = 0, \dots, m-1$, и рассмотрим пространство $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$, порожденное действием оставшихся образующих на старший вектор, то пространство π' представимо как $\pi' = \pi \cap \mathcal{V}'$.

Поскольку алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$ и $\mathfrak{gl}(n)$ коммутируют, пространство кратностей неприводимого представления $\mathfrak{gl}(\infty)$ является неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{gl}(n)$. По сути это утверждение — частный случай двойственности Хау (более точная формулировка приведена в теореме 3.1). В частности, отсюда следует, что пространство π совпадает с пространством инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ в $\mathcal{V}$.

Для построения комплекса Кошуля мы определяем алгебру $\mathcal{C} \otimes A$, где A — алгебра Вейля с образующими $a_i^{(\alpha)}$, $a_i^{*(\alpha)}$ и соотношениями (3.23), и представление $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ этой алгебры. В алгебре $\mathcal{C} \otimes A$ также выделяется подалгебра Ли $\mathfrak{gl}(n)$, и, следовательно, в представлении $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ можно рассматривать пространство инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}(n)$. Представление $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{U} = \bigoplus \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_s,$$

причем каждое $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_s$ инвариантно относительно $\mathfrak{gl}(n)$, и, следовательно, можно определить $\text{Inv}(s)$ — подпространство инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ в $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_s$. Вводя дифференциальный оператор $d: \text{Inv}(s) \rightarrow \text{Inv}(s-1)$, $d^2 = 0$, мы получаем комплекс (3.28), гомологии которого совпадают с π' , и формулу (3.30) для $g_{m,n}$. Дальнейшее вычисление сводится к применению двойственности Хау для явного разложения пространства $\text{Inv}(s)$ (формула (3.31)) и использованию

стандартных формул для характеров неприводимых представлений в главной градуировке.

§2. Комбинаторная часть

Везде в дальнейшем при изображении матриц и разбиений в виде числовых таблиц мы будем считать, что первый индекс нумерует строки сверху вниз, а второй — столбцы слева направо.

Цель этого параграфа — установить биекцию между множествами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, определенными во введении, доказать формулу (1.2) и тем самым свести вычисление функции $f_{m,n}$ к вычислению функции $g_{m,n}$.

Для этой цели мы рассмотрим плоское разбиение $a \in \mathfrak{A}$, но посмотрим на него «с другой стороны». А именно, рассмотрим диаграмму плоского разбиения, т. е. заменим каждое $a_{i,j}$ на «башню» из $a_{i,j}$ кубиков. Направим оси координат x, y вдоль границ исходного разбиения, а ось z вдоль высоты башен. Тогда разбиение $\{a_{i,j}\}$ можно рассматривать как проекцию получившейся диаграммы на плоскость (x, y) . При этом в каждой клетке пишется число, равное количеству спроектированных туда кубиков. Будем обозначать такое разбиение через $a^{(z)}$, подразумевая, что это есть проекция некоторой диаграммы вдоль оси z . Если мы теперь смотрим на ту же диаграмму «с другой стороны», например, вдоль оси y , это означает, что мы проектируем диаграмму на плоскость (z, x) и тем самым получаем новое плоское разбиение $a^{(y)}$. Аналогично $a^{(x)}$ — проекция на плоскость (y, z) . Иногда мы будем опускать верхний индекс в тех случаях, когда это не может привести к неоднозначности. Приведем в качестве примера три проекции $a^{(x)}, a^{(y)}, a^{(z)}$ одной и той же диаграммы:

$$a^{(z)} = \begin{array}{cccc} & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & \\ 3 & 1 & & & \end{array}, \quad a^{(y)} = \begin{array}{ccc} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & \end{array}, \quad a^{(x)} = \begin{array}{ccccc} & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & & & \\ 2 & 2 & & & & \\ 2 & 2 & & & & \end{array}.$$

Итак, пусть $a^{(z)} \in \mathfrak{A}$, т. е. выполнено условие $a_{m+1,n+1}^{(z)} = 0$. Тогда для разбиения $a^{(y)}$ выполнено условие $a_{1,m+1}^{(y)} \leq n$. То есть если обозначить через $\mathfrak{A}'$ множество разбиений $\{a_{i,j}\}$, удовлетворяющих условию $a_{1,m+1} \leq n$, то между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ имеется биекция, которая, очевидно, сохраняет вес разбиения.

Теорема 2.1. Пусть плоское разбиение $\{a_{i,j}\}$ удовлетворяет условию $a_{1,m+1} \leq n$, т. е. $a \in \mathfrak{A}'$. С помощью алгоритма RSK можно «разобрать» его в пару (b, c) , $b \in \mathfrak{B}$, $c \in \mathfrak{C}$. Это отображение является биекцией, т. е. любую пару $(b, c) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ можно получить таким способом из единственного разбиения $a \in \mathfrak{A}'$.

В разд. 2.1 мы коротко напомним алгоритм RSK в формулировке, необходимой для наших целей. Затем в разд. 2.2 мы применим его к разбиениям с ограничением $a_{1,m+1} \leq n$ и докажем теорему 2.1.

2.1. Алгоритм RSK. Мы приведем здесь описание алгоритма RSK в том виде, как он применяется при доказательстве формулы Мак-Магона, а также перечислим без доказательства некоторые свойства этого алгоритма. Поскольку подробное описание алгоритма можно найти в литературе (например, в [2]), мы приведем лишь общую схему, не вдаваясь в детали.

Определение 2.2. $\mathbb{N}$ -матрицей веса N (или, для краткости, просто матрицей веса N) будем называть набор целых неотрицательных чисел $b_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots$, такой, что $\sum_{i,j=1}^{\infty} (i+j-1)b_{i,j} = N$. Так же, как для разбиений, вес матрицы будем обозначать через $|b|$, т.е. $|b| = \sum_{i,j=1}^{\infty} (i+j-1)b_{i,j}$.

Традиционный алгоритм RSK преобразует произвольную $\mathbb{N}$ -матрицу в пару обратных полустандартных таблиц Юнга одинаковой формы, которые затем «склеиваются» в плоское разбиение. Мы будем также использовать обозначение RSK^{-1} для обратного алгоритма, преобразующего пару обратных полустандартных таблиц Юнга в $\mathbb{N}$ -матрицу.

Определение 2.3. Пусть $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$. Обратной полустандартной таблицей Юнга (для краткости, просто таблицей Юнга) формы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ называется набор целых положительных чисел $P_{i,j}$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, \lambda_i$, такой, что $P_{i,j} > P_{i+1,j}$, $P_{i,j} \geq P_{i,j+1}$. Будем писать $|P| = N$, если $\sum P_{i,j} = N$. Таким образом, P — таблица чисел, строго убывающих по столбцам и нестрого убывающих по строкам. Строки имеют длину (сверху вниз) $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Если имеется плоское разбиение $\{a_{i,j}\}$, то ему ставится в соответствие пара таблиц Юнга (P, Q) одинаковой формы следующим образом: положим $\lambda_i = a_{i,i}$. Если $j \leq \lambda_i$, то выберем наибольшее t , при котором $j \leq a_{i,i+t}$, и положим $P_{i,j} = t+1$. Аналогично выберем наибольшее s , при котором $j \leq a_{i+s,i}$, и положим $Q_{i,j} = s+1$. При этом очевидно, что $|a| = |P| + |Q| - \sum \lambda_i$. Будем писать $a \leftrightarrow (P, Q)$. Приведем в качестве примера плоское разбиение и соответствующие ему таблицы Юнга:

$$a \leftrightarrow (P, Q): \quad a = \begin{array}{cccc} & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ & 4 & 2 & 1 & 1 & \\ & 2 & 2 & & & \\ & 1 & & & & \end{array}, \quad P = \begin{array}{cccc} & 5 & 5 & 3 & 1 \\ & 3 & 1 & & \end{array}, \quad Q = \begin{array}{cccc} & 4 & 3 & 2 & 2 \\ & 2 & 2 & & \end{array}.$$

Таким образом, любое преобразование пары (P, Q) эквивалентно некоторому преобразованию соответствующего плоского разбиения.

Пусть имеются две таблицы Юнга (P, Q) одинаковой формы и матрица b .

Определение 2.4. Один шаг алгоритма RSK^{-1} состоит в преобразовании $(P, Q, b) \rightarrow (P', Q', b')$ в результате последовательного выполнения следующих действий:

1. В таблице P находим наименьшее положительное число. Если их несколько, берем стоящее в самом правом столбце. Пусть это число k , стоящее в клетке (i, j) .

2. В таблице Q рассмотрим число, стоящее в клетке (i, j) . Произведем с ним действие, обратное действию строчной вставки. В результате из Q будет удалено некоторое число s , остальные числа перераспределятся, и мы получим новую таблицу Q' , такую, что $Q'_{i,j} = 0$. (Детальное описание данной процедуры можно найти в [2].)

3. Положим $P_{i,j} = 0$, не изменяя остальных чисел таблицы P . Новую таблицу обозначим через P' .

4. Добавим единицу к $b_{k,s}$ и получившуюся матрицу обозначим через b' .

Введем линейное упорядочение на парах индексов (i, j) так, что

$$(i, j) < (i', j'), \text{ если } i < i' \text{ или } i = i' \text{ и } j < j'. \quad (2.1)$$

Пусть имеются две таблицы Юнга (P', Q') одинаковой формы и матрица b' .

Определение 2.5. Один шаг алгоритма RSK состоит в преобразовании $(P', Q', b') \rightarrow (P, Q, b)$ в результате последовательного выполнения следующих действий:

1. В матрице b' находим наибольшую пару (k, s) (в смысле введенного выше упорядочения), при которой $b'_{k,s} \neq 0$, и вычтем 1 из $b'_{k,s}$. Обозначим через b получившуюся матрицу.

2. Вставим число s в таблицу Q' методом строчной вставки. Получившуюся таблицу обозначим через Q .

3. Впишем число k в таблицу P' так, чтобы новая таблица и Q имели одинаковую форму, и обозначим эту новую таблицу через P .

Очевидно, что $|P| + |Q| + |b| = |P'| + |Q'| + |b'|$.

Приведем без доказательства несколько свойств алгоритмов RSK и RSK^{-1} .

Лемма 2.6. Если применять RSK к произвольной тройке (P', Q', b') , то получившаяся в результате таблица Q снова будет обратной полустандартной таблицей Юнга.

Важно отметить, что для таблицы P это не всегда верно.

Лемма 2.7. При последовательном выполнении нескольких шагов алгоритма RSK равные числа вставляются в таблицу P строго слева направо. То есть если число k было вставлено в столбец i , а на следующем шаге — в столбец j , то $j > i$.

Лемма 2.8. Пусть мы два раза подряд применили шаг алгоритма RSK^{-1} к тройке (P, Q, b) . В первый раз единица прибавлялась к элементу с индексами (i, j) , а во второй раз — к элементу с индексами (i', j') . Тогда $(i, j) \leq (i', j')$. То есть заполнение матрицы b идет в порядке возрастания индексов.

2.2. Условие $a_{1,m+1} \leq n$. Теперь мы можем построить биекцию $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Поскольку алгоритм RSK оперирует не с плоскими разбиениями, а с парами таблиц Юнга, следует переформулировать множества $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{C}$ в терминах таких пар. А именно:

- Если $a \leftrightarrow (P, Q)$, то условие $a_{1,m+1} \leq n$ эквивалентно условию $P_{1,n+1} \leq m$, поэтому везде ниже мы множество пар (P, Q) с таким условием также обозначаем через $\mathcal{A}'$.

- Если $c \leftrightarrow (P, Q)$, то условие $c_{1,1} \leq n$ эквивалентно условию, что в каждой таблице P, Q не более n столбцов, а условие, что $c_{i,i} = c_{i+1,i} = \dots = c_{i+m,i}$ для любого i , эквивалентно условию, что таблица P либо пуста, либо все ее элементы больше m . Ниже мы множество пар (P, Q) с такими условиями также обозначаем через $\mathcal{C}$.

Кроме того, мы будем обозначать символом $\mathbf{0}$ пустую $\mathbb{N}$ -матрицу (т.е. матрицу, все элементы которой равны 0).

Пусть $(P, Q) \in \mathfrak{A}'$. Рассмотрим тройку $(P, Q, \mathbf{0})$ и начнем пошагово применять к ней алгоритм RSK^{-1} . Непосредственно из определения алгоритма следует, что числа из матрицы P будут удаляться в порядке возрастания. Будем повторять шаги алгоритма до тех пор, пока в таблице P есть хотя бы одно число, не превосходящее m . В момент остановки мы получим тройку $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{b})$, причем таблица $\tilde{P}$ либо пуста, либо все числа в ней больше m . В исходной таблице P выполнялось условие $P_{1,n+1} \leq m$, откуда следует, что в таблице $\tilde{P}$ (а значит, и в $\tilde{Q}$) не более n столбцов. Таким образом, $(\tilde{P}, \tilde{Q}) \in \mathfrak{C}$. Далее, по определению алгоритма при удалении числа k из таблицы P увеличивается на единицу число в k -й строке матрицы $\tilde{b}$. Следовательно, в получившейся матрице $\tilde{b}$ все ненулевые числа расположены в первых m строках, т.е. $\tilde{b} \in \mathfrak{B}$.

Таким образом, мы построили соответствие $(P, Q) \rightarrow (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{b})$ для произвольной пары $(P, Q) \in \mathfrak{A}'$, тем самым задав отображение

$$\varphi: \mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}. \quad (2.2)$$

Пусть теперь $(\tilde{P}, \tilde{Q}) \in \mathfrak{C}$, $\tilde{b} \in \mathfrak{B}$. Будем применять шаги алгоритма RSK к тройке $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{b})$ до тех пор, пока не обнулится матрица $\tilde{b}$. В результате мы получим тройку $(P, Q, \mathbf{0})$. Несложно показать, используя леммы 2.6–2.8, что таблицы P и Q будут обратными полустандартными таблицами Юнга, причем $(P, Q) \in \mathfrak{A}'$. Таким образом, определено отображение

$$\psi: \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{A}'.$$

Из определения отображений и леммы 2.8 следует, что ψ и φ — взаимно обратные отображения, что доказывает их биективность.

Итак, мы доказали, что (2.2) является биекцией, тем самым доказав теорему 2.1.

§3. Алгебраическая часть

В этом параграфе мы будем обозначать через $w_k = (\dots, 1, 1, 0, 0, \dots)$ (нули начинаются с k -го места) старший вес неприводимого представления алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$. Неприводимое представление алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$ со старшим весом $w_{k_1} + \dots + w_{k_n}$ будем обозначать через $\pi_{k_1, \dots, k_n}$. В частности, пространство π , упомянутое во введении, будет обозначаться через $\pi_{0, \dots, 0}$. Неприводимое представление алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ со старшим весом $(k_1, \dots, k_n)$ будем обозначать через $\rho_{k_1, \dots, k_n}$.

В предыдущем параграфе была доказана формула (1.2) и исходная задача была сведена к вычислению производящей функции $g_{m,n}(q) = \sum_{c|c_{1,1} \leq n} q^{|c|_m}$. В оставшейся части статьи мы вычислим эту функцию, используя методы теории представлений. Основные идеи вычисления описаны во введении. Приведем краткий план дальнейшего текста.

Сначала в разд. 3.1 мы напомним основные факты из теории представлений алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$ и представляем функцию $g_{m,n}$ как характер в некоторой специальной градуировке на стандартном представлении $\pi_{0, \dots, 0}$ (формула (3.14)).

В разд. 3.2 определяется алгебра Клиффорда $\mathcal{C}$ и ее представление $\mathcal{V}$. В алгебре $\mathcal{C}$ выделяются две коммутирующие подалгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$ и $\mathfrak{gl}(\infty)$, при

этом представление $\pi_{0,\dots,0}$ алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$ совпадает с пространством инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ (теорема 3.1).

В разд. 3.3 мы определяем подпространство π' представления $\pi_{0,\dots,0}$ и записываем $g_{m,n}$ как характер в главной градуировке на пространстве π' (формула (3.22))

В разд. 3.4 определяется расширенная алгебра $\mathcal{C} \otimes A$ и ее представление $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$. В этой алгебре также выделяется подалгебра Ли $\mathfrak{gl}(n)$.

В разд. 3.5 построен комплекс Кошуля, в котором затем рассматривается подкомплекс $\mathfrak{gl}(n)$ -инвариантов. Функция $g_{m,n}$ представлена в виде знакопеременной суммы характеров на компонентах подкомплекса (формула (3.30)).

Наконец, в разд. 3.6 мы находим $\text{Inv}(s)$ как тензорное произведение стандартных представлений и получаем явную формулу для $g_{m,n}$, которая вместе с (1.2) доказывает (1.1).

3.1. Необходимые сведения из теории представлений алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$.

Пусть имеется неприводимое представление $\pi_{k_1,\dots,k_n}$ алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$, где $k_1 \geq \dots \geq k_n$. Из общей теории (см., например, [3]) известно, что в конечномерных представлениях алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ можно выделить базис, индексируемый таблицами Гельфанда–Цейтлина и состоящий из весовых векторов. Аналогично конечномерному случаю в представлении $\pi_{k_1,\dots,k_n}$ можно выделить базис, индексируемый таблицами целых неотрицательных чисел $C_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, с выполнением следующих условий:

$$C_{i,j} = n \quad \text{при } j \leq 0 \text{ или } i \leq -k_1, \quad (3.1)$$

$$C_{i,1} = 0 \quad \text{при некотором } i, \quad (3.2)$$

$$C_{i,j} \geq C_{i+1,j}, \quad C_{i,j} \geq C_{i,j+1}, \quad (3.3)$$

$$E_{ii}x = \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} (C_{t-i,t} - C_{t-i,t+1}) \right) x, \quad (3.4)$$

$$\exists j_0 : C_{i,j} = n - s \quad \text{при } j > j_0 \text{ и } -k_s < i \leq -k_{s+1}, \quad s = 1, \dots, n. \quad (3.5)$$

В последнем условии считаем, что $-k_{n+1} = +\infty$.

Область $i > -k_1$, $j > 0$ матрицы $C_{i,j}$ представляет собой плоское разбиение высоты не более n с дополнительно поставленной «трибуной», т. е. ступеньками высоты $n - s$ и ширины $k_s - k_{s+1}$, $s = 1 \dots n - 1$. Будем писать

$$|C| = \sum_{j>0} \sum_{s=1}^n \sum_{i=-k_s+1}^{-k_{s+1}} (C_{i,j} - (n - s)).$$

То есть $|C|$ показывает отклонение C от «минимального» плоского разбиения (соответствующего старшему вектору). Определим оператор

$$\mathcal{E} = \sum_{i \geq 0} i E_{ii} + \sum_{i < 0} i (E_{ii} - n).$$

Несложно проверить справедливость следующих утверждений:

- для любого $x \in \pi_{k_1,\dots,k_n}$ $E_{tt}x \neq 0$ лишь при конечном количестве индексов $t > 0$ и $(E_{tt} - n)x \neq 0$ лишь при конечном количестве индексов $t < 0$. Следовательно, оператор $\mathcal{E}$ корректно определен.

• Если x — вектор из «базиса плоских разбиений», которому соответствует матрица $C_{i,j}$, и при этом $k_1 \leq 0$, то

$$\mathcal{E}x = \left(|C| + \sum_{s=1}^n \frac{k_s(k_s - 1)}{2} \right) x.$$

Пусть $T_{k_1, \dots, k_n}(q) = \sum_C q^{|C|}$, где сумма берется по всем матрицам C , удовлетворяющим условиям (3.1)–(3.5). Тогда очевидно, что

$$\mathrm{tr}(q^{\mathcal{E}}) \big|_{\pi_{k_1, \dots, k_n}} = q^{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^n k_s^2 - k_s} T_{k_1, \dots, k_n}(q). \quad (3.6)$$

Явный вид выражения в правой части известен из теории представлений, так как это есть характер неприводимого представления алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$ в главной градуировке. Функция T может быть найдена также и комбинаторными методами, с помощью алгоритма RSK и формулы крюков. В дальнейшем явный вид этой функции понадобится, поэтому приведем его здесь:

$$T_{k_1, \dots, k_n}(q) = \frac{1}{M_n} G_{k_1, \dots, k_n}, \quad (3.7)$$

где $G_{k_1, \dots, k_n}$ — производящая функция для таблиц Гельфанда–Цейтлина с весом $(k_1, \dots, k_n)$:

$$G_{k_1, \dots, k_n} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1 - q^{k_i - k_j + j - i}}{1 - q^{j - i}}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим частный случай — представление $\pi_{0, \dots, 0}$. В этом случае условия (3.1)–(3.5) запишутся следующим образом:

$$C_{i,j} = n \quad \text{при } (j \leq 0 \text{ или } i \leq 0), \quad (3.9)$$

$$C_{i,1} = 0 \quad \text{при некотором } i, \quad (3.10)$$

$$C_{1,j} = 0 \quad \text{при некотором } j, \quad (3.11)$$

$$E_{tt}x = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (C_{i-t,i} - C_{i-t,i+1}) \right) x, \quad (3.12)$$

$$C_{i,j} \geq C_{i+1,j}, \quad C_{i,j} \geq C_{i,j+1}. \quad (3.13)$$

Область $i > 0, j > 0$ матрицы $C_{i,j}$ представляет собой обычное плоское разбиение высоты не более n (т. е. с условием $C_{1,1} \leq n$). Определим оператор

$$\mathcal{E}_m = \sum_{i \geq 0} (i + m) E_{ii} + \sum_{i < 0} i (E_{ii} - n).$$

Несложно проверить, что если x — вектор из «базиса плоских разбиений», которому соответствует матрица $C_{i,j}$, то

$$\mathcal{E}_m x = \left(|C| + m \sum_{i > 0} C_{i,i} \right) x.$$

Отсюда непосредственно следует представление функции $g_{m,n}$ в виде характера:

$$g_{m,n}(q) = \mathrm{tr}(q^{\mathcal{E}_m}) \big|_{\pi_{0, \dots, 0}}. \quad (3.14)$$

3.2. Алгебра $\mathcal{C}$ и ее представление. Пусть алгебра Клиффорда $\mathcal{C}$ порождена элементами $\psi_i^{(\alpha)}, \psi_i^{*(\alpha)}, i \in \mathbb{Z}, \alpha = 1, \dots, n$, и соотношениями

$$[\psi_i^{(\alpha)}, \psi_j^{(\beta)}]_+ = [\psi_i^{*(\alpha)}, \psi_j^{*(\beta)}]_+ = 0, \quad [\psi_i^{(\alpha)}, \psi_j^{*(\beta)}]_+ = \delta_{-i,j} \delta_{\alpha,\beta}. \quad (3.15)$$

Ее подалгебру, порожденную элементами $\psi_i^{(\alpha)}, \psi_i^{*(\alpha)}$ при фиксированном α , будем обозначать через $\mathcal{C}^{(\alpha)}$. Очевидно, что $\mathcal{C} = \prod_{\alpha=1}^n \mathcal{C}^{(\alpha)}$. Пусть $\Gamma_k^{(\alpha)}$ — множество элементов $\gamma^{(\alpha)}$ вида

$$\gamma^{(\alpha)} = \psi_{i_r}^{(\alpha)} \dots \psi_{i_2}^{(\alpha)} \psi_{i_1}^{(\alpha)} \psi_{j_1}^{*(\alpha)} \dots \psi_{j_s}^{*(\alpha)}, \quad (3.16)$$

$$0 \geq i_1 > \dots > i_r, \quad 0 > j_1 > \dots > j_s, \quad r - s = k.$$

Положим

$$\Gamma^{(\alpha)} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma_k^{(\alpha)}, \quad \Gamma = \prod_{\alpha=1}^n \Gamma^{(\alpha)}, \quad \Gamma_{k_1, \dots, k_n} = \prod_{\alpha=1}^n \Gamma_{k_\alpha}^{(\alpha)}.$$

Отсюда следует, что $\Gamma = \bigcup_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} \Gamma_{k_1, \dots, k_n}$.

Построим представление алгебры $\mathcal{C}$. Выберем порождающий вектор v и положим

$$\begin{cases} \psi_i^{(\alpha)} v = 0, & i > 0, \\ \psi_i^{*(\alpha)} v = 0, & i \geq 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

а остальные элементы пусть действуют свободно с учетом соотношений алгебры. Положим $\mathcal{V} = \mathcal{C}v$. Очевидно, что Γv — базис в $\mathcal{V}$ и имеет место разложение

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{k_1, \dots, k_n} \mathcal{V}_{k_1, \dots, k_n}, \quad (3.18)$$

где $\mathcal{V}_{k_1, \dots, k_n}$ — пространство с базисом $\Gamma_{k_1}^{(1)} \dots \Gamma_{k_n}^{(n)} v$.

Алгебра $\mathcal{C}$ содержит две подалгебры Ли с базисами

$$E_{ij} = \sum_{\alpha} \psi_{-i}^{\alpha} \psi_j^{*\alpha}, \quad i, j \in \mathbb{Z}, \quad (3.19)$$

$$h^{\alpha\beta} = \sum_i : \psi_{-i}^{\alpha} \psi_i^{*\beta} : = \sum_{i \geq 0} \psi_{-i}^{\alpha} \psi_i^{*\beta} - \sum_{i < 0} \psi_i^{*\beta} \psi_{-i}^{\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

Несложно проверить следующие факты:

- E_{ij} удовлетворяют стандартным соотношениям алгебры $\mathfrak{gl}(\infty)$.
- $h^{\alpha\beta}$ удовлетворяют стандартным соотношениям алгебры $\mathfrak{gl}(n)$.
- Все E_{ij} коммутируют со всеми $h^{\alpha\beta}$.
- Если $x \in \mathcal{V}_{k_1, \dots, k_n}$, то

$$h^{\alpha\beta} x = k_{\alpha} x, \quad h^{\alpha\beta} x \in \mathcal{V}_{k_1, \dots, k_{\alpha}+1, \dots, k_{\beta}-1, \dots, k_n},$$

• Вектор $v_{k_1, \dots, k_n} = (\prod_{i=1}^n \gamma_{k_i}^{(i)}) v$ является старшим относительно $\mathfrak{gl}(\infty)$ со старшим весом $w_{k_1} + \dots + w_{k_n}$, т.е. $U(\mathfrak{gl}(\infty))v_{k_1, \dots, k_n} \cong \pi_{k_1, \dots, k_n}$. (Здесь и далее $U(\mathfrak{g})$ обозначает универсальную обертывающую алгебры Ли $\mathfrak{g}$.)

• Если $k_1 \geq \dots \geq k_n$, то вектор $v_{k_1, \dots, k_n}$ — старший относительно $\mathfrak{gl}(n)$ с весом $(k_1, \dots, k_n)$, т.е. $U(\mathfrak{gl}(n))v_{k_1, \dots, k_n} \cong \rho_{k_1, \dots, k_n}$.

Предложение 3.1. Пусть $k_1 \geq \dots \geq k_n$. Множество всех старших векторов относительно $\mathfrak{gl}(n)$ с весом $(k_1, \dots, k_n)$ совпадает с $U(\mathfrak{gl}(\infty))v_{k_1, \dots, k_n}$. Множество всех старших векторов относительно $\mathfrak{gl}(\infty)$ с весом $w_{k_1} + \dots + w_{k_n}$ совпадает с $U(\mathfrak{gl}(n))v_{k_1, \dots, k_n}$.

Иными словами, относительно действия $\mathfrak{gl}(\infty) + \mathfrak{gl}(n)$ имеет место разложение

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{k_1 \geq \dots \geq k_n} \pi_{k_1, \dots, k_n} \otimes \rho_{k_1, \dots, k_n}. \quad (3.21)$$

В частности, пространство $\mathfrak{gl}(\infty)v$ совпадает с пространством $\mathfrak{gl}(n)$ -инвариантов.

Это утверждение является частным случаем двойственности Хау. Доказательство можно найти в [4].

3.3. Оператор «сдвига» и иная интерпретация $g_{m,n}$. Формула (3.14) выражала $g_{m,n}$ как характер стандартного представления $\pi_{0, \dots, 0}$ в неглавной градуировке. Теперь, используя определенное выше представление $\mathcal{V}$, мы выразим $g_{m,n}$ как характер в главной градуировке на некотором специальном подпространстве $\pi' \subset \pi_{0, \dots, 0}$.

Определим оператор $p: \Gamma \rightarrow \Gamma$ следующим образом. Если $\gamma^{(\alpha)}$ — элемент вида (3.16), то

$$p(\gamma^{(\alpha)}) = \psi_{i_r-m}^{(\alpha)} \dots \psi_{i_2-m}^{(\alpha)} \psi_{i_1-m}^{(\alpha)} \psi_{j_1}^{*(\alpha)} \dots \psi_{j_s}^{*(\alpha)}.$$

Если $\gamma \in \Gamma$, $\gamma = \prod_{\alpha} \gamma^{(\alpha)}$, то $p(\gamma) = \prod_{\alpha} p(\gamma^{(\alpha)})$.

Действие p естественно переносится на $\mathcal{V}$. А именно, если $x = \gamma v$, то $p(x) = p(\gamma)v$. На остальных x определим p по линейности. Очевидно, что все $\mathcal{V}_{k_1, \dots, k_n}$ инвариантны относительно p . Неформально можно сказать, что оператор p «сдвигает» все отрицательные индексы у $\psi^{(\alpha)}$ на $-m$, однако не трогает положительные индексы и не трогает $\psi_i^{*(\alpha)}$.

Лемма 3.2. $x \in \pi_{0, \dots, 0} \iff p(x) \in \pi_{0, \dots, 0}$.

Доказательство. Мы докажем, что оператор p коммутирует с операторами, определенными в (3.20) и, тем самым, коммутирует с $\mathfrak{gl}(n)$. Достаточно проверить это для элементов вида $x = \gamma v$, $\gamma \in \Gamma$. Для таких x легко проверяется, что

$$\text{если } i < 0, \text{ то } \psi_i^{*\beta} \psi_{-i}^{\alpha} p(x) = p(\psi_i^{*\beta} \psi_{-i}^{\alpha} x),$$

$$\text{если } 0 \leq i < m, \text{ то } \psi_{-i}^{\alpha} \psi_i^{*\beta} p(x) = 0,$$

$$\text{если } i \geq m, \text{ то } \psi_{-i}^{\alpha} \psi_i^{*\beta} p(x) = p(\psi_{-i+m}^{\alpha} \psi_{i-m}^{*\beta} x).$$

Из этих равенств и из явного вида $h^{\alpha\beta}$ следует перестановочность p и $\mathfrak{gl}(n)$. Теперь утверждение сразу следует из того факта, что $\pi_{0, \dots, 0}$ совпадает с пространством инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}(n)$. $\square$

Лемма 3.3.

$$\forall x \in \mathcal{V}: \quad E_{ii}p(x) = \begin{cases} p(E_{ii}x), & \text{если } i < 0, \\ 0, & \text{если } 0 \leq i < m, \\ p(E_{i-m, i-m}x), & \text{если } i \geq m. \end{cases}$$

Доказательство. Опять утверждение достаточно проверить для $x = \gamma v$, $\gamma \in \Gamma$. Для таких x имеем $E_{ii}x = kx$, где k — количество различных α , при которых $\psi_{-i}^{(\alpha)}$ присутствует в качестве множителя в γ . При действии p все $\psi_{-i}^{(\alpha)}$ переходят в $\psi_{-i-m}^{(\alpha)}$. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Положим $\pi' = p(\pi_{0,\dots,0})$, $\mathcal{V}' = p(\mathcal{V})$. Из леммы 3.2 следует, что $\pi' = \pi_{0,\dots,0} \cap \mathcal{V}'$. Пусть x — весовой вектор из $\pi_{0,\dots,0}$. Из леммы 3.3 следует, что $p(x)$ — весовой вектор из π' , такой, что если $\mathcal{E}_m x = k \cdot x$, то $\mathcal{E} p(x) = k \cdot p(x)$. Отсюда вытекает, что формула (3.14) для $g_{m,n}$ может быть записана в виде

$$g_{m,n}(q) = \text{tr}(q^{\mathcal{E}})|_{\pi'}. \quad (3.22)$$

Теперь мы опишем конструкцию расширенной алгебры $\mathcal{C} \otimes A$ и ее представление, с помощью которых пространство π' может быть представлено как гомологии некоторого комплекса (см. формулу (3.29)). Это позволит вычислить функцию $g_{m,n}$ явно как знакопеременную сумму стандартных характеров в главной градуировке на компонентах комплекса.

3.4. Алгебра $\mathcal{C} \otimes A$ и ее представление. Рассмотрим алгебру A с образующими $a_i^{(\alpha)}$, $a_i^{*(\alpha)}$, $i = 0, \dots, m-1$, $\alpha = 1, \dots, n$, и соотношениями

$$[a_i^{(\alpha)}, a_j^{(\beta)}] = [a_i^{*(\alpha)}, a_j^{*(\beta)}] = 0, \quad [a_i^{(\alpha)}, a_j^{*(\beta)}] = -\delta_{-i,j} \delta_{\alpha,\beta}. \quad (3.23)$$

Построим представление этой алгебры. Выберем порождающий вектор u и положим $a_i^{*(\alpha)}u = 0$ при всех i, α , а остальные элементы пусть действуют свободно с учетом соотношений алгебры. Пусть $\mathcal{U} = Au$, $\mathcal{U}_s \subset \mathcal{U}$ — линейная оболочка всех векторов вида $a_{i_1}^{(\alpha_1)} \dots a_{i_s}^{(\alpha_s)}u$. Очевидно, имеет место разложение

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{U}_s. \quad (3.24)$$

В алгебре A можно выделить две коммутирующие подалгебры Ли

$$\begin{aligned} \mathfrak{gl}(n) : \quad h^{\alpha\beta} &= \sum_i a_i^\alpha a_i^{*\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n, \\ \mathfrak{gl}(m) : \quad E_{ij} &= \sum_\alpha a_i^\alpha a_j^{*\alpha}, \quad i, j = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Если $x = \prod_{i,\alpha} (a_i^\alpha)^{c_{i,\alpha}} u$, то

$$h^{\alpha\alpha} x = \sum_i c_{i,\alpha} x, \quad E_{ii} x = \sum_\alpha c_{i,\alpha} x.$$

Предложение 3.4. Если $n \geq m$ и $(k_1, \dots, k_n)$ — старший вес неприводимого подпредставления алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ в $\mathcal{U}$, то все $k_i \geq 0$, причем $k_i = 0$ при $i > m$. Множество всех старших векторов веса $(k_1, \dots, k_n)$ образует неприводимое представление алгебры $\mathfrak{gl}(m)$ со старшим весом $(k_1, \dots, k_m)$.

Обратно, множество старших векторов относительно $\mathfrak{gl}(m)$ веса $(k_1, \dots, k_m)$ образует неприводимое $\mathfrak{gl}(n)$ -представление старшего веса $(k_1, \dots, k_m, 0, \dots, 0)$. Иными словами, относительно действия $\mathfrak{gl}(n) + \mathfrak{gl}(m)$ имеет место разложение

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{k_1 \geq \dots \geq k_m \geq 0} \rho_{k_1, \dots, k_m, 0, \dots, 0} \otimes \rho_{k_1, \dots, k_m}. \quad (3.25)$$

При этом градуировка (3.24) согласована с разложением (3.25), т. е. имеем разложение

$$\mathcal{U}_s = \bigoplus_{\substack{k_1 \geq \dots \geq k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = s}} \rho_{k_1, \dots, k_m, 0, \dots, 0} \otimes \rho_{k_1, \dots, k_m}. \quad (3.26)$$

Так же, как и предложение 3.1, это частный случай двойственности Хау. Доказательство можно найти в [4].

Далее мы рассматриваем тензорное произведение $\mathcal{C} \otimes A$ и его представление $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$. В этой алгебре также выделяется подалгебра Ли $\mathfrak{gl}(n)$:

$$h^{\alpha\beta} = \sum_i : \psi_{-i}^\alpha \psi_i^{*\beta} : + \sum_i a_i^\alpha a_i^{*\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (3.27)$$

Учитывая (3.18) и (3.24), можно написать разложение

$$\mathcal{V} \otimes \mathcal{U} = \sum_{s \geq 0} \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_s = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}, \\ s \geq 0}} \mathcal{V}_{k_1, \dots, k_n} \otimes \mathcal{U}_s,$$

причем легко видеть, что все $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_s$ инвариантны относительно $\mathfrak{gl}(n)$. Теперь мы определим оператор $\mathcal{Q}$, действующий в $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ по формуле

$$\mathcal{Q} = q^{\mathcal{E} + \mu}, \quad \text{где } \mu = \sum_{i=0}^{m-1} i E_{ii} \big|_{\mathcal{U}}.$$

Заметим, что $\mathcal{V} \cong \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_0$ и действие $\mathcal{Q}$ в $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_0$ эквивалентно действию $q^{\mathcal{E}}$ в $\mathcal{V}$. отождествляя $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_0$, мы можем записать формулу (3.22) в виде

$$g_{m,n} = \text{tr}(\mathcal{Q}) \big|_{\pi'}.$$

3.5. Дифференциал в комплексе и гомологии. В пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}$ введем оператор $d = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\alpha=1}^n \psi_{-j}^\alpha a_j^{*\alpha}$. Поскольку имеет место очевидное вложение $d(\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_s) \subset \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_{s-1}$, получаем последовательность отображений

$$0 \xleftarrow{d} \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_0 \xleftarrow{d} \mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_1 \xleftarrow{d} \dots \quad (3.28)$$

Непосредственно проверяются следующие утверждения.

- $d^2 = 0$, т. е. (3.28) задает комплекс $\mathfrak{k}$.
- Введя оператор гомотопии $\bar{d} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\alpha=1}^n \psi_{-j}^{*\alpha} a_j^\alpha$, получаем

$$d\bar{d} + \bar{d}d = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{\alpha=1}^n \psi_{-j}^{(\alpha)} \psi_{-j}^{*(\alpha)} + a_j^{(\alpha)} a_j^{*(\alpha)}.$$

Этот оператор действует нулем только на $\mathcal{V}' \otimes \mathcal{U}_0$. Отсюда следует, что $H_k(\mathfrak{k}) = 0$ при $k \neq 0$, $H_0(\mathfrak{k}) = \mathcal{V}' \otimes \mathcal{U}_0 = p(\mathcal{V}) \otimes \mathcal{U}_0$.

• Оператор d коммутирует с операторами, определенными в (3.27), а значит, и со всей $\mathfrak{gl}(n)$. Следовательно, этот оператор сужается на подпространство $\mathfrak{gl}(n)$ -инвариантов.

Поэтому, если обозначить через $\text{Inv}(s)$ подпространство $\mathfrak{gl}(n)$ -инвариантов в пространстве $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_s$, то получаем подкомплекс $\mathfrak{k}'$

$$0 \xleftarrow{d} \text{Inv}(0) \xleftarrow{d} \text{Inv}(1) \xleftarrow{d} \text{Inv}(2) \xleftarrow{d} \dots \quad (3.29)$$

Так же, как и для комплекса (3.28), имеем $H_k(\mathfrak{k}') = 0$ при $k > 0$. Однако теперь $H_0(\mathfrak{k}') = \pi'$ (напомним, что $\text{Inv}(0) = \pi_{0,\dots,0} \otimes \mathcal{U}_0$). Прямое вычисление показывает также, что d коммутирует с $\mathcal{Q}$. Из всего сказанного следует, что

$$g_{m,n} = \text{tr}(\mathcal{Q})|_{\pi'} = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \text{tr}(\mathcal{Q})|_{\text{Inv}(s)}. \quad (3.30)$$

3.6. Пространство $\text{Inv}(s)$ и окончательные вычисления. Согласно теореме 3.1, подпространство $\pi_{0,\dots,0} \otimes \mathcal{U}_0$ есть пространство инвариантов алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ в $\mathcal{V} \otimes \mathcal{U}_0$, т. е. в точности $\text{Inv}(0)$. Для нахождения $\text{Inv}(s)$ при произвольном s нам понадобится следующий факт, известный из общей теории представлений:

Пусть W_1 и W_2 — представления алгебры $\mathfrak{gl}(n)$, каждое из которых разлагается в прямую сумму неприводимых. Тогда подпространство инвариантов этой алгебры в тензорном произведении $W_1 \otimes W_2$ изоморфно прямой сумме:

$$\text{Inv} \cong \bigoplus_{\pi} \text{Hom}(\pi, W_1) \otimes \text{Hom}(\pi^*, W_2),$$

где сумма берется по всем конечномерным неприводимым представлениям π алгебры $\mathfrak{gl}(n)$, π^* — представление, двойственное к π , а $\text{Hom}(\pi, W_i)$ — пространство гомоморфизмов из π в W_i .

Из этого утверждения и из разложений (3.21), (3.26) следует, что

$$\text{Inv}(s) = \bigoplus_{\substack{k_1 \geq \dots \geq k_m \geq 0 \\ k_1 + \dots + k_m = s}} \pi_{0,\dots,0,-k_m,\dots,-k_1} \otimes \rho_{k_1,\dots,k_m}. \quad (3.31)$$

Здесь $\pi_{0,\dots,0,-k_m,\dots,-k_1}$ — неприводимое представление относительно действия $\mathfrak{gl}(\infty)$ в $\mathcal{V}$, а $\rho_{k_1,\dots,k_m}$ — неприводимое представление относительно действия $\mathfrak{gl}(m)$ в $\mathcal{U}_s$. Таким образом,

$$\text{tr}(\mathcal{Q})|_{\text{Inv}(s)} = \sum_{\substack{k_1 \geq \dots \geq k_m \geq 0 \\ k_1 + k_2 + \dots = s}} \left(\text{tr}(q^{\mathcal{E}})|_{\pi_{0,\dots,0,-k_m,\dots,-k_1}} \cdot \text{tr}(q^{\mu})|_{\rho_{k_1,\dots,k_m}} \right). \quad (3.32)$$

Для первого множителя в скобке явная формула приведена в (3.6)–(3.8), для второго множителя явная формула — обычный характер алгебры $\mathfrak{gl}(m)$ (та же формула (3.8)):

$$\text{tr}(q^{\mu})|_{\rho_{k_1,\dots,k_m}} = q^{\sum_i i k_i} G_{k_1,\dots,k_m}. \quad (3.33)$$

Теперь, собирая вместе результаты (3.33), (3.6), (3.7), (3.8), (3.32), (3.30) и (1.2), получаем

$$\begin{aligned} & f_{m,n}(q) \\ &= \frac{1}{M_n M_m} \sum_{k_1 \geq \dots \geq k_m \geq 0} \left((-1)^{\sum_{i=1}^m k_i} q^{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^n k_s^2 + (2s-1)k_s} G_{k_1,\dots,k_m,0,\dots,0} G_{k_1,\dots,k_m} \right). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что знаменатель правой части в (3.8) дополняет M_n до $(Q_{\infty})^n$, что дает окончательную формулу (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, *Quantum toroidal $\mathfrak{gl}_1$ algebra: plane partitions*, Kyoto J. Math. (в печати); <http://arxiv.org/abs/1110.5310v1>.
- [2] Р. Стэнли, *Перечислительная комбинаторика*, Мир, М., 2005.
- [3] A. I. Molev, *Gelfand–Tsetlin bases for classical Lie algebras*, in: Handbook of Algebra, vol. 4, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006, 109–170; <http://arxiv.org/abs/math/0211289>.
- [4] R. Goodman, N. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: georg21a@yahoo.com

Поступило в редакцию
26 июля 2012 г.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: borfeigin@gmail.com