Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко, О парах операторов, связанных квадратичным соотношением, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 82–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 05:49:31

143:1 (1995), 71–96. [7] Р. Г. Новиков, Функциональный анализ и его прил., 22:4 (1988), 11–22. [8] R. G. Novikov, Phys. Lett. A, 375:9 (2011), 1233–1235. [9] А. П. Веселов, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, 279:1 (1984), 20–24. [10] А. П. Веселов, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, 279:4 (1984), 784–788. [11] Т.-Y. Tsai, Inverse Problems, 9:6 (1993), 763–787.

Московский государственный университет
CMAP, Ecole Polytechnique, France
e-mail: kazeykina@cmaph.polytechnique.fr

Поступило в редакцию
28 июня 2011 г.

УДК 519.171.2+512.55

О парах операторов, связанных квадратичным соотношением*

© 2013. В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко

1. Введение. Рассмотрим конечномерное линейное пространство $\mathcal{V}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и набор линейных операторов $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ в $\mathcal{V}$. Напомним, что набор $(\mathcal{A}_k)_{k=1}^n$ называется неразложимым, если $\mathcal{V}$ нельзя разложить в прямую сумму нетривиальных подпространств $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, инвариантных относительно всех операторов набора. Наборы $(\mathcal{A}_k)_{k=1}^n$ в $\mathcal{V}$ и $(\widetilde{\mathcal{A}}_k)_{k=1}^n$ в $\mathcal{V}$ подобны, если существует обратимый линейный оператор $\mathcal{C}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, такой, что $\widetilde{\mathcal{A}}_k = \mathcal{C}\mathcal{A}_k\mathcal{C}^{-1}$, $k = 1, \dots, n$.

В случае одного оператора задача классификации неразложимых операторов с точностью до подобия сводится к построению в пространстве V базиса Жордана, при этом клетки Жордана исчерпывают список неразложимых операторов. Классификация неразложимых наборов линейных операторов с точностью до подобия оказывается чрезвычайно сложной задачей уже в случае $n = 2$ (см., например, [1], [2]). Естественно поэтому попытаться наложить на набор операторов условия, при которых эта задача может оказаться поддающейся решению. Самое простое из таких условий — коммутация, но, как показано в [3], [4], задача описания с точностью до подобия пар коммутирующих операторов остается сложной (несмотря на то, что для коммутирующих операторов существует базис, в котором матрицы этих операторов одновременно имеют треугольный вид). Даже при дополнительном ограничении $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^3 = \mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0$ задача описания с точностью до подобия пар коммутирующих операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ не поддается решению (является дикой [5]).

В настоящей работе изучается задача описания с точностью до подобия неразложимых пар операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, связанных квадратичным соотношением общего вида

$$P_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \alpha\mathcal{A}^2 + \beta\mathcal{A}\mathcal{B} + \gamma\mathcal{B}\mathcal{A} + \delta\mathcal{B}^2 + \epsilon\mathcal{A} + \zeta\mathcal{B} + \chi\mathcal{I} = 0 \quad (i)$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \chi \in \mathbb{C}$). Доказано, что невырожденными аффинными заменами образующих это квадратичное соотношение может быть приведено к одному из

*Работа частично поддержана грантом DFG SCHM1009/4-1 и совместным грантом ДФФД-РФФИ Ф40.01/008.

9 видов (предложение 2), и для каждого из полученных соотношений либо приведен перечень неразложимых пар с точностью до подобия, либо показано, что задача классификации пар операторов с таким соотношением является дикой (теорема 2), т. е. содержит в себе задачу описания с точностью до подобия пар операторов без связей (более подобно о диких задачах см. [1], [2]).

Замечание 1. В данной работе рассматриваются *пары операторов лишь в конечномерных линейных пространствах*. В литературе изучаются также различные категории наборов операторов, связанных соотношениями, в бесконечномерных пространствах.

Замечание 2. Авторами изучалась задача описания с точностью до унитарной эквивалентности пар самосопряженных операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в гильбертовом пространстве, связанных квадратичным соотношением

$$P_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \alpha \mathcal{A}^2 + \beta \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} + i\gamma[\mathcal{A}, \mathcal{B}] + \delta \mathcal{B}^2 + \epsilon \mathcal{A} + \zeta \mathcal{B} + \chi \mathcal{I} = 0$$

с вещественными коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \chi$ для случая конечномерных, ограниченных и неограниченных операторов ([6]–[8]).

2. Примеры. 1. Задача классификации пар операторов $(\mathcal{A}^2 = 0, \mathcal{B})$ дикая. Действительно, классификация пар $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

в пространстве $V \dot{+} V$ эквивалентна классификации пар операторов (A, B) в пространстве V .

2. Задача классификации пар операторов $(\mathcal{A}^2 = \mathcal{I}, \mathcal{B})$ дикая. Действительно, классификация пар $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

в пространстве $V \dot{+} V$ эквивалентна классификации пар операторов (A, B) в пространстве V .

3. Задача классификации пар операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B} = \mathcal{A}^2)$ не является дикой. Структура таких пар дается нормальной формой матрицы оператора $\mathcal{A}$.

4. Задача классификации пар q -коммутирующих операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, $\mathcal{A}\mathcal{B} = q\mathcal{B}\mathcal{A}$, $q \in \mathbb{C}$, дикая. В прямой сумме $\mathcal{V} = V \dot{+} V \dot{+} V \dot{+} V$ по произвольной паре операторов A, B в V построим операторы

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично по паре $\tilde{A}, \tilde{B}: \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$ в прямой сумме четырех копий пространства $\tilde{V}$ построим операторы $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$.

Предложение 1 ([3], [9]). *Пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в $\mathcal{V}$ неразложима тогда и только тогда, когда пара (A, B) в V неразложима. Пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ подобна паре $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ тогда и только тогда, когда пара (A, B) подобна паре $(\tilde{A}, \tilde{B})$.*

Замечание 3. В приведенной конструкции оба оператора $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ нильпотентны, причем $\mathcal{A}^3 = \mathcal{B}^3 = 0$.

Покажем, что задача классификации также является дикой, если $\mathcal{A}$ обратим, а $\mathcal{B}^2 = 0$. Положим $\mathcal{V} = V_1 \dot{+} V_2$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I + A_1 & 0 \\ 0 & -I + A_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{ii})$$

где A_1 , A_2 — нильпотентные операторы в пространствах V_1 , V_2 соответственно. Поскольку спектры операторов $I + A_1$ и $-I + A_2$ не пересекаются, любой идемпотент $\mathcal{P}$, коммутирующий с оператором $\mathcal{A}$, имеет вид

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix},$$

где P_1 , P_2 — идемпотенты в пространствах V_1 , V_2 соответственно. Тогда задача приведения операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ вида (ii) сводится к приведению тройки операторов A_1 , A_2 , B в паре пространств V_1 , V_2 , таких, что $A_1: V_1 \rightarrow V_1$, $A_2: V_2 \rightarrow V_2$, $B: V_2 \rightarrow V_1$, $A_1 B = B A_2$, причем A_1 и A_2 — нильпотентные операторы. Дикость такой задачи доказана в [10], [11].

5. Рассмотрим задачу классификации пар операторов, связанных соотношением q -CCR: $\mathcal{A}\mathcal{B} - q\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$, $q \in \mathbb{C}$.

Сначала рассмотрим случаи $q = 0$ и $q = 1$.

При $q = 0$ имеем $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I}$, поэтому операторы невырождены и $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$. Задача классификации таких пар не является дикой: их структура дается нормальной формой матрицы оператора $\mathcal{A}$.

При $q = 1$ имеем $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{I}$. Поскольку след коммутатора любых двух матриц равен нулю, таких пар в конечномерном пространстве не существует (еще раз отметим, что в данной работе мы рассматриваем операторы только в конечномерных пространствах).

Пусть теперь $q^2 \neq q$. В этом случае задача классификации пар операторов с условием $\mathcal{A}\mathcal{B} - q\mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{I}$ является дикой (см., например, [12]). Действительно, рассмотрим пары с дополнительным условием, что $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} = (1 - q)^{-1} \mathcal{I} + \mathcal{N}$, где $\mathcal{N}$ — нильпотентный оператор. Тогда мы имеем соотношение $\mathcal{A}\mathcal{N} = q\mathcal{N}\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — обратимый, а $\mathcal{N}$ — нильпотентный операторы. Дикость такой задачи доказана выше в замечании 3.

В последующих примерах 6–9 мы изучим соотношения вида $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = P(\mathcal{A})$, где $P(\cdot)$ — отличный от константы полином.

6. Задача классификации пар операторов, для которых $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}$, дикая. Положим $\mathcal{V} = V_1 \dot{+} V_2$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I + B_2 \end{pmatrix},$$

B_1 , B_2 — нильпотентные операторы. Соотношение $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}$ эквивалентно $B_1 A = A B_2$. Дальнейшее доказательство аналогично приведенному в замечании 3.

7. Задача классификации пар операторов, для которых $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}^2$, дикая. Действительно, полагая дополнительно $\mathcal{A}^2 = 0$, получим задачу классификации пар коммутирующих операторов, таких, что $\mathcal{A}^2 = 0$, которая является дикой [5].

8. Задача классификации пар операторов, для которых $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}^2 + \mathcal{J}$, дикая. Доказательство подобно приведенному в примере 6. Положим $\mathcal{V} = V_1 \dot{+} V_2$,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} iI & A \\ 0 & iI \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -iI + B_1 & 0 \\ 0 & iI + B_2 \end{pmatrix},$$

B_1, B_2 — нильпотентные операторы. Тогда $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}^2$ эквивалентно $B_1 A = A B_2$ и дикость доказывается аналогично тому, как это делается в замечании 3.

9. Задача классификации пар операторов, для которых $q[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}$, $q \neq 0$, дикая. Действительно, пусть $\mathcal{B}' = -q\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}$. Тогда задача классификации пар операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ эквивалентна задаче классификации пар операторов $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, для которых из $q[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}$ следует $[\mathcal{A}', \mathcal{B}'] = \mathcal{A}'$.

Рассуждения, приведенные в примерах 6–8, справедливы в более общей ситуации.

Теорема 1. *Задача классификации пар операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ в конечномерном линейном пространстве $\mathcal{V}$, удовлетворяющих соотношению $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = P(\mathcal{A})$, где $P(\cdot)$ — отличный от константы полином, дикая.*

Доказательство. Предположим сначала, что у полинома $P(\cdot)$ есть кратный корень, который обозначим через λ . Тогда полином можно представить в виде $P(x) = (x - \lambda)^2 Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый другой полином, и для операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ мы получим соотношение $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = (\mathcal{A} - \lambda I)^2 Q(\mathcal{A})$. Введем оператор $\mathcal{A}' = \mathcal{A} - \lambda \mathcal{J}$. Тогда $[\mathcal{A}', \mathcal{B}] = \mathcal{A}'^2 Q(\mathcal{A}' + \lambda I)$. Предполагая, что $\mathcal{A}'^2 = 0$, получим $[\mathcal{A}', \mathcal{B}] = 0$, и дикость следует из дикости задачи для пары коммутирующих операторов, для которых $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^3 = 0$ [5].

Пусть теперь λ — простой корень полинома $P(\cdot)$. Разложим пространство $\mathcal{V}$ в прямую сумму $\mathcal{V} = V_1 \dot{+} V_2$ и рассмотрим блочные матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda I & A \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 + \mu_1 I & 0 \\ 0 & B_2 + \mu_2 I \end{pmatrix},$$

где B_1 и B_2 — нильпотентные операторы в пространствах V_1 и V_2 соответственно. При этом, поскольку λ — корень полинома $P(\cdot)$, имеем

$$P(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & P'(\lambda)A \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и условие $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = P(\mathcal{A})$ сводится к $AB_2 - B_1A + (\mu_2 - \mu_1)A = P'(\lambda)A$. Выберем μ_1, μ_2 таким образом, чтобы $\mu_2 - \mu_1 = P'(\lambda)$; при этом, поскольку λ — простой корень, $P'(\lambda) \neq 0$ и $\mu_2 \neq \mu_1$. Тогда произвольный идемпотент $\mathcal{J}$, коммутирующий с оператором $\mathcal{B}$, имеет в упомянутом разложении пространства блочный вид:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix},$$

где J_1, J_2 — идемпотенты в V_1, V_2 соответственно. Задача приведения операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ выбранного вида сводится, подобно тому, как это делается в замечании 3, к дикой задаче описания троек операторов A, B_1, B_2 в паре пространств V_1, V_2 , таких, что $B_1: V_1 \rightarrow V_1, B_2: V_2 \rightarrow V_2, A: V_2 \rightarrow V_1, AB_2 = B_1A$, причем B_1 и B_2 — нильпотентные операторы. $\square$

3. Основная теорема.

Предложение 2. *С помощью невырожденной аффинной замены переменных соотношение (i) можно свести к одному из видов (1)–(9),*

$$\begin{aligned} (1) \mathcal{A}^2 &= 0, & (2) \mathcal{A}^2 &= \mathcal{I}, & (3) \mathcal{A}^2 &= \mathcal{B}, \\ (4) \mathcal{A}\mathcal{B} &= q\mathcal{B}\mathcal{A}, & (5) \mathcal{A}\mathcal{B} - q\mathcal{B}\mathcal{A} &= \mathcal{I}, & (6) [\mathcal{A}, \mathcal{B}] &= \mathcal{A}, \\ (7) [\mathcal{A}, \mathcal{B}] &= \mathcal{A}^2, & (8) [\mathcal{A}, \mathcal{B}] &= \mathcal{A}^2 + \mathcal{I}, & (9) q[\mathcal{A}, \mathcal{B}] &= \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}, \end{aligned}$$

$q \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Соотношение (i) можно переписать в виде

$$\alpha\mathcal{A}^2 + \beta'\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} + \delta\mathcal{B}^2 + \epsilon\mathcal{A} + \zeta\mathcal{B} + \chi\mathcal{I} = \gamma'[\mathcal{A}, \mathcal{B}],$$

где $\beta' = (\beta + \gamma)/2$, $\gamma' = (\gamma - \beta)/2$ (как обычно, мы используем обозначения $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}$, $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$).

Дальнейшее доказательство подобно приведению с помощью аффинных замен переменных к каноническому виду уравнений кривых второго порядка и перебору возможных вариантов условий на коэффициенты. $\square$

Замечание 4. Хотя аффинной заменой приведенные соотношения (1)–(9) друг в друга не переводятся, построенная при изучении соотношения (9) квадратичная замена $\mathcal{B}' = -q\mathcal{A}$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}$ устанавливает изоморфизм алгебр, порожденных соотношениями (6) и (9).

Задача о приведении пары операторов, связанных квадратичным соотношением, как правило, является дикой. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Задача описания с точностью до подобия неразложимых пар $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ линейных операторов в конечномерном комплексном пространстве, связанных одним из соотношений (1)–(9), является дикой за исключением следующих случаев:*

- (3), когда классификация пар, удовлетворяющих соотношению $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}$, дается жордановой формой матрицы произвольного оператора $\mathcal{A}$;
- (5) при $q = 0$, когда классификация пар, удовлетворяющих соотношению $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{I}$, дается жордановой формой матрицы обратимого оператора $\mathcal{B}$;
- (5) при $q = 1$, когда пар, удовлетворяющих соотношению $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{I}$, не существует (см. пример 5).

Следствие. *Можно явно указать условия на коэффициенты в соотношении (i), которые позволяют определить, будет ли соответствующая задача дикой. Задача описания с точностью до подобия неразложимых пар линейных операторов в конечномерном комплексном пространстве, связанных соотношением (i) является дикой за исключением следующих случаев:*

- $(\beta + \gamma)^2 = 4\alpha\delta$, $\gamma = \beta$, $\alpha\zeta - \beta\epsilon \neq 0$, когда соотношение сводится к виду (3);
- $(\beta + \gamma)^2 \neq 4\alpha\delta$, $\beta\gamma = \alpha\delta$, $\epsilon^2\delta - \epsilon\zeta(\beta + \gamma) + \zeta^2\alpha + 4\chi((\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta) \neq 0$, когда соотношение сводится к случаю (5), $q = 0$.
- $\alpha = \delta = \epsilon = \zeta = 0$, $\gamma = -\beta$, $\chi \neq 0$, когда соотношение сводится к виду (5), $q = 1$.

Замечание 5. В различных статьях решается задача классификации с точностью до подобия пар операторов, связанных двумя квадратичными соотношениями. Так, например, в [13] дано описание с точностью до подобия пар операторов, удовлетворяющих соотношениям $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = 0$.

Авторы выражают искреннюю благодарность В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозду, С. А. Кругляку и рецензентам работы за полезные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Donovan, M. R. Freislich, *The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras*, Carleton Math. Lecture Notes, vol. 5, Carleton Univ., Ottawa, 1973.
 [2] Ю. А. Дрозд, в кн.: Представления и квадратичные формы, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1978, 39–74. [3] С. А. Кругляк, Докл. АН СССР, **153**:6 (1963), 1253–1256.
 [4] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, Функц. анализ и его прил., **3**:4 (1969), 81–82.
 [5] Ю. А. Дрозд, Функц. анализ и его прил., **6**:4 (1972), 41–43. [6] V. L. Ostrovskiy, Yu. S. Samoilenko, *Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented *-Algebras. I. Representations by Bounded Operators*, Rev. Math. Math. Phys., vol. 11, No. 1, Gordon & Breach, London, 1999. [7] В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко, Зап. научн. сем. ЛОМИ (Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика, т. 10), **172** (1989), 121–129. [8] V. L. Ostrovskiy, Yu. S. Samoilenko, Seminar Sophus Lie, **3** (1993), 185–218. [9] М. В. Ахрамович, М. А. Муратов, Таврический вестник информатики и математики, 2010, № 2, 17–25. [10] M. Hoshino, J. Miyachi, Tsukuba J. Math., **12**:1 (1988), 65–93. [11] Y. Han, J. Algebra, **247**:1 (2002), 57–77. [12] V. Bavula, V. Bekkert, Comm. Algebra, **28**:11 (2000), 5067–5100. [13] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, УМН, **23**:2 (1968), 3–59.

Институт математики НАН Украины
e-mail: vo@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
28 февраля 2011 г.

Институт математики НАН Украины
e-mail: yurii_sam@imath.kiev.ua

УДК 517.518.12

О мультипликаторах на компактных группах Ли*

© 2013. М. В. Ружанский, Й. Вирт

1. Введение. Пусть G — компактная группа Ли размерности n с нейтральным элементом 1 и $\widehat{G}$ — множество ее (непрерывных) неприводимых унитарных представлений. Глобальное преобразование Фурье на G и обратное к нему задаются в терминах классов эквивалентности $[\xi]$ неприводимых унитарных представлений $\xi: G \rightarrow U(d_\xi)$ следующим образом:

$$(\mathcal{F}\phi)(\xi) = \widehat{\phi}(\xi) = \int_G \phi(x)\xi(x)^* dx, \quad \phi(x) = \sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}(\xi(x)\widehat{\phi}(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\phi}](x). \quad (1)$$

Теорема Петера–Вейля влечет за собой тождество Планшереля

$$\|\phi\|_2^2 = \sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_\xi \|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS}^2 =: \|\widehat{\phi}\|_{\ell^2(\widehat{G})}^2, \quad (2)$$

*Работа поддержана EPSRC, грант EP/G007233/1.