Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Бер, Ф. А. Сукочев, Коммутаторные оценки в алгебрах фон Неймана, *Функци. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 77–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3099>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:12:46

Коммутаторные оценки в алгебрах фон Неймана

© 2013. А. Ф. БЕР, Ф. А. СУКОЧЕВ

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, $Z(\mathcal{M})$ — ее центр и $\delta_a = [a, \cdot]$ — внутреннее дифференцирование в $\mathcal{M}$, порожденное элементом $a \in \mathcal{M}$. Ясно, что δ_a — непрерывный линейный оператор в $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$, где $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ есть C^* -норма в $\mathcal{M}$. Норма этого оператора имеет следующую оценку снизу [4]: $\|\delta_a\| \geq \|a - c\|_{\mathcal{M}}$ для некоторого $c \in Z(\mathcal{M})$. Естественно возникает вопрос о мажорируемости положительного оператора $|a - c|$ для некоторого $c \in Z(\mathcal{M})$ элементом вида $|\delta_a(y)|$, где $\|y\|_{\mathcal{M}} \leq 1$, относительно естественного частичного порядка в $\mathcal{M}_h = \{x \in \mathcal{M} : x = x^*\}$.

Для формулировки основного результата напомним понятия измеримого и локально измеримого оператора относительно алгебры фон Неймана. Замкнутый плотно определенный оператор a , присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, называется *измеримым относительно этой алгебры фон Неймана*, если спектральный проектор $e^{|a|}(\lambda, +\infty)$ для оператора $|a|$, отвечающий промежутку $(\lambda, +\infty)$, есть конечный проектор для некоторого $\lambda > 0$. Множество $S(\mathcal{M})$ всех измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов является $*$ -алгеброй относительно сильно определенных операций сложения и умножения [5]. Замкнутый плотно определенный оператор a , присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, называется *локально измеримым относительно этой алгебры фон Неймана*, если существует такая последовательность $\{z_n\}$ центральных проекторов в $\mathcal{M}$, что $z_n \uparrow 1$ и $az_n \in S(\mathcal{M})$ для любого n . Множество $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов также является $*$ -алгеброй относительно сильно определенных операций сложения и умножения, причем $S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M})$ [5].

Через $Z(\mathcal{A})$ обозначается центр алгебры $\mathcal{A}$.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $a = a^* \in LS(\mathcal{M})$. Тогда

(1) существует такой оператор $c_0 = c_0^* \in Z(LS(\mathcal{M}))$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $u_\varepsilon = u_\varepsilon^* \in U(\mathcal{M})$, для которого $|[a, u_\varepsilon]| \geq (1 - \varepsilon)|a - c_0|$, где $U(\mathcal{M})$ — группа унитарных операторов в $\mathcal{M}$;

(2) если $\mathcal{M}$ — конечная или чисто бесконечная σ -конечная алгебра фон Неймана, то существуют такие операторы $c_0 = c_0^* \in Z(LS(\mathcal{M}))$ и $u_0 = u_0^* \in U(\mathcal{M})$, что $[a, u_0] = u_0^*|a - c_0|u_0 + |a - c_0|$.

Если $\mathcal{M}$ есть σ -конечный фактор типа I_∞ или II_∞ , то найдется такой элемент $a \in S_h(\mathcal{M})$, что неравенство $|[a, u]| \geq |a - \lambda 1|$ не выполняется ни для каких $\lambda \in \mathbb{C}$ и $u \in U(\mathcal{M})$ [1]. Поэтому нельзя опустить множитель $1 - \varepsilon$ в условии (1) теоремы 1.

Основным инструментом, используемым в доказательстве этой теоремы, является тщательное сравнение спектральных проекторов самосопряженного оператора $a \in LS(\mathcal{M})$ и «склеивание» требуемых унитарных операторов с помощью частичных изометрий, связывающих эти спектральные проекторы. Истоки этой техники в случае факторов можно найти в [1].

Неравенство из п. (1) теоремы 1 позволяет усилить некоторые классические результаты, восходящие еще к знаменитой статье Калкина [2]. Интересно отметить, что наши методы доказательства полностью отличны от подхода Калкина и имеют более широкую область применения.

Следствие 2. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $\mathcal{I}$ — (не обязательно замкнутый по норме) идеал в $\mathcal{M}$. Тогда

(1) если $\delta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$ — дифференцирование, то существует такой оператор $a \in \mathcal{I}$, что $\delta = \delta_a = [a, \cdot]$;

(2) $\pi^{-1}(Z(\mathcal{M}/\mathcal{I})) = Z(\mathcal{M}) + \mathcal{I}$, где $\pi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\mathcal{I}$ — канонический факторэпиморфизм.

В случае, когда $\mathcal{M} = B(H)$, где H — сепарабельное гильбертово пространство, п. (2) следствия 2 совпадает с теоремой 2.9 из [2]. Это утверждение имеет следующую «лифтинговую» интерпретацию: если ϕ — эпиморфизм из W^* -алгебры $\mathcal{M}$ на произвольную алгебру $\mathcal{A}$, $x \in Z(\mathcal{A})$, то существует такой элемент $z \in Z(\mathcal{M})$, что $\phi(z) = x$.

Приведем еще одно полезное следствие из теоремы 1, связанное с понятиями «essential commutants» и «multiplier ideals» из [3].

Следствие 3. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ — идеалы в $\mathcal{M}$. Тогда $D(\mathcal{J}, \mathcal{I}) = \mathcal{I} : \mathcal{J} = \mathcal{J} + Z(\mathcal{M})$, где $\mathcal{I} : \mathcal{J} = \{x \in \mathcal{M} : x\mathcal{J} \subset \mathcal{I}\}$, $D(\mathcal{I}, \mathcal{I}) = \{x \in \mathcal{M} : [x, y] \in \mathcal{I} \text{ для любого } y \in \mathcal{I}\}$.

В случае, когда $\mathcal{M} = B(H)$, где H — произвольное гильбертово пространство, следствие 3 совпадает с теоремой 1 из [3].

Важными примерами идеалов в алгебрах фон Неймана служат симметрические операторные идеалы. Идеал $\mathcal{I}$ в алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, снабженный нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, называется симметрично нормированным операторным идеалом, если $\|x\|_{\mathcal{M}} \leq \|x\|_{\mathcal{I}}$, $\|x^*\|_{\mathcal{I}} = \|x\|_{\mathcal{I}}$ и $\|axb\|_{\mathcal{I}} \leq \|a\|_{\mathcal{M}}\|x\|_{\mathcal{I}}\|b\|_{\mathcal{M}}$ для всех $x \in \mathcal{I}$, $a, b \in \mathcal{M}$.

Следствие 4. Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, $\mathcal{I}$ — симметрично нормированный операторный идеал в $\mathcal{M}$ и $\delta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}$ — самосопряженное дифференцирование. Тогда существует такой оператор $a \in \mathcal{I}$, что $\delta = \delta_a = [a, \cdot]$ и $\|a\|_{\mathcal{I}} \leq \|\delta\|_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}}$.

Линейное подпространство $\mathcal{E}$ в $LS(\mathcal{M})$ называется $\mathcal{M}$ -бимодулем локально измеримых операторов, если $uxv \in \mathcal{E}$ для всех $x \in \mathcal{E}$, $u, v \in \mathcal{M}$. Если при этом $\mathcal{M}$ -бимодуль $\mathcal{E}$ снабжен такой нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, что $\|uxv\|_{\mathcal{E}} \leq \|u\|_{\mathcal{M}}\|v\|_{\mathcal{M}}\|x\|_{\mathcal{E}}$, то он называется нормированным $\mathcal{M}$ -бимодулем локально измеримых операторов.

Следствие 5. Пусть $\mathcal{E}$ есть $\mathcal{M}$ -бимодуль локально измеримых операторов и оператор $a = a^* \in LS(\mathcal{M})$ таков, что $\delta_a(\mathcal{M}) \subset \mathcal{E}$. Тогда существует такой элемент $d \in \mathcal{E}$, что $\delta_d = \delta_a$; при этом, если $\mathcal{E}$ — нормированный $\mathcal{M}$ -бимодуль, то $\|d\|_{\mathcal{E}} \leq \|\delta_a\|_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{E}}$.

Авторы выражают благодарность В. И. Чилину за полезное обсуждение результатов и за предложения по улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. F. Ber, F. A. Sukochev, Trans. Amer. Math. Soc., **264**:10 (2012), 5571–5587; <http://arxiv.org/abs/1008.3210>. [2] J. Calkin, Ann. of Math., **42** (1941), 839–873. [3] M. J. Hoffman, Indiana Univer. Math. J., **30**:6 (1981), 859–869. [4] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971. [5] М. А. Муратов, В. И. Чилин, *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов*, Праці Ін-ту математики НАН України, т. 69, Ін-т математики НАН України, Київ, 2007.

DCF Technologies Ltd, Ташкент, Узбекистан
e-mails: ber@ucd.uz, aber1960@mail.ru

Поступило в редакцию
3 февраля 2011 г.

School of Mathematics and Statistics,
University of New South Wales, Kensington, Australia
e-mail: f.sukochev@unsw.edu.au

УДК 517.95

Отсутствие солитонов кондуктивного типа для уравнения Веселова–Новикова при нулевой энергии

© 2013. А. В. КАЗЕЙКИНА

1. Введение. В этой заметке мы рассматриваем уравнение Веселова–Новикова при нулевой энергии

$$\begin{aligned}\partial_t v &= 4 \operatorname{Re}(4\partial_z^3 v + \partial_z(vw)), \\ \partial_{\bar{z}} w &= -3\partial_z v, \quad v = \bar{v}, \\ v &= v(x, t), \quad w = w(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Определение 1. Пара (v, w) называется *достаточно локализованным решением уравнения (1)*, если

- $v, w \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$, $v(\cdot, t) \in C^3(\mathbb{R}^2)$,
- $|\partial_x^j v(x, t)| \leq q(t)(1 + |x|)^{-2-\varepsilon}$, $|j| \leq 3$, для некоторых $q(t) > 0$, $\varepsilon > 0$, $w(x, t) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$,
- (v, w) удовлетворяет (1).

Определение 2. Решение (v, w) уравнения (1) называется *солитоном (бегущей волной)*, если $v(x, t) = V(x - ct)$, $c \in \mathbb{R}^2$.

Уравнение (1) является аналогом классического КдФ. Если $v = v(x_1, t)$, $w = w(x_1, t)$, то оно сводится к уравнению КдФ. Кроме того, уравнение (1)