Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Овчинников, Интерполяционные орбиты в парах пространств Лебега, *Функци. анализ и его прил.*, 2005, том 39, выпуск 1, 56–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa31>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:17:27

Интерполяционные орбиты в парах пространств Лебега

© 2005. В. И. Овчинников

Данная работа посвящена интерполяционным орбитам при действии линейных операторов из произвольной пары $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ пространств L_p с весами в произвольную пару $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$ таких же пространств, где $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Через $L_p(U)$ мы в дальнейшем обозначаем пространство измеримых функций f на пространстве с мерой $\mathfrak{M}$, таких, что $fU \in L_p$, с нормой $\|f\|_{L_p(U)} = \|fU\|_{L_p}$. Для того чтобы описать ситуацию, введем несколько определений.

Пусть $\{X_0, X_1\}$ и $\{Y_0, Y_1\}$ — банаховы пары, $a \in X_0 + X_1$. Обозначим через $\text{Orb}(a, \{X_0, X_1\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\})$ банахово пространство таких $y \in Y_0 + Y_1$, что $y = Ta$, где T — линейный ограниченный оператор, отображающий пару $\{X_0, X_1\}$ в пару $\{Y_0, Y_1\}$. Норма определяется следующим образом:

$$\|y\|_{\text{Orb}} = \inf_T \max(\|T\|_{X_0 \rightarrow Y_0}, \|T\|_{X_1 \rightarrow Y_1}),$$

где инфимум берется по всем представлениям y в форме $y = Ta$. Это пространство называется интерполяционной орбитой элемента a . Нашей целью будет описать пространства

$$\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})$$

для всех a , любых p_0, p_1, q_0, q_1 , $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, и любых весов U_0, U_1, V_0, V_1 . Данная работа содержит доказательства результатов, сформулированных в [12].

Нетривиальные результаты, касающиеся описания орбит, в отдельных случаях известны с шестидесятых годов. Ключевую роль в этих описаниях играл K -функционал Я. Петре. Этот функционал определяется следующим образом.

Пусть $\{X_0, X_1\}$ — банахова пара, $x \in X_0 + X_1$, $s > 0$, $t > 0$. Положим

$$K(s, t, x; \{X_0, X_1\}) = \inf_{x=x_0+x_1} s\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1},$$

где инфимум берется по всем представлениям x в виде суммы $x_0 \in X_0$ и $x_1 \in X_1$. Функция $K(s, t)$ вогнута и однозначно определяется функцией $K(1, t, x; \{X_0, X_1\})$, которая также обозначается через $K(t, x; \{X_0, X_1\})$.

Если $1 \leq p_0 \leq q_0 \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq q_1 \leq \infty$, то орбиты $\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})$ были описаны как обобщенные пространства Марцинкевича, т. е.

$$\begin{aligned} & \text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) \\ &= M_\varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)) = \left\{ y : \sup_{s,t} \frac{K(s, t, y; \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})}{\varphi(s, t)} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

где $\varphi(s, t) = K(s, t, a; \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$, для всех $a \in L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$. Здесь первые результаты были получены Б. С. Митягиным и А. Кальдероном в случае $p_0 = q_0 = 1$ и $p_1 = q_1 = \infty$. Решающий вклад в решение этой задачи сделали Г. Спарр в [13, 14] и В. И. Дмитриев в [4]. В частности, Спарр показал, что если

$$K(s, t, y; \{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}) \leq CK(s, t, a; \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}),$$

для некоторой константы C и всех $s, t > 0$, то существует линейный оператор $T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{p_0}(V_0), L_{p_1}(V_1)\}$, такой, что $y = Ta$.

Дмитриев [4] также нашел описание орбит в случае любых $p_0, p_1, 1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, и $q_0 = q_1 = 1$, а также в случае любых $p_1, q_0, 1 \leq p_1, q_0 \leq \infty$, и $p_0 = q_1 = 1$. Эти результаты Дмитриева были недооценены в свое время из-за того, что найденное им описание казалось неудовлетворительным.

Результаты, о которых пойдет речь в данной работе, восходят к статье [8], где были найдены оптимальные интерполяционные теоремы в классе пространств Лионса–Петре. Эти теоремы, в частности, дают описание интерполяционных орбит для элементов a из специального однопараметрического семейства, но для любых $p_0, p_1, q_0, q_1, 1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. В развитие этого подхода в [9] была сформулирована следующая гипотеза относительно орбит: пространство $\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})$ расположено между $L_{q_0}(V_0)$ и $L_{q_1}(V_1)$ в точности в том же месте, в котором расположено пространство Кальдерона–Лозановского $\varphi(L_{r_0}(W_0), L_{r_1}(W_1))$ между пространствами $L_{r_0}(W_0)$ и $L_{r_1}(W_1)$ для любых весов W_0 и W_1 , где $\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$ и $r_0^{-1} = (q_0^{-1} - p_0^{-1})_+$, $r_1^{-1} = (q_1^{-1} - p_1^{-1})_+$. Эта гипотеза была подтверждена в [10] для элементов a с квазистепенной функцией $\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$. (Заметим, что пространство $L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$ может не содержать таких элементов.)

В данной работе показано, что гипотеза из [9] справедлива для всех $a \in L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$. Кроме этого мы получим два новых описания орбит, одно из которых близко к описанию Дмитриева в [4]. Основной результат состоит в том, что $\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})$ совпадает с пространством $\varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}$, где $\varphi(X_0, X_1)_{r_0, r_1}$ — интерполяционный функтор, обобщающий метод средних Лионса–Петре на случай функциональных параметров φ .

§1. Метод средних для произвольных квазивогнутых функциональных параметров

Пусть $\varphi(s, t)$ — интерполяционная функция, т.е. $\varphi(s, t)$ определена и является однородной функцией первой степени при $s, t > 0$, а $\rho(t) = \varphi(1, t)$ — квазивогнутая функция. Предположим, что $\varphi \in \Phi_0$, т.е. $\varphi(1, t) \rightarrow 0$ и $\varphi(t, 1) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$. Обозначим через $\{t_n\}$ балансировочную последовательность для функции $\rho(t)$ (см. [3]). В терминологии [11] балансировочная последовательность — это заполняющая и равномерно разреженная последовательность для функции $\rho(t)$. Мы не станем здесь приводить всех этих определений, поскольку суть дела не пострадает, если мы воспользуемся конкретной последовательностью такого рода. Последовательность $\{t_n\}$ может быть построена индуктивно с помощью конструкции Осколкова–Янсона (см. [5]):

$$t_0 = 1, \quad \min \left(\frac{\rho(t_{n+1})}{\rho(t_n)}, \frac{t_{n+1}\rho(t_n)}{t_n\rho(t_{n+1})} \right) = q > 1. \quad (1)$$

Множество индексов (область определения) этой последовательности представляет собой некоторый интервал $\mathbb{M}$ в множестве целых чисел. (Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что последовательность $\{t_n\}$ двусторонняя, т. е. что n пробегает множество всех целых чисел.)

Основное свойство балансировочной последовательности (см. [11]) состоит в том, что

$$K(s, t, \{\rho(t_n)\}, \{l_{p_0}, l_{p_1}(t_n^{-1})\}) \asymp \varphi(s, t) \quad (2)$$

для любых $p_0, p_1, 1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. (Как обычно, $f \asymp g$ означает, что для некоторых положительных констант c и C справедлива оценка $cf \leq g \leq Cf$.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\{X_0, X_1\}$ — произвольная банахова пара, $\varphi \in \Phi_0$ и $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Обозначим через $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ пространство таких $x \in X_0 + X_1$, что

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(t_n) w_n \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1),$$

где $w_n \in X_0 \cap X_1$ и $\{\|w_n\|_{X_0}\} \in l_{p_0}, \{t_n \|w_n\|_{X_1}\} \in l_{p_1}$.

Норма в $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ определяется естественным образом. В случае когда $\varphi(s, t) = s^{1-\theta} t^\theta$, где $0 < \theta < 1$, такие пространства были введены Лионсом и Петре и названы пространствами средних (см. [6]). В этом случае в качестве балансировочной последовательности можно взять любую геометрическую прогрессию, скажем $t_n = 2^n$. Как мы увидим позднее, наше новое обозначение имеет некоторое основание.

Заметим, что пространства $\varphi(X_0, X_1)_{\infty, \infty}$ совпадают с обобщенными пространствами Марцинкевича $M_\varphi(X_0, X_1)$ или с пространствами $(X_0, X_1)_{p, \infty}$ (см. [5, 11]).

Нашей ближайшей целью будет дать описание пространств $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ в терминах K -функционала.

Пусть $\{X_0, X_1\}$ — пара банаховых решеток. Напомним, что пространство $\varphi(X_0, X_1)$ — это пространство всех элементов x из $X_0 + X_1$, таких, что $|x| = \varphi(|x_0|, |x_1|)$, где $x_0 \in X_0, x_1 \in X_1$, с нормой

$$\|x\|_{\varphi(X_0, X_1)} = \inf_{x_0, x_1} \max(\|x_0\|_{X_0}, \|x_1\|_{X_1}),$$

а инфимум берется по всем x_0 и x_1 , таким, что $|x|$ представляется в форме $\varphi(|x_0|, |x_1|)$. Эта конструкция пространства $\varphi(X_0, X_1)$ по паре банаховых решеток X_0, X_1 называется конструкцией Кальдерона–Лозановского.

ЛЕММА 1. Пусть $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$; тогда

$$\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)) = \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1}.$$

(Напомним, что если $U_0 = 1$ и $U_1 = 1$, то $\varphi(L_{p_0}, L_{p_1})$ — это пространство Орлича; см. [7] или [11].)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала вложение

$$\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1} \subset \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)). \quad (3)$$

Пусть

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n \rho(t_n),$$

где $\{\|w_n\|_{L_{p_0}}\} \in l_{p_0}$ и $\{t_n\|w_n\|_{L_{p_1}}\} \in l_{p_1}$. Построим линейный оператор

$$T: \{l_{p'_0}, l_{p'_1}(t_n^{-1})\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\},$$

где через p' обозначен двойственный индекс к p , т. е. $p' = (1 - 1/p)^{-1}$. Положим

$$T(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n \xi_n \quad (\text{сходимость в } L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1))$$

для $\xi \in l_{p'_0} + l_{p'_1}(t_n^{-1})$.

Если $\xi \in l_{p'_0}$, то ряд $(w_n \xi_n)$ абсолютно сходится в $L_{p_0}(U_0)$. Если $\xi \in l_{p'_1}(t_n^{-1})$, то ряд $(w_n \xi_n) = (w_n t_n \xi_n t_n^{-1})$ абсолютно сходится в $L_{p_1}(U_1)$. Кроме того, всюду на $\mathfrak{M}$

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} w_n(m) \xi_n \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n(m)| |\xi_n| \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n(m)|^{p_0} \right)^{1/p_0} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\xi_n|^{p'_0} \right)^{1/p'_0}.$$

Так как

$$\int_{\mathfrak{M}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |U_0(m) w_n(m)|^{p_0} dm = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|w_n\|_{L_{p_0}(U_0)}^{p_0} < \infty,$$

то

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |w_n(m)|^{p_0} \right)^{1/p_0} = W_0(m) \in L_{p_0}(U_0).$$

Аналогично,

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (t_n |w_n(m)|)^{p_1} \right)^{1/p_1} = W_1(m) \in L_{p_1}(U_1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |T(\xi)(m)| &\leq W_0(m) \|\xi\|_{l_{p'_0}} && \text{для } \xi \in l_{p'_0}, \\ |T(\xi)(m)| &\leq W_1(m) \|\xi\|_{l_{p'_1}(t_n^{-1})} && \text{для } \xi \in l_{p'_1}(t_n^{-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получим

$$T: l_{p'_0} \rightarrow L_{\infty}(W_0^{-1}(m)) \subset L_{p_0}(U_0), \quad T: l_{p'_1}(t_n^{-1}) \rightarrow L_{\infty}(W_1^{-1}(m)) \subset L_{p_1}(U_1).$$

(Без ограничения общности мы будем считать, что почти всюду на $\mathfrak{M}$ оба веса W_0 и W_1 не обращаются в нуль.)

Легко видеть, что образ последовательности $\{\rho(t_n)\}$ при действии оператора T совпадает с $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(t_n) w_n$.

Ввиду соотношения (2)

$$K(s, t, \{\rho(t_n)\}, \{l_{p'_0}, l_{p'_1}(t_n^{-1})\}) \asymp \varphi(s, t).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &K(s, t, T(\{\rho(t_n)\}), \{L_{\infty}(W_0^{-1}), L_{\infty}(W_1^{-1})\}) \\ &= K(s, t, x, \{L_{\infty}(W_0^{-1}), L_{\infty}(W_1^{-1})\}) \leq C \varphi(s, t), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$|x(m)| \leq K(W_0(m), W_1(m), x, \{L_{\infty}(W_0^{-1}), L_{\infty}(W_1^{-1})\}) \leq C \varphi(W_0(m), W_1(m)).$$

Таким образом, $x \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$, и вложение (3) доказано.

Теперь рассмотрим вложение

$$\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)) \subset \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1}. \quad (4)$$

Пусть $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$. Обозначим через $\psi(t)$ K -функционал элемента a , т.е.

$$\psi(t) = K(t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}),$$

а через $\{u_m\}$ обозначим балансирующую последовательность функции ψ . (Заметим, что $\psi \in \Phi_0$, так как $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)) \subset (L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{\rho, \infty}$.) Тогда

$$\psi(t) \asymp K(t, \{\psi(u_m)\}, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}) \asymp K(t, \{\psi(u_m)\}, \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\}).$$

(Напомним, что m , вообще говоря, пробегает некоторый интервал $\mathbb{M}$ в $\mathbb{Z}$.) По теореме Спарра [14], примененной к парам $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ и $\{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}$, найдутся линейные операторы

$$A: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}$$

и

$$B: \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\},$$

такие, что $A(a) = \{\psi(u_m)\}$ и $B(\{\psi(u_m)\}) = a$. Так как конструкция Кальдерона–Лозановского является интерполяционной для пар пространств L_p (см., например, [11]), то

$$\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})).$$

Напомним, что любой элемент $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$ принадлежит орбите последовательности $\{\rho(t_n)\}$ при действии линейных операторов из пары $\{l_\infty, l_\infty(t_n^{-1})\}$ в пару $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ (см., например, [11]). Это значит, что существует линейный оператор $T: \{l_\infty, l_\infty(t_n^{-1})\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$, такой, что $T(\{\rho(t_n)\}) = a$.

Рассмотрим произведение $AT: \{l_\infty, l_\infty(t_n^{-1})\} \rightarrow \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}$, которое отображает $\{\rho(t_n)\}$ в $\{\psi(u_m)\}$.

Так как $l_p \subset l_\infty$, мы можем рассмотреть оператор AT как оператор, отображающий пару $\{l_\infty, l_\infty(t_n^{-1})\}$ в пару $\{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\}$. Вложения $l_p \subset l_\infty$ являются $(1, p)$ -суммирующими операторами по теореме Карла–Беннета [1]. Напомним, что линейный оператор $F: X \rightarrow Y$ называется $(1, p)$ -суммирующим оператором из банахова пространства X в банахово пространство Y , если для любого безусловно сходящегося ряда (x_n) в пространстве X последовательность $\{\|F(x_n)\|_Y\}$ принадлежит l_p . В частности, если $p = 1$, то оператор F называется абсолютно суммирующим. Если оператор $F: X \rightarrow Y$ $(1, p)$ -суммирующий, то $\{\|F(x_n)\|_Y\} \in l_p$ и для слабо безусловно сходящихся рядов (x_n) .

Поскольку образ стандартной базисной последовательности e_n в пространстве l_∞ при действии оператора T всегда оказывается слабо безусловно сходящимся рядом в пространстве l_{p_0} , то $\{\|AT(e_n)\|_{l_\infty}\} \in l_{p_0}$. Аналогичным образом, $\{t_n \|AT(e_n)\|_{l_\infty(u_m^{-1})}\} \in l_{p_1}$. Следовательно,

$$\{\psi(u_m)\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(t_n) AT(e_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(t_n) w_n; \quad (5)$$

поэтому

$$\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_\infty, l_\infty(u_m^{-1}))_{p_0, p_1}.$$

Ввиду (5)

$$K(t, \{\psi(u_m)\}, \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(t_n) K(t, w_n, \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\});$$

поэтому в силу соотношения (2)

$$K(t, \{\psi(u_m)\}, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}) \leq C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(t_n) K(t, w_n, \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\}). \quad (6)$$

Применим к неравенству (6) теорему о K -делимости (см. [2]). Напомним, что теорема о K -делимости утверждает, что для любой банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ из неравенства

$$K(t, a; \{X_0, X_1\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t),$$

где $a \in X_0 + X_1$, а $\psi_n(t)$ — квазивогнутые функции, вытекает существование последовательности $a_n \in X_0 + X_1$, такой, что

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1) \quad \text{и} \quad K(t, a_n; \{X_0, X_1\}) \leq 6\psi_n(t).$$

Из K -делимости для пар $\{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}$ и неравенства (6) следует, что существует последовательность $w'_n \in l_{p_0} + l_{p_1}(u_m^{-1})$, такая, что

$$\{\psi(u_m)\} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(t_n) w'_n,$$

и

$$K(t, w'_n, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}) \leq 6CK(t, w_n, \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\}). \quad (7)$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t, w'_n, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}) = \|w'_n\|_{l_{p_0}}$$

и

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} K(t, w'_n, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}) = \|w'_n\|_{l_{p_1}(u_m^{-1})},$$

из неравенств (7) следует, что

$$\|w'_n\|_{l_{p_0}} \leq 6C\|w'_n\|_{l_\infty}, \quad \|w'_n\|_{l_{p_1}(u_m^{-1})} \leq 6C\|w'_n\|_{l_\infty(u_m^{-1})}.$$

Значит,

$$\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1}))_{p_0, p_1}.$$

Конструкция $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, очевидно, является интерполяционным функтором; поэтому образ последовательности $\{\psi(u_m)\}$ при действии линейного оператора $B: \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\} \rightarrow \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ принадлежит $\varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1}$. То есть $a = B(\{\psi(u_m)\}) \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))_{p_0, p_1}$. Таким образом, вложение (4) и лемма 1 доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вложение (4) в случае $p_0, p_1 \geq 2$ можно доказать без теоремы Карла–Беннета и K -делимости. Мы просто можем заметить, что в пространствах L_p из безусловной сходимости ряда (w_n) следует, что $\{\|w_n\|_{L_p}\} \in l_p$, если $p \geq 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Легко видеть, что $a \in \varphi(L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1))$ в том и только в том случае, когда $\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1}))$, где $\{u_m\}$ — балансирующая последовательность для функции $\psi(t) = K(t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$.

Напомним, что интерполяционная функция φ называется невырожденной, если области значений функций $\varphi(t, 1)$ и $\varphi(1, t)$ при $t > 0$ совпадают с $(0, \infty)$. Именно в этом случае балансировочная последовательность функции $\rho(t) = \varphi(1, t)$ оказывается двусторонней.

ЛЕММА 2. Если φ невырождена, то пространство $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ состоит из $x \in X_0 + X_1$, для которых

$$\{K(u_m, x, \{X_0, X_1\})\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})),$$

где $\{u_m\}$ — балансировочная последовательность для функции $K(t, x, \{X_0, X_1\})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Лемма 2, в частности, говорит о том, что пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ не зависят на самом деле от выбора балансировочной последовательности функции $\rho(t) = \varphi(1, t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Заметим, что пространство $\varphi(X_0, X_1)_{p, p}$ совпадает с пространством $(X_0, X_1)_{p, p}$, введенным С. Янсоном. Лемма 2 дает нам новое описание этих пространств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Покажем сначала, что лемма 2 справедлива для любой интерполяционной функции $\varphi \in \Phi_0$ и любой относительно полной банаховой пары. Напомним, что банахова пара $\{X_0, X_1\}$ называется относительно полной, если $X_0 = \tilde{X}_0$ и $X_1 = \tilde{X}_1$, где $\tilde{X}$ обозначает пополнение пространства X относительно $X_0 + X_1$.

Если $x \in \varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, то

$$x = \sum_n \rho(t_n) w_n, \quad (8)$$

где

$$\sum_n \|w_n\|_{X_0}^{p_0} < \infty, \quad \sum_n (t_n \|w_n\|_{X_1})^{p_1} < \infty.$$

Из разложения (8) следует неравенство

$$K(t, x, \{X_0, X_1\}) \leq \sum_n \rho(t_n) K(t, w_n, \{X_0, X_1\}).$$

Вновь положим $\psi(t) = K(t, x, \{X_0, X_1\})$. Тогда

$$K(t, \{\psi(u_m)\}, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}) \leq \sum_n \rho(t_n) K(t, w_n, \{X_0, X_1\}).$$

Ввиду K -делимости пары $\{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}$ существует последовательность $w'_n \in l_{p_0} + l_{p_1}(u_m^{-1})$, такая, что

$$\{\psi(u_m)\} = \sum_n \rho(t_n) w'_n$$

и

$$K(t, w'_n, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}) \leq 6CK(t, w_n, \{X_0, X_1\}) \quad \text{для всех } n. \quad (9)$$

В силу (9) получим

$$\|w'_n\|_{l_{p_0}} \leq 6C\|w_n\|_{X_0}, \quad \|w'_n\|_{l_{p_1}(u_m^{-1})} \leq 6C\|w_n\|_{X_0}$$

так же, как это было в лемме 1. Поэтому $\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1}))_{p_0, p_1}$ и $\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1}))$ по лемме 1.

Теперь предположим, что $\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})) = \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1}))_{p_0, p_1}$. Тогда

$$\{\psi(u_m)\} = \sum_n \rho(t_n) w'_n,$$

где

$$\{\|w'_n\|_{l_{p_0}}\} \in l_{p_0}, \quad \{\|w'_n\|_{l_{p_1}(u_m^{-1})}\} \in l_{p_1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K(t, a, \{X_0, X_1\}) &= \psi(t) \leq K(t, \{\psi(u_m)\}, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}) \\ &\leq C \sum_n \rho(t_n) K(t, w_n, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}). \end{aligned}$$

В силу K -делимости пары $\{X_0, X_1\}$ существует последовательность $w_n \in X_0 + X_1$, такая, что

$$a = \sum_n \rho(t_n) w_n \quad \text{и} \quad K(t, w_n, \{X_0, X_1\}) \leq 6CK(t, w'_n, \{l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})\}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} K(t, w_n, \{X_0, X_1\}) &\leq 6C\|w'_n\|_{l_{p_0}}, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} K(t, w_n, \{X_0, X_1\}) &\leq 6C\|w'_n\|_{l_{p_1}(u_m^{-1})}. \end{aligned}$$

Это значит, что

$$\|w_n\|_{\tilde{X}_0} \leq 6C\|w'_n\|_{l_{p_0}}, \quad \|w_n\|_{\tilde{X}_1} \leq 6C\|w'_n\|_{l_{p_1}(u_m^{-1})}.$$

Таким образом, $a \in \varphi(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)_{p_0, p_1}$. Поэтому, если $X_0 = \tilde{X}_0$ и $X_1 = \tilde{X}_1$, лемма 2 доказана без каких-либо ограничений на функцию $\varphi \in \Phi_0$. Можно проверить, что

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} = \varphi(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)_{p_0, p_1}$$

если φ невырожденна. Лемма 2 доказана.

Пусть теперь $\varphi \in \Phi_0$ и φ вырожденна. Если обе функции $\varphi(1, t)$ и $\varphi(t, 1)$ ограничены, то $\varphi(t, s) \asymp \min(s, t)$ и очевидно, что

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} = X_0 \cap X_1.$$

Пусть теперь $\varphi(1, t)$ ограничена, а $\varphi(t, 1)$ — нет. В этом случае балансирующая последовательность для $\rho(t) = \varphi(1, t)$ будет односторонней. Пусть интервал $\mathbb{M}$, где она задана, совпадает с множеством неположительных целых чисел, т. е. $\{t_n\}_{-\infty}^0$.

Покажем, что в этом случае

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} = (X_0, X_1)_{\varphi, p_0, p_1}^K \cap X_0,$$

где через $(X_0, X_1)_{\varphi, p_0, p_1}^K$ обозначено пространство тех $x \in X_0 + X_1$, для которых

$$\{K(u_m, x, \{X_0, X_1\})\} \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(u_m^{-1})).$$

Мы уже показали, что

$$(X_0, X_1)_{\varphi, p_0, p_1}^K = \varphi(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)_{p_0, p_1}.$$

Из того, что последовательность $\{t_n\}$ односторонняя, получим

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} \subset \varphi(X_0, X_1)_{\infty, \infty} \subset X_0.$$

Следовательно,

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} \subset (X_0, X_1)_{\varphi, p_0, p_1}^K \cap X_0.$$

Если теперь $x \in (X_0, X_1)_{\varphi, p_0, p_1}^K \cap X_0$, то найдется элемент $a \in (l_1, l_1(2^{-k}))_{\varphi, p_0, p_1}$, такой, что $x = Ua$, где $U: \{l_1, l_1(2^{-k})\} \rightarrow \{X_0, X_1\}$ (см. [2], где показано, что интерполяция из пары $\{l_1, l_1(2^{-k})\}$ в любую банахову пару в существенном описывается K -методом.) Пара $\{l_1, l_1(2^{-k})\}$ относительно полна. Поэтому в силу леммы 2 $a \in \varphi(l_1, l_1(2^{-k}))_{p_0, p_1}$; следовательно,

$$a = \sum_{n=-\infty}^0 \rho(t_n) a_n,$$

где $\{\|a_n\|_{l_1}\} \in l_{p_0}$, $\{t_n\|a_n\|_{l_1(2^{-k})}\} \in l_{p_1}$. Таким образом,

$$x = Ua = \sum_{n=-\infty}^0 \rho(t_n) U(a_n),$$

где $\{\|U(a_n)\|_{X_0}\} \in l_{p_0}$, $\{t_n\|U(a_n)\|_{X_1}\} \in l_{p_1}$. Следовательно, $x \in \varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$.

Таким образом, мы получили описание функтора $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ для любых функций $\varphi \in \Phi_0$. Нам в дальнейшем понадобится этот функтор для всех $\varphi \in \Phi$, потому что, если по крайней мере один из индексов p_0, p_1 равен бесконечности, функции $K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$ не обязательно принадлежат Φ_0 .

Напомним, что любая интерполяционная функция $\varphi(s, t)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(s, t) = \alpha s + \beta t + \varphi_0(s, t),$$

где $\varphi_0 \in \Phi_0$. Если α или β больше 0, то $\varphi \notin \Phi_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если φ — произвольная интерполяционная функция, то обозначим через $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ пространство

$$\alpha X_0 + \beta X_1 + \varphi_0(X_0, X_1)_{p_0, p_1},$$

где αX — пространство X с нормой $\|x\|_{\alpha X} = \alpha \|x\|_X$, если $\alpha > 0$, и $\alpha X = 0$, если $\alpha = 0$.

Заметим, что если и α , и β больше нуля, то

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} = X_0 + X_1$$

для любых p_0 и p_1 .

§2. Основная теорема

ТЕОРЕМА. Пусть $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ и $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$ — банаховы пары, где $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, и $a \in L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$. Положим $\varphi(s, t) = K(s, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\})$. Тогда

$$\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) = \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1},$$

где $r_0^{-1} = (q_0^{-1} - p_0^{-1})_+$ и $r_1^{-1} = (q_1^{-1} - p_1^{-1})_+$. (Как обычно x_+ означает положительную часть x .)

Доказательство является комбинацией следующих ниже предложений. Мы подробно рассмотрим лишь случай $\varphi \in \Phi_0$. Оставшийся случай $\varphi \notin \Phi_0$ может быть легко сведен к случаю $\varphi \in \Phi_0$, например, как это сделано в [11], где аналогичная ситуация возникает при $p_0 \leq q_0$ и $p_1 \leq q_1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любых $p_0, p_1, q_0, q_1, 1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, любых весов U_0, U_1, V_0, V_1 и для всех $a \in L_{p_0}(U_0) + L_{p_1}(U_1)$

$$\text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}) \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\} \subset \varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b = Ta$, где

$$T: \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}.$$

Напомним, что $\rho(t) = \varphi(1, t)$. Положим $a_\rho = \{\rho(t_n)\}$, $\psi(u) = K(u, b, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})$ и $b_\psi = \{\psi(u_m)\}$, где t_n — балансировочная последовательность для $\rho(t)$, а u_m — балансировочная последовательность для $\psi(u)$. Так как

$$K(1, t, a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}) = \varphi(1, t) = \rho(t) \asymp K(1, t, a_\rho, \{l_{p_0}, l_{p_1}(t_n^{-1})\}),$$

и

$$K(u, b, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) = \psi(u) \asymp K(u, b_\psi, \{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\}),$$

применив теорему Спарра к $\{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\}$ и $\{l_{p_0}, l_{p_1}(t_n^{-1})\}$, а также к парам $\{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$ и $\{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\}$, с помощью оператора T можно построить линейный оператор $S: \{l_{p_0}, l_{p_1}(t_n^{-1})\} \rightarrow \{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\}$, такой, что $Sa_\rho = b_\psi$. Отсюда следует, что

$$b_\psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho(t_n) S(e_n) \quad (\text{сходимость в } l_{q_0} + l_{q_1}(u_m^{-1})), \quad (10)$$

где $\{e_n\}$ — стандартный базис в l_p .

Рассмотрим вложения $\{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\} \subset \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\}$. Поскольку вложения $l_{q_i} \subset l_\infty$ являются $(1, q_i)$ -суммирующими операторами (по теореме Карла–Беннета), то так же, как и в [8], отсюда получим, что если $q_0 < p_0$, то образ стандартного базиса $\{e_n\}$ в l_{p_0} при действии оператора $S: l_{p_0} \rightarrow l_\infty$ является l_{r_0} -последовательностью, т.е. $\{\|S(e_n)\|_{l_\infty}\} \in l_{r_0}$, где $r_0^{-1} = q_0^{-1} - p_0^{-1}$. Аналогично, $\{t_n \|S(e_n)\|_{l_\infty(u_m^{-1})}\} \in l_{r_1}$, где $r_1^{-1} = q_1^{-1} - p_1^{-1}$. Следовательно, в любом случае

$$\{\|S(e_n)\|_{l_\infty}\} \in l_{r_0} \quad \text{и} \quad \{t_n \|S(e_n)\|_{l_\infty(u_m^{-1})}\} \in l_{r_1},$$

где $r_0^{-1} = (q_0^{-1} - p_0^{-1})_+$ и $r_1^{-1} = (q_1^{-1} - p_1^{-1})_+$.

Согласно (10), по определению $b_\psi \in \varphi(l_\infty, l_\infty(u_m^{-1}))_{r_0, r_1}$. В силу леммы 2 это означает, что

$$\{K(v_m, b_\psi, \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\})\} \in \varphi(l_{r_0}, l_{r_1}(v_m^{-1})),$$

где $\{v_m\}$ — любая балансировочная последовательность функции

$$K(v, b_\psi, \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\}) \asymp K(v, b_\psi, \{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\}) = \psi(v).$$

Значит, можно считать, что $v_m = u_m$, и в силу (2)

$$\begin{aligned} K(u_m, b, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}) &\asymp K(u_m, b_\psi, \{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\}) \\ &\asymp K(u_m, b_\psi, \{l_\infty, l_\infty(u_m^{-1})\}). \end{aligned}$$

Поэтому $\{K(u_m, b, \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\})\} \in \varphi(l_{r_0}, l_{r_1}(u_m^{-1}))$. Ввиду леммы 2 предложение доказано.

Следующие предложения посвящены обратному вложению

$$\varphi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1} \subset \text{Orb}(a, \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}).$$

Для любого $b \in \psi(L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1))_{r_0, r_1}$ мы должны найти линейный оператор $T \in \{L_{p_0}(U_0), L_{p_1}(U_1)\} \rightarrow \{L_{q_0}(V_0), L_{q_1}(V_1)\}$, такой, что $b = Ta$. Вновь, опираясь на теорему Спарра, заменим элемент a на a_ρ , элемент b на b_ψ , а исходные пары на $\{l_{p_0}, l_{p_1}(t_n^{-1})\}$ и $\{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\}$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{r_0}, l_{r_1}(u_m^{-1}))$. Тогда существуют последовательности $\{\beta_m^0\} \in l_{r_0}$ и $\{\beta_m^1\} \in l_{r_1}$, такие, что

$$K(s, t, \{\psi(u_m)\}, \{l_1(1/\beta_m^0), l_1(1/\beta_m^1 u_m)\}) \leq C\varphi(s, t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{r_0}, l_{r_1}(u_m^{-1}))$, то по определению $\psi(u_m) = \varphi(\alpha_m^0, \alpha_m^1 u_m)$, где $\{\alpha_m^0\} \in l_{r_0}$, $\{\alpha_m^1\} \in l_{r_1}$.

Рассмотрим свертку α_m^0 с ε_j^0 , где $\varepsilon_j^0 = (1 - \varepsilon)^{-j}$ при $j \leq 0$ и $\varepsilon_j^0 = 0$ при $j > 0$. Положим $\beta^0 = \varepsilon^0 * \alpha^0$. Аналогично, $\beta^1 = \varepsilon^1 * \alpha^1$, где $\varepsilon_j^1 = (1 - \varepsilon)^j$ при $0 \leq j$ и $\varepsilon_j^0 = 0$ при $j < 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Тогда

$$\beta_{m+1}^0(1 - \varepsilon) \leq \beta_m^0, \quad \beta_m^1(1 - \varepsilon) \leq \beta_{m+1}^1, \quad (11)$$

$\alpha_m^0 \leq \beta_m^0$, $\alpha_m^1 \leq \beta_m^1$ и $\beta^0 \in l_{r_0}$, $\beta^1 \in l_{r_1}$.

В самом деле, $\varepsilon^0, \varepsilon^1 \in l_1$; поэтому $\beta^0 \in l_{r_0}$, $\beta^1 \in l_{r_1}$ в силу свойств свертки. Поскольку $\varepsilon_0^0 = \varepsilon_0^1 = 1$, получим $\alpha_m^0 \leq \beta_m^0$, $\alpha_m^1 \leq \beta_m^1$.

По определению

$$\beta_m^0 = \sum_{k=-\infty}^0 (1 - \varepsilon)^k \alpha_{m-k}^0.$$

(Доопределим α^0 нулем вне интервала $\mathbb{M}$.)

Так как

$$\beta_{m+1}^0 = \sum_{k=-\infty}^{-1} (1 - \varepsilon)^{k+1} \alpha_{m-k}^0 = (1 - \varepsilon) \sum_{k=-\infty}^{-1} (1 - \varepsilon)^k \alpha_{m-k}^0,$$

то $\beta_{m+1}^0(1 - \varepsilon) \leq \beta_m^0$.

Аналогично,

$$\beta_m^1 = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \varepsilon)^k \alpha_{m-k}^1 \quad \text{и} \quad \beta_{m+1}^1 = \sum_{k=-1}^{\infty} (1 - \varepsilon)^{k+1} \alpha_{m-k}^1 = (1 - \varepsilon) \sum_{k=-1}^{\infty} (1 - \varepsilon)^k \alpha_{m-k}^1.$$

Следовательно, $\beta_m^1(1 - \varepsilon) \leq \beta_{m+1}^1$.

Рассмотрим теперь K -функционал последовательности $\{\psi(u_m)\}$, который мы собираемся оценить. Легко видеть, что

$$K(s, t, \{\psi(u_m)\}, \{l_1(1/\beta_m^0), l_1(1/\beta_m^1 u_m)\}) = \sum_{m \in \mathbb{M}} \psi(u_m) \min \left(\frac{s}{\beta_m^0}, \frac{t}{\beta_m^1 u_m} \right).$$

Для $s = \beta_k^0$, $t = \beta_k^1 u_k$ получается неравенство

$$K(\beta_k^0, \beta_k^1 u_k) \leq \sum_{m \leq k} \psi(u_m) \frac{\beta_k^0}{\beta_m^0} + \sum_{m \geq k} \psi(u_m) \frac{\beta_k^1 u_k}{\beta_m^1 u_m}.$$

В силу (1) и (11) его правая часть оценивается последовательностью, эквивалентной $\psi(u_k)$.

Действительно, ввиду (1)

$$\frac{\psi(u_m)}{\psi(u_{m+1})} \leq \frac{1}{q}, \quad \frac{u_m}{\psi(u_m)} \frac{\psi(u_{m+1})}{u_{m+1}} \leq \frac{1}{q},$$

и, согласно (11),

$$\frac{\beta_{m+1}^0}{\beta_m^0} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad \frac{\beta_m^1}{\beta_{m+1}^1} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\frac{\psi(u_m)}{\beta_m^0} \frac{\beta_{m+1}^0}{\psi(u_{m+1})} \leq \frac{1}{q'}, \quad \frac{\beta_m^1 u_m}{\psi(u_m)} \frac{\psi(u_{m+1})}{\beta_{m+1}^1 u_{m+1}} \leq \frac{1}{q'},$$

где $q' > 1$ за счет малости ε .

Поэтому

$$\frac{\psi(u_m)}{\beta_m^0} \frac{\beta_k^0}{\psi(u_k)} \leq \left(\frac{1}{q'}\right)^{k-m} \quad (12)$$

при $m \leq k$ и

$$\frac{\beta_m^1 u_m}{\psi(u_m)} \frac{\psi(u_k)}{\beta_k^1 u_k} \leq \left(\frac{1}{q'}\right)^{m-k} \quad (13)$$

при $m \geq k$.

(В случае когда мы рассматриваем произвольную балансировочную последовательность $\{u_m\}$ функции ψ , а не последовательность (1), мы можем сразу, исходя из определения, найти такое $q > 1$, что

$$\frac{\psi(u_m)}{\psi(u_k)} \leq \frac{C}{q^{k-m}}$$

при $m \leq k$ и

$$\frac{u_m}{\psi(u_m)} \frac{\psi(u_k)}{u_k} \leq \frac{C}{q^{m-k}}$$

при $m \geq k$. Поэтому и в этом случае мы получаем неравенства (12)–(13), правда, с некоторой константой.)

Отсюда следует, что

$$\sum_{m \leq k} \psi(u_m) \frac{\beta_k^0}{\beta_m^0} \leq C \frac{q'}{q' - 1} \psi(u_k), \quad \sum_{m \geq k} \psi(u_m) \frac{\beta_k^1 u_k}{\beta_m^1 u_m} \leq C \frac{q'}{q' - 1} \psi(u_k).$$

Таким образом,

$$K(\beta_k^0, \beta_k^1 u_k) \leq C \frac{q'}{q' - 1} \psi(u_k) = C \frac{q'}{q' - 1} \varphi(\alpha_k^0, \alpha_k^1 u_k) \leq C \frac{q'}{q' - 1} \varphi(\beta_k^0, \beta_k^1 u_k);$$

следовательно,

$$K(s, t, \{\psi(u_m)\}, \{l_1(1/\beta_m^0), l_1(1/\beta_m^1 u_m)\}) \leq C' \varphi(s, t).$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $b_\psi = \{\psi(u_m)\} \in \varphi(l_{r_0}, l_{r_1}(u_m^{-1}))$. Тогда существует линейный оператор $S: \{l_{p_0}, l_{p_1}(t_n^{-1})\} \rightarrow \{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\}$, такой, что $S(a_\rho) = b_\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности, мы можем предположить, что $p_0 \geq q_0$, $p_1 \geq q_1$. По предложению 2 найдутся последовательности $\beta^0 \in l_{r_0}$ и $\beta^1 \in l_{r_1}$. Рассмотрим вложения

$$\{l_1(1/\beta_m^0), l_1(1/\beta_m^1 u_m)\} \subset \{l_{p_0}(1/\beta_m^0), l_{p_1}(1/\beta_m^1 u_m)\}, \quad (14)$$

$$\{l_{p_0}(1/\beta_m^0), l_{p_1}(1/\beta_m^1 u_m)\} \subset \{l_{q_0}, l_{q_1}(u_m^{-1})\} \quad (15)$$

и последовательность b_ψ .

В силу (14) и предложения 2 получим

$$K(s, t, \{\psi(u_m)\}, \{l_{p_0}(1/\beta_m^0), l_{p_1}(1/\beta_m^1 u_m)\}) \leq C\varphi(s, t).$$

Поскольку $\varphi(s, t) \asymp K(s, t, a_\rho, \{l_{p_0}, l_{p_1}(t_n^{-1})\})$, по теореме Спарра существует линейный оператор $S: \{l_{p_0}, l_{p_1}(t_n^{-1})\} \rightarrow \{l_{p_0}(1/\beta_m^0), l_{p_1}(1/\beta_m^1 u_m)\}$, отображающий a_ρ в b_ψ .

Суперпозиция S и (15) дает нужный нам линейный оператор. Таким образом, предложение 3 и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennett G. Inclusion mappings between l_p spaces. J. Funct. Anal., **13**, 20–27 (1973).
2. Brudnyi Ju. A., Krugliak N. Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. I. North Holland, Amsterdam, 1991.
3. Brudnyi Ju. A., Shteinberg A. Calderon couples of Lipschitz spaces. J. Funct. Anal., **131**, 459–498 (1995).
4. Дмитриев В. И. Об интерполяции операторов в пространствах L_p . ДАН СССР, **260**, 1051–1054 (1981).
5. Janson S. Minimal and maximal methods in interpolation. J. Funct. Anal., **44**, 50–73 (1981).
6. Lions J.-L., Peetre J. Sur une classe d'espaces d'interpolation. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **19**, 5–68 (1964).
7. Лозановский Г. Я. О некоторых банаховых структурах, II. Сиб. матем. ж., **12**, 562–567 (1971).
8. Овчинников В. И. Точная интерполяционная теорема в пространствах L_p . ДАН СССР, **272**, 300–303 (1983).
9. Ovchinnikov V. I. Description of orbits. In: Israel Math. Conf. Proc., Vol. 5, 1992, pp. 291–292.
10. Ovchinnikov V. I. On the description of interpolation orbits in couples of L_p spaces, when they are not described by the K -method. In: Israel Math. Conf. Proc., Vol. 5, 1992, pp. 187–206.
11. Ovchinnikov V. I. The method of orbits in interpolation theory. Math. Rep., **1**, part 2, 349–516 (1984).
12. Ovchinnikov V. I. Interpolation orbits in couples of L_p spaces. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **334**, 881–884 (2002).
13. Sparr G. Interpolation des espaces L_w^p . C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A–B, **278**, 491–492 (1974).
14. Sparr G. Interpolation of weighted L_p spaces. Studia Math., **62**, 229–271 (1978).