Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Казейкина, Отсутствие солитонов кондуктивного типа для уравнения Веселова–Новикова при нулевой энергии, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 79–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3100>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:40:40

Авторы выражают благодарность В. И. Чилину за полезное обсуждение результатов и за предложения по улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. F. Ber, F. A. Sukochev, Trans. Amer. Math. Soc., **264**:10 (2012), 5571–5587; <http://arxiv.org/abs/1008.3210>. [2] J. Calkin, Ann. of Math., **42** (1941), 839–873. [3] M. J. Hoffman, Indiana Univer. Math. J., **30**:6 (1981), 859–869. [4] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971. [5] М. А. Муратов, В. И. Чилин, *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов*, Праці Ін-ту математики НАН України, т. 69, Ін-т математики НАН України, Київ, 2007.

DCF Technologies Ltd, Ташкент, Узбекистан
e-mails: ber@ucd.uz, aber1960@mail.ru

Поступило в редакцию
3 февраля 2011 г.

School of Mathematics and Statistics,
University of New South Wales, Kensington, Australia
e-mail: f.sukochev@unsw.edu.au

УДК 517.95

Отсутствие солитонов кондуктивного типа для уравнения Веселова–Новикова при нулевой энергии

© 2013. А. В. КАЗЕЙКИНА

1. Введение. В этой заметке мы рассматриваем уравнение Веселова–Новикова при нулевой энергии

$$\begin{aligned}\partial_t v &= 4 \operatorname{Re}(4\partial_z^3 v + \partial_z(vw)), \\ \partial_{\bar{z}} w &= -3\partial_z v, \quad v = \bar{v}, \\ v &= v(x, t), \quad w = w(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Определение 1. Пара (v, w) называется *достаточно локализованным решением уравнения (1)*, если

- $v, w \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R})$, $v(\cdot, t) \in C^3(\mathbb{R}^2)$,
- $|\partial_x^j v(x, t)| \leq q(t)(1 + |x|)^{-2-\varepsilon}$, $|j| \leq 3$, для некоторых $q(t) > 0$, $\varepsilon > 0$, $w(x, t) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$,
- (v, w) удовлетворяет (1).

Определение 2. Решение (v, w) уравнения (1) называется *солитоном (бегущей волной)*, если $v(x, t) = V(x - ct)$, $c \in \mathbb{R}^2$.

Уравнение (1) является аналогом классического КдФ. Если $v = v(x_1, t)$, $w = w(x_1, t)$, то оно сводится к уравнению КдФ. Кроме того, уравнение (1)

интегрируемо при помощи преобразования рассеяния для двумерного уравнения Шрёдингера

$$L\psi = 0, \quad (2)$$

$$L = -\Delta + v(x, t), \quad \Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Уравнение (1) содержится неявно в [5] как уравнение, обладающее следующим представлением:

$$\partial L / \partial t = [L, A] + BL, \quad (3)$$

где оператор L определен в (2), A и B — подходящие дифференциальные операторы третьего и нулевого порядка соответственно и $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор. В явной форме уравнение (1) было найдено в [9], [10], где оно также изучалось в периодической постановке. Для быстро убывающих потенциалов уравнение (1) и задача рассеяния для (2) изучались в [1], [3], [4], [11]. В [4] была также детально рассмотрена связь этих задач с задачей Кальдерона о проводимости.

Определение 3. Потенциал $v \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p < 2$, является *потенциалом кондуктивного типа*, если $v = \gamma^{-1/2}\Delta\gamma^{1/2}$ для некоторой вещественной положительной функции $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, такой, что $\gamma \geq \delta_0 > 0$ и $\nabla\gamma^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^2)$.

Потенциалы кондуктивного типа естественно возникают, когда задача Кальдерона о проводимости изучается при помощи рассмотрения краевой задачи для двумерного уравнения Шрёдингера при нулевой энергии (см. [4], [6], [7]); кроме того, в [6] было показано, что для этого типа потенциалов данные рассеяния для (2) всюду корректно определены.

Основной результат данной заметки состоит в следующем: для уравнения (1) не существует достаточно локализованных солитонов кондуктивного типа. Доказательство основано на идеях, предложенных в [8].

Данная работа выполнена в рамках научных исследований под руководством Р. Г. Новикова.

2. Данные рассеяния для двумерного уравнения Шрёдингера при нулевой энергии с потенциалом кондуктивного типа. Рассмотрим уравнение Шрёдингера (2) на плоскости с потенциалом $v(z)$, $z = x_1 + ix_2$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$v(z) = \overline{v(\bar{z})}, \quad v(z) \in L^\infty(\mathbb{C}), \quad (4)$$

$$|v(z)| < q(1 + |z|)^{-2-\varepsilon} \quad \text{для некоторых } q > 0, \varepsilon > 0.$$

Для $k \in \mathbb{C}$ рассмотрим решения $\psi(z, k)$ уравнения (2) со следующей асимптотикой:

$$\psi(z, k) = e^{ikz}\mu(z, k), \quad \mu(z, k) = 1 + o(1) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (5)$$

т. е. экспоненциально растущие решения Фаддеева для двумерного уравнения Шрёдингера (2) при нулевой энергии, см. [2], [3], [7].

Известно, что если v удовлетворяет (4) и является потенциалом кондуктивного типа, то для любого $k \in \mathbb{C} \setminus 0$ существует единственное непрерывное решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (5) (см. [6]). Таким образом, данные рассеяния b для потенциала v кондуктивного типа определены и непрерывны:

$$b(k) = \iint_{\mathbb{C}} e^{i(ky + \bar{k}\bar{y})} v(y) \mu(y, k) d\operatorname{Re} y d\operatorname{Im} y, \quad k \in \mathbb{C} \setminus 0. \quad (6)$$

Кроме того (см. [6]), функция $\mu(z, k)$ из (5) удовлетворяет следующему $\bar{\partial}$ -уравнению:

$$\frac{\partial \mu(z, k)}{\partial \bar{k}} = \frac{1}{4\pi k} e^{-i(kz + \bar{k}\bar{z})} b(k) \overline{\mu(z, k)}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{C} \setminus 0, \quad (7)$$

и имеет следующие предельные свойства:

$$\mu(z, k) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad |k| \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$\mu(z, k) \text{ ограничена в окрестности } k = 0. \quad (9)$$

Следующая лемма описывает данные рассеяния для потенциала, полученного из исходного при помощи преобразования сдвига.

Лемма 1. Пусть $v(z)$ — потенциал, удовлетворяющий условиям (4) с данными рассеяния $b(k)$. Данные рассеяния $b_y(k)$ для потенциала $v_y(z) = v(z - y)$ связаны с $b(k)$ при помощи формулы

$$b_y(k) = e^{i(ky + \bar{k}\bar{y})} b(k), \quad k \in \mathbb{C} \setminus 0, \quad y \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

Доказательство. Заметим, что $\psi(z - y, k)$ удовлетворяет (2) с $v_y(z)$ и ведет себя асимптотически, как $\psi(z - y, k) = e^{ik(z-y)}(1 + o(1))$, при $|z| \rightarrow \infty$. Таким образом, $\psi_y(z, k) = e^{iky}\psi(z - y, k)$ и $\mu_y(z, k) = \mu(z - y, k)$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} b_y(k) &= \iint_{\mathbb{C}} e^{i(k\zeta + \bar{k}\bar{\zeta})} v_y(\zeta) \mu_y(\zeta, k) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta \\ &= \iint_{\mathbb{C}} e^{i(k\zeta + \bar{k}\bar{\zeta})} v(\zeta - y) \mu(\zeta - y, k) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta = e^{i(ky + \bar{k}\bar{y})} b(k). \quad \square \end{aligned}$$

Что касается динамики по времени данных рассеяния, в [1], [3] было показано, что если решение (v, w) уравнения (1) существует и данные рассеяния для этого уравнения всюду определены, то эволюция по времени данных рассеяния описывается следующим образом:

$$b(k, t) = e^{8i(k^3 + \bar{k}^3)t} b(k, 0), \quad k \in \mathbb{C} \setminus 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

3. Отсутствие солитонов кондуктивного типа.

Теорема 1. Пусть (v, w) — достаточно локализованный солитон уравнения (1) кондуктивного типа. Тогда $v \equiv 0$, $w \equiv 0$.

Схема доказательства. Из (10), (11), непрерывности $b(k)$ на $\mathbb{C} \setminus 0$ и того факта, что функции $k, \bar{k}, k^3, \bar{k}^3, 1$ являются линейно независимыми в окрестности каждой точки, следует, что $b \equiv 0$. Из уравнения (7) получаем, что функция $\mu(z, k)$ голоморфна по k при $k \in \mathbb{C} \setminus 0$. Тогда из свойств (8), (9) и теоремы Лиувилля следует, что $\mu \equiv 1$. Значит, $\psi(z, k) = e^{ikz}$, и из (2) вытекает, что $v \equiv 0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Boiti, J. J. P. Leon, M. Manna, F. Pempinelli, Inverse Problems, **3**:1 (1987), 25–36. [2] Л. Д. Фаддеев, Докл. АН СССР, **165** (1965), 514–517. [3] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, Функциональный анализ и его прил., **22**:1 (1988), 23–33. [4] M. Lassas, J. L. Mueller, S. Siltanen, Comm. Partial Differential Equations, **32**:4–6 (2007), 591–610. [5] С. В. Манаков, УМН, **31**:5 (1976), 245–246. [6] A. I. Nachman, Ann. of Math.,

143:1 (1995), 71–96. [7] Р. Г. Новиков, Функци. анализ и его прил., 22:4 (1988), 11–22. [8] R. G. Novikov, Phys. Lett. A, 375:9 (2011), 1233–1235. [9] А. П. Веселов, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, 279:1 (1984), 20–24. [10] А. П. Веселов, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, 279:4 (1984), 784–788. [11] Т.-Y. Tsai, Inverse Problems, 9:6 (1993), 763–787.

Московский государственный университет
CMAP, Ecole Polytechnique, France
e-mail: kazeykina@cmaph.polytechnique.fr

Поступило в редакцию
28 июня 2011 г.

УДК 519.171.2+512.55

О парах операторов, связанных квадратичным соотношением*

© 2013. В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко

1. Введение. Рассмотрим конечномерное линейное пространство $\mathcal{V}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и набор линейных операторов $(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ в $\mathcal{V}$. Напомним, что набор $(\mathcal{A}_k)_{k=1}^n$ называется неразложимым, если $\mathcal{V}$ нельзя разложить в прямую сумму нетривиальных подпространств $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, инвариантных относительно всех операторов набора. Наборы $(\mathcal{A}_k)_{k=1}^n$ в $\mathcal{V}$ и $(\widetilde{\mathcal{A}}_k)_{k=1}^n$ в $\mathcal{V}$ подобны, если существует обратимый линейный оператор $\mathcal{C}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, такой, что $\widetilde{\mathcal{A}}_k = \mathcal{C} \mathcal{A}_k \mathcal{C}^{-1}$, $k = 1, \dots, n$.

В случае одного оператора задача классификации неразложимых операторов с точностью до подобия сводится к построению в пространстве V базиса Жордана, при этом клетки Жордана исчерпывают список неразложимых операторов. Классификация неразложимых наборов линейных операторов с точностью до подобия оказывается чрезвычайно сложной задачей уже в случае $n = 2$ (см., например, [1], [2]). Естественно поэтому попытаться наложить на набор операторов условия, при которых эта задача может оказаться поддающейся решению. Самое простое из таких условий — коммутация, но, как показано в [3], [4], задача описания с точностью до подобия пар коммутирующих операторов остается сложной (несмотря на то, что для коммутирующих операторов существует базис, в котором матрицы этих операторов одновременно имеют треугольный вид). Даже при дополнительном ограничении $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^3 = \mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0$ задача описания с точностью до подобия пар коммутирующих операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ не поддается решению (является дикой [5]).

В настоящей работе изучается задача описания с точностью до подобия неразложимых пар операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, связанных квадратичным соотношением общего вида

$$P_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \alpha \mathcal{A}^2 + \beta \mathcal{A} \mathcal{B} + \gamma \mathcal{B} \mathcal{A} + \delta \mathcal{B}^2 + \epsilon \mathcal{A} + \zeta \mathcal{B} + \chi \mathcal{I} = 0 \quad (i)$$

($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \chi \in \mathbb{C}$). Доказано, что невырожденными аффинными заменами образующих это квадратичное соотношение может быть приведено к одному из

*Работа частично поддержана грантом DFG SCHM1009/4-1 и совместным грантом ДФФД-РФФИ Ф40.01/008.