Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Ружанский, Й. Вирт, О мультипликаторах на компактных группах Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 87–91

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 16:15:54

Авторы выражают искреннюю благодарность В. М. Бондаренко, Ю. А. Дрозду, С. А. Кругляку и рецензентам работы за полезные советы и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Donovan, M. R. Freislich, *The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras*, Carleton Math. Lecture Notes, vol. 5, Carleton Univ., Ottawa, 1973.
 [2] Ю. А. Дрозд, в кн.: Представления и квадратичные формы, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1978, 39–74. [3] С. А. Кругляк, Докл. АН СССР, **153**:6 (1963), 1253–1256.
 [4] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, Функци. анализ и его прил., **3**:4 (1969), 81–82.
 [5] Ю. А. Дрозд, Функци. анализ и его прил., **6**:4 (1972), 41–43. [6] V. L. Ostrovskiy, Yu. S. Samoilenko, *Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented *-Algebras. I. Representations by Bounded Operators*, Rev. Math. Math. Phys., vol. 11, No. 1, Gordon & Breach, London, 1999. [7] В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко, Зап. научн. сем. ЛОМИ (Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика, т. 10), **172** (1989), 121–129. [8] V. L. Ostrovskiy, Yu. S. Samoilenko, Seminar Sophus Lie, **3** (1993), 185–218. [9] М. В. Ахрамович, М. А. Муратов, Таврический вестник информатики и математики, 2010, № 2, 17–25. [10] M. Hoshino, J. Miyachi, Tsukuba J. Math., **12**:1 (1988), 65–93. [11] Y. Han, J. Algebra, **247**:1 (2002), 57–77. [12] V. Bavula, V. Bekkert, Comm. Algebra, **28**:11 (2000), 5067–5100. [13] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, УМН, **23**:2 (1968), 3–59.

Институт математики НАН Украины
e-mail: vo@imath.kiev.ua

Поступило в редакцию
28 февраля 2011 г.

Институт математики НАН Украины
e-mail: yurii_sam@imath.kiev.ua

УДК 517.518.12

О мультипликаторах на компактных группах Ли*

© 2013. М. В. Ружанский, Й. Вирт

1. Введение. Пусть G — компактная группа Ли размерности n с нейтральным элементом 1 и $\widehat{G}$ — множество ее (непрерывных) неприводимых унитарных представлений. Глобальное преобразование Фурье на G и обратное к нему задаются в терминах классов эквивалентности $[\xi]$ неприводимых унитарных представлений $\xi: G \rightarrow U(d_\xi)$ следующим образом:

$$(\mathcal{F}\phi)(\xi) = \widehat{\phi}(\xi) = \int_G \phi(x)\xi(x)^* dx, \quad \phi(x) = \sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_\xi \operatorname{Tr}(\xi(x)\widehat{\phi}(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{\phi}](x). \quad (1)$$

Теорема Петера–Вейля влечет за собой тождество Планшереля

$$\|\phi\|_2^2 = \sum_{[\xi] \in \widehat{G}} d_\xi \|\widehat{\phi}(\xi)\|_{HS}^2 =: \|\widehat{\phi}\|_{\ell^2(\widehat{G})}^2, \quad (2)$$

*Работа поддержана EPSRC, грант EP/G007233/1.

где $\|\hat{\phi}(\xi)\|_{HS}^2 = \text{Tr}(\hat{\phi}(\xi)\hat{\phi}(\xi)^*)$ — матричная норма Гильберта–Шмидта. Формулы обращения (1) остаются верными для всех распределений $\phi \in \mathcal{D}'(G)$ (обобщенных функций), и ряд Фурье сходится в $C^\infty(G)$ для гладких функций ϕ . Удобно ввести обозначение $\langle \xi \rangle = \max\{1, \lambda_\xi\}$, где $-\lambda_\xi^2$ — собственное значение оператора Лапласа–Бельтрами (Казимира), соответствующее представлению ξ . Пространства Соболева $H^s(G)$ можно охарактеризовать условием

$$\phi \in H^s(G) \iff (\xi \mapsto \langle \xi \rangle^s \hat{\phi}(\xi)) \in \ell^2(\hat{G}),$$

где $\ell^2(\hat{G})$ — пространство матричнозначных последовательностей с нормой, задаваемой формулой (2).

Линейные непрерывные операторы $A: C^\infty(G) \rightarrow \mathcal{D}'(G)$ можно описать в терминах их матричных символов, определенных с помощью формулы

$$\sigma_A(x, \xi) = \xi(x)^*(A\xi)(x), \quad (3)$$

где $(A\xi)_{ij}(x) = (A\xi_{ij})(x)$ — матрица, получаемая применением оператора A к компонентам ξ_{ij} . Таким образом, символ σ_A — это функция на $G \times \hat{G}$ со значениями в $\mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi}$. Можно показать, что для любой функции $\phi \in C^\infty(G)$ выполнено равенство

$$(A\phi)(x) = \sum_{[\xi] \in \hat{G}} d_\xi \text{Tr}(\xi(x)\sigma_A(x, \xi)\hat{\phi}(\xi)). \quad (4)$$

Оператор A с матричным символом σ_A также обозначим через $\text{op}(\sigma_A)$. Описанная квантизация (3)–(4) и ее свойства были изучены в [7]. Оператор A является мультипликатором Фурье, если его символ $\sigma_A(x, \xi)$ не зависит от x . Это означает, что A коммутирует с левыми сдвигами. Можно легко показать, что такие операторы A непрерывны в $L^2(G)$ тогда и только тогда, когда $\sup_{[\xi] \in \hat{G}} \|\sigma_A(\xi)\|_{\text{op}} < \infty$, где $\|\cdot\|_{\text{op}}$ — операторная норма на пространстве $\mathbb{C}^{d_\xi}$.

В книге [7], а также в статье [8], была дана характеристика псевдодифференциальных операторов хёрмандеровских классов на группе G в терминах их матричнозначных символов. Формулировки, так же как и последующие утверждения для мультипликаторов, зависят от так называемых разностных операторов. Рассмотрим пространство матричнозначных последовательностей

$$\Sigma(\hat{G}) = \{\sigma : \xi \mapsto \sigma(\xi) \in \mathbb{C}^{d_\xi \times d_\xi} \mid \exists N : \|\sigma(\xi)\|_{\text{op}} \lesssim \langle \xi \rangle^N\}.$$

Пусть гладкая функция $q \in C^\infty(G)$ имеет нуль порядка ℓ в $1 \in G$. Определим соответствующий разностный оператор Q порядка ℓ формулой

$$Q\sigma = \mathcal{F}(q(x)\mathcal{F}^{-1}\sigma). \quad (5)$$

Заметим что если $\sigma \in \Sigma(\hat{G})$, то $\mathcal{F}^{-1}\sigma \in \mathcal{D}'(G)$, и, значит, определение корректно. Различные семейства разностных операторов были исследованы в [8]. Особенно важными оказываются разностные операторы, возникающие из матричных коэффициентов представлений. Для фиксированного неприводимого представления ξ_0 определим матричнозначный разностный оператор $\xi_0\mathbb{D} = (\xi_0\mathbb{D}_{ij})_{i,j=1,\dots,d_{\xi_0}}$, соответствующий элементам матрицы $\xi_0(x) - \text{I}$, с $q_{ij}(x) = \xi_0(x)_{ij} - \delta_{ij}$ в (5), где δ_{ij} — дельта Кронекера. Будем опускать индекс ξ_0 , если представление ξ_0 фиксировано. Для последовательности $\mathbb{D}_1 = \xi_1\mathbb{D}_{i_1j_1}$, $\mathbb{D}_2 = \xi_2\mathbb{D}_{i_2j_2}, \dots, \mathbb{D}_k = \xi_k\mathbb{D}_{i_kj_k}$ разностных операторов такого типа с $[\xi_m] \in \hat{G}$,

$1 \leq i_m, j_m \leq d_{\xi_m}$, $1 \leq m \leq k$, положим $\mathbb{D}^\alpha = \mathbb{D}_1^{\alpha_1} \dots \mathbb{D}_k^{\alpha_k}$. В дальнейшем мы будем работать с семейством Δ_0 представлений, определяемым следующим образом. Пусть $\widetilde{\Delta}_0$ — множество неприводимых компонент присоединенного представления, т.е. имеет место разложение $\text{Ad} = (\dim Z(G))1 \oplus \bigoplus_{[\xi] \in \widetilde{\Delta}_0} \xi$, где ξ — неприводимые представления и 1 — тривиальное одномерное представление. В случае нетривиального центра $Z(G)$ расширим семейство $\widetilde{\Delta}_0$ до (некоторого) семейства Δ_0 , добавив к $\widetilde{\Delta}_0$ набор неприводимых представлений, прямая сумма которых нетривиальна на центре, таким образом, чтобы функция

$$\rho^2(x) = \sum_{[\xi] \in \Delta_0} (d_\xi - \text{Tr } \xi(x)) \geq 0$$

(имеющая нуль только при $x = 1$) являлась квадратом некоторой функции расстояния на G в окрестности нейтрального элемента. Такое расширение всегда возможно, и пусть Δ_0 — любое из таких расширений, а в случае тривиального центра возьмем $\Delta_0 = \widetilde{\Delta}_0$. Обозначим через $\mathbb{A}$ разностный оператор второго порядка, соответствующий функции $\rho^2(x)$, $\mathbb{A} = \mathcal{F} \rho^2(x) \mathcal{F}^{-1}$. В дальнейшем будем подразумевать, что оператор $\mathbb{D}^\alpha$ составлен только из операторов $\xi_m \mathbb{D}_{i_m j_m}$ с $[\xi_m] \in \Delta_0$.

2. Формулировка результатов. Приведенное ниже условие (6) — естественное ослабление условия на символы, обеспечивающего непрерывность в L^p соответствующих псевдодифференциальных операторов нулевого порядка; этим обобщается теорема Михлина–Хёрмандера ([5], [6] и [4]) на произвольные компактные группы Ли.

Теорема 1. Обозначим через $\varkappa$ наименьшее четное целое число, большее $\frac{1}{2} \dim G$. Пусть $A: C^\infty(G) \rightarrow \mathcal{D}'(G)$ — инвариантный оператор, матричный символ σ_A которого удовлетворяет неравенствам

$$\|\mathbb{A}^{\varkappa/2} \sigma_A(\xi)\|_{\text{op}} \leq C \langle \xi \rangle^{-\varkappa} \quad \text{и} \quad \|\mathbb{D}^\alpha \sigma_A(\xi)\|_{\text{op}} \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad (6)$$

для всех мультииндексов α с $|\alpha| \leq \varkappa - 1$ и для всех $[\xi] \in \widehat{G}$. Тогда A — оператор слабого¹⁾ типа $(1, 1)$ и является ограниченным в $L^p(G)$ для всех $1 < p < \infty$.

Доказательства приведенных утверждений можно найти в [9]. Сейчас приведем несколько следствий теоремы 1.

Теорема 2. Предположим, что для некоторого $\rho \in [0, 1]$ матричный символ σ_A принадлежит $\mathcal{S}_\rho^0(G)$, т.е. по определению для всех α выполнено неравенство

$$\|\mathbb{D}^\alpha \sigma_A(\xi)\|_{\text{op}} \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-\rho|\alpha|}.$$

Тогда A — непрерывный оператор из²⁾ $W^{p,r}(G)$ в $L^p(G)$ для $r = \varkappa(1-\rho)|1/p - 1/2|$ с таким же $\varkappa$, как в теореме 1, и $1 < p < \infty$.

¹⁾ A — оператор слабого типа $(1, 1)$, если найдется константа $C > 0$, такая, что для всех $\lambda > 0$ и $u \in L^1(G)$ выполнено неравенство $\mu\{x \in G : |Au(x)| > \lambda\} \leq C \|u\|_{L^1(G)}/\lambda$, где μ — мера Хаара на G .

²⁾ Здесь $W^{p,r}(G)$ — пространство Соболева, состоящее из всех обобщенных функций f , для которых $(1 - \mathcal{L})^{r/2} f \in L^p(G)$, где $\mathcal{L}$ — оператор Лапласа–Бельтрами (Казимира) на G .

Эта теорема применима, в частности, к параметрикам, построенным в [8]. Приведем два примера на группе $SU(2) \cong S^3$. Пусть D_1, D_2 и D_3 — ортонормированный базис в $\mathfrak{su}(2)$. Тогда сублапласиан $\mathcal{L}_s = D_1^2 + D_2^2$, а также групповой «оператор теплопроводности» $\mathcal{H} = D_3 - D_1^2 - D_2^2$ имеют параметрикс из класса¹⁾ $\text{ор } \mathcal{S}_{1/2}^{-1}(S^3)$. Как следствие, получаем субэллиптические оценки

$$\|u\|_{W^{p,1-|1/p-1/2|}(S^3)} \leq C_p \|\mathcal{L}_s u\|_{L^p(S^3)} \quad \text{и} \quad \|u\|_{W^{p,1-|1/p-1/2|}(S^3)} \leq C_p \|\mathcal{H}u\|_{L^p(S^3)} \quad (7)$$

для всех $1 < p < \infty$. Рассмотрим теперь операторы, которые локально не обратимы, а также локально не гипоеллиптичны.

Следствие 3. *Для каждого левоинвариантного вещественного векторного поля X на G существует дискретное множество $\mathcal{C} \subset i\mathbb{R}$, такое, что для любого комплексного $c \notin \mathcal{C}$ оператор $X + c$ обратим с обратным оператором в классе $\text{ор } \mathcal{S}_0^0(G)$. Следовательно, имеет место оценка*

$$\|f\|_{L^p(G)} \leq C_p \|(X + c)f\|_{W^{p,\infty|1/p-1/2|}(G)}$$

для всех $1 < p < \infty$ и всех функций f с $\mathcal{K}$, определенным, как и ранее.

В случае группы $G = SU(2)$ множество $\mathcal{C}$ совпадает с множеством чисел $it\mathbb{Z}$, где $\pm it$ — собственные значения матрицы второго порядка, порождающей векторное поле X . Так, $\mathcal{C} = i\frac{1}{2}\mathbb{Z}$, если, например, $X = D_3$.

Теорема Хёрмандера о мультипликаторах [4], хотя и сформулирована на $\mathbb{R}^n$, может быть перенесена естественным образом на тор $\mathbb{T}^n$. Условия теоремы 1 на разностный оператор наивысшего порядка уточняют теоремы о мультипликаторах на торе, по крайней мере для некоторых размерностей. Если $G = \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, то множество Δ_0 можно взять состоящим из $2n$ функций $e^{\pm 2\pi i x_j}$, $1 \leq j \leq n$. Следовательно, по определению имеем $\rho^2(x) = 2n - \sum_{j=1}^n (e^{2\pi i x_j} + e^{-2\pi i x_j})$ и соответственно $\mathbb{A}\sigma(\xi) = 2n\sigma(\xi) - \sum_{j=1}^n (\sigma(\xi + e_j) + \sigma(\xi - e_j))$, где $\xi \in \mathbb{Z}^n$ и e_j — единичный базисный вектор с номером j в $\mathbb{Z}^n$.

Инвариантный по отношению к сдвигам оператор A и его символ σ_A связаны формулами $\sigma_A(k) = e^{-2\pi i x \cdot k} (Ae^{2\pi i x \cdot k}) = (Ae^{2\pi i x \cdot k})|_{x=0}$, а также $A\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i x \cdot k} \sigma_A(k) \hat{\phi}(k)$. Из теоремы 1 следует, что, например, на $\mathbb{T}^3$ инвариантный оператор A ограничен на $L^p(\mathbb{T}^3)$, если существует константа $C > 0$, такая, что $|\sigma_A(k)| \leq C$, а также $|k| |\sigma_A(k + e_j) - \sigma_A(k)| \leq C$ и

$$|k|^2 |\sigma_A(k) - \frac{1}{6} \sum_{j=1}^3 (\sigma_A(k + e_j) + \sigma_A(k - e_j))| \leq C \quad (8)$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^3$ и всех (трех) базисных векторов e_j , $j = 1, 2, 3$. Отметим, что в (8) мы накладываем условия не на все разностные операторы второго порядка, а только на один из них.

В заключение отметим, что теорема 1 также влечет за собой ограниченность неинвариантных операторов вида (4). Чтобы дать точные формулировки, обозначим через ∂_{x_j} , $1 \leq j \leq n$, семейство левоинвариантных дифференциальных операторов первого порядка, соответствующее некоторому семейству линейно

¹⁾Здесь класс $\text{ор } \mathcal{S}_{1/2}^{-1}(\mathcal{S}^3)$ определен как класс символов σ_A , удовлетворяющих неравенствам $\|\mathbb{D}^\alpha \sigma_A(\xi)\|_{\text{ор}} \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-1-|\alpha|/2}$.

независимых левоинвариантных векторных полей на G . Как обычно, положим $\partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_n}^{\beta_n}$.

Теорема 4. Обозначим через κ наименьшее четное целое число, большее $n/2$, где n — размерность группы G . Пусть $1 < p < \infty$, и пусть $l > n/p$, где l — целое число. Предположим, что матричный символ σ_A линейного непрерывного оператора $A: C^\infty(G) \rightarrow \mathcal{D}'(G)$ удовлетворяет оценкам

$$\|\partial_x^\beta \mathbb{D}^\alpha \sigma_A(x, \xi)\|_{\text{op}} \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad (9)$$

для всех мультииндексов α, β с $|\alpha| \leq \kappa$ и $|\beta| \leq l$ для всех $x \in G$ и $[\xi] \in \hat{G}$. Тогда оператор A ограничен на $L^p(G)$.

3. Обсуждение. 1. Налагаемые в теореме 1 условия необходимы для того, чтобы A был оператором слабого типа $(1, 1)$. В принципе, интерполяция позволяет ослабить предположения на число разностных операторов для непрерывности оператора A в L^p . Теорема 1 обобщает результаты для $SU(2)$ из [1], [2], а также из книги [3].

2. Примеры оценок, подобных (7), можно привести также для более общих групп. Условия на количество разностных операторов в теореме 2 можно ослабить так же, как и в теореме 1.

3. Если оператор $A \in \Psi^0(G)$ — обычный хёрмандеровский оператор порядка 0 на G (т.е., в локальных координатах, принадлежащий хёрмандеровским классам $\Psi^0(\mathbb{R}^n)$), то, как было показано в [7], оценки (9) выполняются для всех α, β . Верно и обратное: если (9) выполняются для всех α, β , то $A \in \Psi^0(G)$, см. [8].

4. Некоммутативная матричная квантизация (3)–(4) допускает полное символическое исчисление (композиция, сопряжение, параметрикс и т.д.). Подобные вопросы были исследованы в книге [7].

5. На $SU(2)$ операторы, соответствующие нашим разностным операторам, но задаваемые явно в терминах коэффициентов Клебша–Гордона, использовались в [2], [3]. Определение (5) общего вида, основной инструмент исследования в настоящей работе, было введено и исследовано в [7] и [8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Coifman, M. de Guzman, Rev. Un. Mat. Argentina, **25** (1970/71), 137–143.
 [2] R. Coifman, G. Weiss, Rev. Un. Mat. Argentina, **25** (1970/71), 145–166. [3] R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes*, Springer-Verlag, 1971. [4] L. Hörmander, Acta Math., **104** (1960), 93–140. [5] С. Г. Михлин, Докл. АН СССР, **109** (1956), 701–703. [6] С. Г. Михлин, Вестник ленинград. унив., сер. мат. мех. астр., **12:7** (1957), 143–155. [7] M. Ruzhansky, V. Turunen, *Pseudo-Differential Operators and Symmetries*, Birkhäuser, Basel, 2010. [8] M. Ruzhansky, V. Turunen, J. Wirth, <http://arxiv.org/abs/1004.4396>. [9] M. Ruzhansky, J. Wirth, <http://arxiv.org/abs/1102.3988>.

Университет г. Штутгарта
 e-mail: jens.wirth@mathematik.uni-stuttgart.de
 Imperial College London
 e-mail: ruzh@ic.ac.uk

Поступило в редакцию
 18 июля 2011 г.