Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Комеч, А. И. Комеч, Вариант теоремы Титчмарша о свертке для распределений на окружности, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 26–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3102>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:50:07

УДК 517.71

Вариант теоремы Титчмарша о свертке для распределений на окружности

© 2013. А. А. КОМЕЧ, А. И. КОМЕЧ

Доказана версия теоремы Титчмарша для распределений на окружности. Мы показываем, что некоторая «наивная форма» теоремы Титчмарша может нарушаться, однако такое нарушение имеет место только в случае свертки распределений, которые обладают определенными свойствами симметрии.

1. Введение. Теорема Титчмарша о свертке [6] гласит, что для любых двух распределений с компактным носителем $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ имеет место соотношение

$$\inf \operatorname{supp} f * g = \inf \operatorname{supp} f + \inf \operatorname{supp} g, \quad \sup \operatorname{supp} f * g = \sup \operatorname{supp} f + \sup \operatorname{supp} g. \quad (1)$$

Лионс [4] сформулировал ее многомерный аналог, доказав, что для распределений $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ выпуклая оболочка носителя распределения $f * g$ равна сумме выпуклых оболочек носителей распределений f и g . Различные доказательства теоремы Титчмарша содержатся в [7, гл. VI] (в стиле вещественного анализа), в [1, теорема 4.3.3] (à la гармонический анализ), а также в [3, лекция 16] (подход, основанный на комплексном анализе).

В этой работе мы обобщим теорему Титчмарша на случай периодических распределений, которые мы рассматриваем как распределения на окружности, или, точнее, на торе $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Отметим, что в алгебре распределений на окружности относительно операции свертки есть делители нуля. В самом деле, для любых двух распределений $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$ имеем

$$(f + S_\pi f) * (g - S_\pi g) = f * g + S_\pi(f * g) - S_\pi(f * g) - f * g = 0. \quad (2)$$

Здесь S_y , $y \in \mathbb{T}$, является оператором сдвига, который определен на $\mathcal{E}'(\mathbb{T})$ посредством равенства

$$(S_y f)(\omega) = f(\omega - y), \quad (3)$$

которое понимается в смысле распределений. Тем не менее случаи, когда теорема Титчмарша «не выполняется» в некоторой наивной форме, могут быть явно охарактеризованы, приводя к версии теоремы Титчмарша для распределений на окружности (теорема 1).

Наш интерес к свойствам свертки на окружности обусловлен приложениями к теории аттракторов для конечных разностных схем, возникающих при моделировании нелинейных дисперсионных уравнений. В работе [2] мы рассмотрели слабый аттрактор решений конечной энергии $U(1)$ -инвариантного уравнения Клейна–Гордона в одном пространственном измерении, взаимодействующего с нелинейным осциллятором. Мы доказали, что аттрактор всех уравнений конечной энергии образован множеством всех солитоноподобных решений вида

$\phi_\omega(x)e^{-i\omega t}$, где $\omega \in \mathbb{R}$ и $\phi_\omega \in H^1(\mathbb{R})$. Общая стратегия доказательства заключается в рассмотрении омега-предельных траекторий решения конечной энергии $\psi(x, t) \in \mathbb{C}$. Омега-предельные траектории определяются как решения с данными Коши в омега-предельных точках множества $\{(\psi(t), \dot{\psi}(t)) : t \geq 0\}$, где предел берется в полунормах энергетического пространства. Для доказательства сходимости к множеству солитонных решений мы доказывали, что спектр каждой омега-предельной траектории заключен внутри спектральной щели. Применяя после этого теорему Титчмарша о свертке к уравнению, которому удовлетворяет омега-предельная траектория, можно заключить, что ее временной спектр состоит из не более чем одной частоты, и, таким образом, любая омега-предельная траектория является уединенной волной (либо нулевым решением). Мы ожидаем, что такой подход можно будет обобщить на случай уравнения Клейна–Гордона на дискретном пространстве-времени [5]. Основное отличие заключается в том, что теперь область частот представлена окружностью (а не вещественной осью), а в существенном спектре имеется не одна, а две щели. Таким образом, для анализа спектра омега-предельной траектории требуется версия теоремы Титчмарша для распределений с носителем на двух интервалах окружности.

Благодарность. Авторы глубоко признательны Е. А. Горину за интерес и поддержку.

2. Основные результаты. Для $I \subset \mathbb{T}$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathcal{R}_n(I) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_n} S_{2\pi k/n} I, \quad \text{где } \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z} \bmod n.$$

Пусть $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$. Пусть $I, J \subset \mathbb{T}$ — два замкнутых интервала, таких, что $\text{supp } f \subset \mathcal{R}_n(I)$, $\text{supp } g \subset \mathcal{R}_n(J)$, и предположим, что не существует замкнутого интервала $I' \subsetneq I$, такого, что $\text{supp } f \subset \mathcal{R}_n(I')$, а также не существует замкнутого интервала $J' \subsetneq J$, такого, что $\text{supp } g \subset \mathcal{R}_n(J')$.

Замечание 1. Для $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$ интервалы I и J играют роль, аналогичную «выпуклым оболочкам» носителей.

Теорема 1 (теорема Титчмарша для распределений на окружности). Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Предположим, что

$$|I| + |J| < 2\pi/n. \quad (4)$$

Пусть $K \subset I + J \subset \mathbb{T}$ — замкнутый интервал, такой, что $\text{supp } f * g \subset \mathcal{R}_n(K)$. Если $\lambda := \inf K - \inf I - \inf J > 0$, то найдутся $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha^n = \beta^n = 1$, $\alpha \neq \beta$, такие, что

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \alpha^k S_{2\pi k/n} f \right) \Big|_{(\sup I - 2\pi/n, \inf I + \lambda)} &= 0, \\ \inf \text{supp} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \alpha^k S_{2\pi k/n} g \right) \Big|_{(\sup J - 2\pi/n, \inf J + \lambda)} &= \inf J, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \inf \text{supp} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \beta^k S_{2\pi k/n} f \right) \Big|_{(\sup I - 2\pi/n, \inf I + \lambda)} &= \inf I, \\ \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \beta^k S_{2\pi k/n} g \right) \Big|_{(\sup J - 2\pi/n, \inf J + \lambda)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Замечание 2. Соотношения (6) получаются из (5) благодаря симметричной роли распределений f и g . Соотношение $\alpha \neq \beta$ следует из сравнения (5) и (6). В самом деле, первое равенство в (5) приводит к неравенству

$$\inf \sup \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \alpha^k S_{2\pi k/n} f \right) \Big|_I \geq \inf I + \lambda > \inf I,$$

что противоречило бы первому соотношению в (6) в случае, если бы мы имели $\alpha = \beta$.

Применяя отражение к $\mathbb{T}$, мы также получаем такой результат:

Следствие 1. Если $\rho := \sup I + \sup J - \sup K > 0$, то найдутся $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha^n = \beta^n = 1$, $\alpha \neq \beta$, такие, что

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \alpha^k S_{2\pi k/n} f \right) \Big|_{(\sup I - \rho, \inf I + 2\pi/n)} &= 0, \\ \sup \sup \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \alpha^k S_{2\pi k/n} g \right) \Big|_{(\sup J - \rho, \inf J + 2\pi/n)} &= \sup J, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sup \sup \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \beta^k S_{2\pi k/n} f \right) \Big|_{(\sup I - \rho, \inf I + 2\pi/n)} &= \sup I, \\ \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \beta^k S_{2\pi k/n} g \right) \Big|_{(\sup J - \rho, \inf J + 2\pi/n)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Таким образом, если $K \subsetneq I + J$ (грубо говоря, некоторая наивная форма теоремы Титчмарша о свертке не выполнена), то и f , и g обладают некоторыми свойствами симметрии на $\mathcal{R}_n(U)$ и на $\mathcal{R}_n(V)$, где открытые непересекающиеся интервалы U и V могут быть выбраны так, что $U \cup K \cup V \supset I + J$.

В случае $n = 2$ получаем такой результат:

Следствие 2. Пусть $n = 2$, $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, и пусть I, J, K такие же, как в теореме 1. Тогда $\lambda := \inf K - \inf I - \inf J > 0$ в том и только в том случае, когда для $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$ мы имеем

$$(f + \alpha S_\pi f)|_{(\sup I - \pi, \inf I + \lambda)} = 0, \quad (g - \alpha S_\pi g)|_{(\sup J - \pi, \inf J + \lambda)} = 0.$$

Доказательство. Утверждение «только в том случае» следует из теоремы 1. Проверим утверждение «в том случае» непосредственным вычислением. Пусть $f \in \mathcal{E}'(I \cup S_\pi I)$, где $I \subset \mathbb{T}$, $|I| < \pi/2$, $g \in \mathcal{E}'(J \cup S_\pi J)$, где $J \subset \mathbb{T}$, $|J| < \pi/2$, и предположим, что $f = \pm S_\pi f$ на $(\sup I - \pi, \inf I + \lambda)$, $g = \mp S_\pi g$ на $(\sup J - \pi, \inf J + \lambda)$. Тогда, как и в (2),

$$\begin{aligned} (f * g)|_{(\sup I + \sup J - 2\pi, \inf I + \inf J + \lambda)} &= f|_{(\sup I - \pi, \inf I + \lambda)} * g|_{(\sup J - \pi, \inf J + \lambda)} \\ &\quad + (S_\pi f)|_{(\sup I - \pi, \inf I + \lambda)} * (S_\pi g)|_{(\sup J - \pi, \inf J + \lambda)} \\ &= f|_{(\sup I - \pi, \inf I + \lambda)} * g|_{(\sup J - \pi, \inf J + \lambda)} \\ &\quad - f|_{(\sup I - \pi, \inf I + \lambda)} * g|_{(\sup J - \pi, \inf J + \lambda)} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Положим $f^\#(\omega) = f(-\omega)$. Пусть $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, и пусть $I \subset \mathbb{T}$ — замкнутый интервал, такой, что $\text{supp } f \subset \mathcal{R}_2(I)$. Предположим, что не существует замкнутого интервала $I' \subsetneq I$, такого, что $\text{supp } f \subset \mathcal{R}_2(I')$.

Теорема 2. Если $I \subset (-\pi/2, \pi/2)$ и $|I| < \pi/2$, то включение $\text{supp } f * f^\# \subset \{0; \pi\}$ возможно лишь в том случае, когда $\text{supp } f \subset \{\inf I; \sup I; \pi + \inf I; \pi + \sup I\}$. Более того, найдутся распределения $\mu, \nu \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$, каждое с носителем в точке, такие, что

$$f = \mu + S_\pi \mu + \nu - S_\pi \nu. \quad (9)$$

Замечание 3. Утверждение теоремы 2 останется справедливым, если мы положим $f^\#(\omega) = f(-\omega)$. Доказательство при этом не изменится.

Наконец, приведем теорему о свертке для степеней распределения. Пусть $f \in \mathcal{E}'(\mathbb{T})$. Пусть $I \subset \mathbb{T}$ — замкнутый интервал, такой, что $\text{supp } f \subset \mathcal{R}_n(I)$, и предположим что не найдется интервала $I' \subsetneq I$, такого, что $\text{supp } f \subset \mathcal{R}_n(I')$.

Теорема 3 (теорема Титчмарша для степеней свертки на окружности). Пусть $|I| < 2\pi/rp$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Тогда самый маленький замкнутый интервал $K \subset pI$, удовлетворяющий включению $\text{supp } f^{*p} \subset \mathcal{R}_n(K)$, совпадает с pI , т. е. $K = pI$.

Мы использовали обозначения $pI = \underbrace{I + \dots + I}_p$ и $f^{*p} = \underbrace{f * \dots * f}_p$.

3. Доказательства. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $f_j \in \mathcal{E}'(I)$, $j \in \mathbb{Z}_n$. Найдется $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^n = 1$, такое, что

$$\inf \text{supp} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j f_j = \min \inf \text{supp } f_j. \quad (10)$$

Доказательство. Положим $a := \min_{j \in \mathbb{Z}_n} \inf \text{supp } f_j$. Предположим, что, вопреки утверждению леммы, найдется $\epsilon > 0$, такое, что $\inf \text{supp} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j f_j \geq a + \epsilon$ для любого $\alpha = \gamma^m$, где $\gamma = \exp(2\pi i/n)$ и $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$. Тогда для любых пробных функций $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ с $\text{supp } \varphi \subset (a - \epsilon, a + \epsilon)$ мы имели бы

$$0 = \left\langle \varphi, \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \gamma^{jm} f_j \right\rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \gamma^{jm} \langle \varphi, f_j \rangle, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (11)$$

Пользуясь формулой для детерминанта Вандермонда, имеем

$$\det \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma^2 & \dots & \gamma^{n-1} \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^4 & \dots & \gamma^{2(n-1)} \\ 1 & \gamma^3 & \gamma^6 & \dots & \gamma^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma^n & \gamma^{2n} & \dots & \gamma^{n(n-1)} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\gamma^k - \gamma^j) \neq 0. \quad (12)$$

Таким образом, (11) приводит к равенству $\langle \varphi, f_j \rangle = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_n$. Благодаря произвольности φ получаем $f_j|_{(a-\epsilon, a+\epsilon)} = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_n$, что приводит к противоречию с определением a . $\square$

Доказательство теоремы 1. Имеем $\text{supp } f \subset \mathcal{R}_n(I)$, $\text{supp } g \subset \mathcal{R}_n(J)$, $\text{supp } f * g \subset \mathcal{R}_n(K) \subset \mathcal{R}_n(I + J)$. В силу ограничения (4) каждое из множеств $\mathcal{R}_n(I)$, $\mathcal{R}_n(J)$ и $\mathcal{R}_n(I + J)$ состоит из n непересекающихся интервалов. Пусть $j \in \mathbb{Z}_n$; положим $f_j = (S_{2\pi j/n} f)|_I \in \mathcal{E}'(I)$, $g_j = (S_{2\pi j/n} g)|_J \in \mathcal{E}'(J)$,

$h_j = (S_{2\pi j/n}(f * g))|_K \in \mathcal{E}'(I + J)$; тогда

$$\begin{aligned} h_j &= (S_{2\pi j/n}(f * g))|_{I+J} \\ &= \sum_{\substack{k+l \equiv j \pmod n \\ k, l \in \mathbb{Z}_n}} (S_{2\pi k/n}f)|_I * (S_{2\pi l/n}g)|_J = \sum_{\substack{k+l \equiv j \pmod n \\ k, l \in \mathbb{Z}_n}} f_k * g_l, \quad j \in \mathbb{Z}_n. \end{aligned} \quad (13)$$

Пользуясь соотношением (13), для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, такого, что $\alpha^n = 1$, имеем

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_n} \alpha^k f_k \right) * \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}_n} \alpha^l g_l \right) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j \left[\sum_{\substack{k+l \equiv j \pmod n \\ k, l \in \mathbb{Z}_n}} f_k * g_l \right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j h_j. \quad (14)$$

Применяя к этому соотношению теорему Титчмарша о свертке (1), получаем

$$\inf \sup \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j f_j + \inf \sup \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j g_j = \inf \sup \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j h_j \geq \inf K. \quad (15)$$

Мы приняли во внимание, что $\min_{j \in \mathbb{Z}_n} \inf \sup h_j \geq \inf K$. По лемме 1 найдется $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^n = 1$, такое, что $\inf \sup \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j g_j = \min_{j \in \mathbb{Z}_n} \inf \sup g_j = \inf J$; получаем второе соотношение в (5). Для этого же значения α соотношение (15) дает

$$\inf \sup \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j f_j \geq \inf K - \inf J = \inf I + \lambda.$$

Это приводит к первому соотношению в (5). Согласно замечанию 2, доказательство закончено. $\square$

Доказательство теоремы 2. Если I состоит из одной точки, $I = \{p\} \subset (-\pi/2, \pi/2)$, то $\text{supp } f = \mathcal{R}_2(p) = \{p; \pi + p\}$ и (9) выполнено с

$$\mu = \frac{f + S_\pi f}{2} \Big|_I, \quad \nu = \frac{f - S_\pi f}{2} \Big|_I.$$

Предположим теперь, что $|I| > 0$. Пусть $J = -I$ и $K = \{0\} \subset I + J$. Тогда $\text{supp } f^\sharp \subset \mathcal{R}_2(J)$ и не существует $J' \subsetneq J$, такого, что $\text{supp } f^\sharp \subset \mathcal{R}_2(J')$. Согласно условиям теоремы, $\text{supp } f * f^\sharp \subset \mathcal{R}_2(K)$; таким образом,

$$\lambda := \inf K - \inf I - \inf J = \sup I - \inf I = |I| > 0. \quad (16)$$

Применяя теорему 1 к (16), заключаем, что найдется $\alpha \in \{\pm 1\}$, такое, что

$$(f + \alpha S_\pi f)|_{(\sup I - \pi, \sup I)} = 0, \quad (17)$$

а также $\inf \sup (f^\sharp + \alpha S_\pi f^\sharp)|_{(-\pi/2, \pi/2)} = -\sup I$; последнее соотношение приводит к равенству

$$\sup \sup (f + \alpha S_\pi f)|_{(-\pi/2, \pi/2)} = \sup I. \quad (18)$$

Аналогично, по теореме 1 существует $\beta \in \{\pm 1\}$, такое, что

$$(f^\sharp + \beta S_\pi f^\sharp)|_{(-\inf I - \pi, -\inf I)} = 0;$$

следовательно,

$$(f + \beta S_\pi f)|_{(\inf I, \inf I + \pi)} = 0. \quad (19)$$

Сравнивая (18) с (19), заключаем, что $\alpha \neq \beta$, а значит, $\alpha = -\beta$; тогда (17) и (19) позволяют заключить что и f , и $S_\pi f$ обращаются в нуль на $(\inf I, \sup I)$; следовательно,

$$\text{supp } f \subset \{\inf I; \sup I; \pi + \inf I; \pi + \sup I\}.$$

Согласно (17) и (19), если $\alpha = 1$, то соотношение (9) выполняется с $\mu = f|_{(\inf I, \pi/2)}$ и $\nu = f|_{(-\pi/2, \sup I)}$. Если же $\alpha = -1$, то соотношение (9) выполняется с $\mu = f|_{(-\pi/2, \sup I)}$ и $\nu = f|_{(\inf I, \pi/2)}$. $\square$

Заметим, что доказательство теоремы 3 для случая $p = 2$ немедленно получается из теоремы 1. (Например, соотношения (5) с $f = g$ не приводят к противоречию, только если $\lambda = 0$.) По индукции получаем доказательство для $p = 2^N$ с любым $N \in \mathbb{N}$. Отсюда можно вывести утверждение теоремы 3 для любого $p \leq 2^N$, но при условии $|I| < 2\pi/(2^N n)$, которое сильнее условия $|I| < 2\pi/(pn)$. Вместо того чтобы воспользоваться теоремой 1, дадим независимое доказательство.

Доказательство теоремы 3. Имеем $\text{supp } f^{*p} \subset \mathcal{R}_n(pI)$. Благодаря малости интервала I , и $\mathcal{R}_n(I)$, и $\mathcal{R}_n(pI)$ — наборы из n непересекающихся интервалов. Положим $f_j := (S_{2\pi j/n} f)|_I \in \mathcal{E}'(I)$ и $h_j := (S_{2\pi j/n} (f^{*p}))|_I \in \mathcal{E}'(I)$. Тогда

$$\begin{aligned} h_j &= (S_{2\pi j/n} (f^{*p}))|_{pI} = \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_p \equiv j \pmod n \\ j_1, \dots, j_p \in \mathbb{Z}_n}} (S_{2\pi j_1/n} f)|_I * \dots * (S_{2\pi j_p/n} f)|_I \\ &= \sum_{\substack{j_1 + \dots + j_p \equiv j \pmod n \\ j_1, \dots, j_p \in \mathbb{Z}_n}} f_{j_1} * \dots * f_{j_p}, \quad j \in \mathbb{Z}_n. \end{aligned} \quad (20)$$

Принимая во внимание (20), для любого $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^n = 1$, получаем

$$\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j f_j \right)^{*p} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j \left[\sum_{j_1 + \dots + j_p \equiv j \pmod n} f_{j_1} * \dots * f_{j_p} \right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j h_j. \quad (21)$$

Теперь применим к (21) теорему Титчмарша о свертке, что приводит к

$$p \inf \text{supp} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j f_j = \inf \text{supp} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j h_j.$$

По лемме 1 найдется $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha^n = 1$, такое, что

$$\inf \text{supp} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j f_j = \min_{j \in \mathbb{Z}_n} \inf \text{supp} f_j;$$

следовательно, для такого α

$$p \min_{j \in \mathbb{Z}_n} \inf \text{supp} f_j = \inf \text{supp} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} \alpha^j h_j \geq \min_{j \in \mathbb{Z}_n} \inf \text{supp} h_j.$$

С другой стороны, (20) незамедлительно приводит к неравенствам $\inf \text{supp} h_j \geq p \min_{k \in \mathbb{Z}_n} \inf \text{supp} f_k$ для любого $j \in \mathbb{Z}_n$. Следовательно, $\min_{j \in \mathbb{Z}_n} \inf \text{supp} h_j = p \min_{j \in \mathbb{Z}_n} \inf \text{supp} f_j$ и, аналогично, $\max_{j \in \mathbb{Z}_n} \sup \text{supp} h_j = p \max_{j \in \mathbb{Z}_n} \sup \text{supp} f_j$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, *Теория распределений и анализ Фурье*, Мир, М., 1986.
- [2] A. I. Komech, A. A. Komech, *Global attractor for a nonlinear oscillator coupled to the Klein–Gordon field*, Arch. Ration. Mech. Anal., **185**:1 (2007), 105–142.
- [3] B. Y. Levin, *Lectures on Entire Functions*. In collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin and V. Tkachenko, Transl. Math. Monographs, vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [4] J.-L. Lions, *Supports de produits de composition*. I, C. R. Acad. Sci. Paris, **232** (1951), 1530–1532.
- [5] W. Strauss, L. Vazquez, *Numerical solution of a nonlinear Klein–Gordon equation*, J. Comput. Phys., **28**:2 (1978), 271–278.
- [6] E. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proc. London Math. Soc., **25** (1926), 283–302.
- [7] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.

Техасский университет сельского хозяйства и механизации
Институт проблем передачи информации
e-mail: comech@math.tamu.edu

Поступило в редакцию
9 января 2011 г.

Венский университет
Институт проблем передачи информации
e-mail: alexander.komech@univie.ac.at