Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Рыжиков, Локальный ранг эргодической симметрической степени $T^{\odot n}$ не превосходит $n!n^{-n}$, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 1, 92–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 04:38:10

УДК 517.9

Локальный ранг эргодической симметрической степени $T^{\odot n}$ не превосходит $n! n^{-n}$

© 2013. В. В. Рыжиков*

Локальный ранг эргодических действий интересен по разным причинам. Среди них отметим связи этого числового инварианта со структурой присоединений, спектральными кратностями и скоростью убывания корреляций для преобразований с простым спектром (см., например, [1]–[3]). Непосредственное вычисление локального ранга, как правило, является сложной задачей. Внимание к симметрическим тензорным степеням действий объясняется тем, что они могут обладать положительным локальным рангом. При этом симметрическая степень порядка n коммутирует с конечнозначными полиморфизмами (см. [7]), которые, как будет установлено, не позволяют ей иметь локальный ранг, больший, чем $n! n^{-n}$.

1. Основной результат. Вспомогательные утверждения. Пусть S — автоморфизм стандартного пространства Лебега (X, μ) , $\mu(X) = 1$. Пусть для числа $\beta > 0$ найдется последовательность разбиений ξ_j пространства X вида

$$\{B_j, SB_j, S^2B_j, \dots, S^{h_j-1}B_j, C_j^1, \dots, C_j^{m_j} \dots\},$$

таких, что любое измеримое множество аппроксимируется ξ_j -измеримыми множествами при $j \rightarrow \infty$, причем $\mu(U_j) \rightarrow \beta$, где $U_j = \bigsqcup_{0 \leq k < h_j} S^k B_j$. Множества U_j или соответствующие разбиения на них называются аппроксимирующими башнями. Локальный ранг $\beta(S)$ автоморфизма S определяется как максимальное β , для которого автоморфизм S обладает соответствующей последовательностью аппроксимирующих башен. Говорят, что автоморфизм T имеет ранг $r \geq 1$ и пишут $\text{Rank}(T) = r$, если найдется последовательность разбиений, состоящих из r непересекающихся аппроксимирующих башен, сумма мер которых стремится к 1.

В заметке используются одинаковые обозначения для автоморфизмов и соответствующих им унитарных операторов. Симметрическая степень $T^{\odot n}$ автоморфизма T является ограничением тензорной степени $T^{\otimes n}$ на алгебру измеримых симметричных подмножеств в X^n . Оператор $T^{\odot n}$ обозначает ограничение оператора $T^{\otimes n}$ на пространство $L_2(X^{\odot n}, \mu^{\odot n})$, где $X^{\odot n}$ — симметрическая степень пространства X .

Теорема. Пусть тензорная степень $T^{\otimes n}$ эргодична. Тогда

$$(a) \beta(T^{\otimes n}) \leq n^{-n}, \quad (b) \beta(T^{\odot n}) \leq n! n^{-n}, \quad (c) \text{Rank}(T^{\odot n}) = \infty$$

при $n > 1$.

Утверждения теоремы верны для всех автоморфизмов T , но мы рассматриваем только наиболее интересный случай, когда степень $T^{\otimes n}$ эргодична.

Каток [1] показал, что для типичного автоморфизма T справедливы оценки $\beta(T^{\otimes n}) \geq n^{-n}$, $\beta(T^{\odot n}) \geq n! n^{-n}$. Таким образом, приведенные нами верхние

*Работа поддержана грантами НШ-8508.2010.1 и НШ-5998.2012.1.

оценки являются точными. Для типичных T мы получили

$$\beta(T^{\otimes n}) = n^{-n}, \quad \beta(T^{\odot n}) = n! n^{-n}.$$

Лемма 1 [5]. Пусть эргодический автоморфизм S вероятностного пространства $(\bar{X}, \bar{\mu})$ коммутирует с автоморфизмом R . Если $\beta(S) > 0$, то для любого $\delta > 0$ найдется $m > 0$, такое, что для некоторой последовательности n_j и некоторого $\delta' \in [0, \delta]$ найдутся множества Y_j , такие, что имеет место слабая операторная сходимость

$$\hat{Y}_j \circ S^{n_j} \rightarrow (1 - \delta')\beta(S)R^m,$$

где $\hat{Y}_j$ — операторы умножения на индикаторы множеств Y_j , причем $\bar{\mu}(Y_j) \rightarrow (1 - \delta')\beta(S)$.

Из леммы 1, если подставить $S = T^{\otimes n}$, $R = T \otimes T^2 \otimes \dots \otimes T^n$, вытекает

Лемма 2. Пусть $\delta > 0$ и $\beta(T^{\otimes n}) > 0$. Тогда для $\delta' < \delta$ и некоторых последовательностей Y_j при $k_j \rightarrow \infty$

$$\hat{Y}_j \circ (T^{\otimes n})^{k_j} \rightarrow (1 - \delta')\beta(T^{\otimes n})(T^m \otimes T^{2m} \otimes \dots \otimes T^{nm}).$$

Положим

$$P_1 \odot \dots \odot P_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} P_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes P_{\sigma(n)},$$

где суммирование проводится по всем перестановкам σ . Отметим, что пространство $L_2(\mu)^{\odot n}$ инвариантно относительно оператора $P_1 \odot \dots \odot P_n$.

Лемма 3. (i) Пусть $\beta(T^{\odot n}) > 0$, а U_j — соответствующая последовательность аппроксимирующих башен. Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся $\delta' \in [0, \delta]$, последовательность симметричных множеств $Y_{j'} \subset U_{j'}$, $\mu(Y_{j'}|U_{j'}) \rightarrow 1 - \delta'$, и последовательность $k_{j'} \rightarrow \infty$, такие, что

$$\hat{Y}_{j'} \circ (T^{\odot n})^{k_{j'}} \rightarrow (1 - \delta')\beta(T^{\odot n})(T^m \odot T^{2m} \odot \dots \odot T^{nm}).$$

(ii) Если $T^{\odot n}$ обладает последовательностью наборов непересекающихся аппроксимирующих башен $U_j^1, \dots, U_j^r$, причем $\mu(U_j^i) \rightarrow \beta_i > 0$ ($j \rightarrow \infty$), то для любого $\delta > 0$ найдутся $\delta_1, \dots, \delta_r \in [0, \delta]$ и последовательности $k_{j'}(i)$ ($i = 1, \dots, r$), такие, что

$$\hat{Y}_{j'}^i \circ (T^{\odot n})^{k_{j'}(i)} \rightarrow (1 - \delta_i)\beta_i(T^m \odot T^{2m} \odot \dots \odot T^{nm})$$

для некоторых $Y_{j'}^i \subset U_{j'}^i$, удовлетворяющих условию $\mu(Y_{j'}^i|U_{j'}^i) \rightarrow 1 - \delta_i$.

Доказательство. (i) На произведении $X^{\odot n} \times X^{\odot n}$ рассмотрим самоприсоединение ν (в терминологии [7] конечнозначный полиморфизм), соответствующее марковскому оператору $P_m = T^m \odot T^{2m} \odot \dots \odot T^{nm}$. Эта мера ν , задаваемая равенством

$$\nu(A \times B) = \int_{X^{\odot n}} (P_m \chi_A) \chi_B d\mu^{\odot n},$$

инвариантна и эргодична относительно преобразования $T^{\odot n} \times T^{\odot n}$. Покажем ее эргодичность. Продолжим ν на $X^n \times X^n$ формулой

$$\nu(A \times B) = \int_{X^n} (P_m \chi_A) \chi_B d\mu^{\otimes n},$$

где A, B теперь рассматриваются как измеримые подмножества куба X^n . Это продолжение эргодично относительно действия, порожденного произведением $T^{\otimes n} \otimes T^{\otimes n}$ и тензорными квадратами перестановок координат. Но перестановки действуют тождественно на симметричных множествах. Таким образом, ограничение меры ν на $X^{\otimes n} \times X^{\otimes n}$ эргодично относительно $T^{\otimes n} \times T^{\otimes n}$. Рассматривая часть аппроксимирующей башни вида $U_j^\delta = \bigsqcup_{0 \leq k < \delta h_j} S^k B_j$ при $\delta > 0$ и замечая, что для $R = T \otimes T^2 \otimes \dots \otimes T^n$ найдется $m > 0$, такое, что $\limsup_j \mu^{\otimes n}(U_j^\delta \cap R^m U_j^\delta) > c' > 0$, получим

$$\limsup_j \nu(U_j^\delta \times U_j^\delta) = \int_{X^{\otimes n}} (P_m \chi_{U_j^\delta}) \chi_{U_j^\delta} d\mu^{\otimes n} > c > 0.$$

Аппроксимация присоединения ν частями внедиагональных мер (см. [4, §3]) приводит к утверждению (i), где множество $Y_{j'}$ имеет вид $\bigsqcup_{\delta' h_{j'} \leq k < h_{j'}} S^k B_{j'}$ для некоторого $\delta' \in [0, \delta]$.

(ii) Повторяем предыдущее доказательство, но на шаге j рассматриваем не одну башню, а набор аппроксимирующих башен. Для этого находим такое $m > 0$, чтобы для бесконечного семейства индексов j для всех i ($i = 1, \dots, r$) одновременно выполнялось условие

$$\mu^{\otimes n}(U_j^{i,\delta} \cap R^m U_j^{i,\delta}) > c' > 0.$$

2. Доказательство теоремы. (а) Из леммы 2 имеем

$$\hat{Y}_j \circ (T^{\otimes n})^{k_j} \rightarrow (\beta(T^{\otimes n}) - \delta')(T^m \otimes T^{2m} \otimes \dots \otimes T^{nm}). \quad (1)$$

Из последовательности k_j выбираем подпоследовательность, которую снова обозначим через k_j , так, чтобы

$$T^{k_j} \rightarrow aQ + \sum_{p=1}^n a_p T^{mp}, \quad (2)$$

где марковский оператор Q дизъюнктен с T^{mp} , $m = 1, \dots, n$ (т.е. соответствующие полиморфизмы взаимно сингулярны как меры на $X^n \times X^n$). Из (2) вытекает, что

$$(T^{\otimes n})^{k_j} \rightarrow \left(aQ + \sum_{p=1}^n a_p T^{mp} \right)^{\otimes n} = a_1 a_2 \dots a_n T^m \otimes T^{2m} \otimes \dots \otimes T^{nm} + bP, \quad (3)$$

где марковский оператор P дизъюнктен с $P_m = T^m \otimes T^{2m} \otimes \dots \otimes T^{nm}$. Таким образом, сравнивая (3) с (1), получаем $\beta(T^{\otimes n}) - \delta' \leq a_1 \dots a_n \leq n^{-n}$ (заметим, что $a_1 + \dots + a_n \leq 1$). В силу произвольности δ' имеем $\beta(T^{\otimes n}) \leq n^{-n}$.

(б) Пусть

$$\hat{Y}_j \circ (T^{\otimes n})^{k_j} \rightarrow (\beta(T^{\otimes n}) - \delta')(T^m \odot T^{2m} \odot \dots \odot T^{nm})$$

и

$$T^{k_j} \rightarrow aQ + \sum_{p=1}^n a_p T^{mp}, \quad m > 0,$$

причем марковский оператор Q дизъюнктен с T^{mp} , $p = 1, \dots, n$. Тогда

$$(T^{\odot n})^{k_j} \rightarrow \left(aQ + \sum_{p=1}^n a_p T^{mp} \right)^{\otimes n} = n! a_1 a_2 \cdots a_n T^m \odot T^{2m} \odot \cdots \odot T^{nm} + bP.$$

Если ограничения операторов P и $P_m = T^m \odot T^{2m} \odot \cdots \odot T^{nm}$ на пространство $L_2(X^{\odot n})$ не дизъюнкты, то P как оператор в $L_2(X^n)$ содержит P_m в качестве компоненты. Действительно, P содержит компоненту P' , которая коммутирует с перестановками координат пространства X^n , а ограничение оператора P' на $L_2(X^{\odot n})$ совпадает с P_m . Тогда самоприсоединение ν' , отвечающее P' , упомянутого группового действия является абсолютно непрерывным относительно эргодического самоприсоединения ν_m в $X^n \times X^n$, отвечающего оператору P_m . Следовательно, $\nu' = \nu_m$, $P' = P_m$. Оператор P есть выпуклая сумма тензорных произведений, содержащих Q в качестве множителя. Рассмотрим слагаемое $T^m \otimes Q \otimes \dots$. Если P содержит компоненту $T^m \otimes T^{2m} \otimes \cdots \otimes T^{nm}$, то Q обладает компонентой T^{2m} . Это противоречит определению компоненты Q . Итак, $\beta(T^{\odot n}) - \delta' \leq n! a_1 \cdots a_n$, а следовательно, $\beta(T^{\odot n}) \leq n! n^{-n}$.

(с) Если $m > 0$ и

$$T^{k_j} \rightarrow aQ + \sum_{p=1}^n a_p T^{mp},$$

причем оператор Q дизъюнктен с T^{mp} , $p = 1, \dots, n$, то найдется последовательность наборов непересекающихся множеств X_j^p , $p = 1, \dots, n$, таких, что $\hat{X}_j^p T^{k_j} \rightarrow a_p T^{pm}$, $j \rightarrow \infty$ (доказательство этого факта, основанное на технике полиморфизмов, дано в [6, теорема 7.1]). Из сходимости $\hat{Y}_j \circ (T^{\odot n})^{k_j} \rightarrow \beta T^m \odot T^{2m} \odot \cdots \odot T^{nm}$ вытекает, что

$$\mu^n \left(Y_j \setminus \bigcup_{\sigma} (X_j^{\sigma(1)} \times \cdots \times X_j^{\sigma(n)}) \right) \rightarrow 0,$$

где объединение производится по всем перестановкам σ . Если бы последнее не выполнялось, то предел последовательности $\hat{Y}_j \circ (T^{\odot n})^{k_j}$ содержал бы в качестве компоненты марковский оператор, дизъюнктивный с $T^m \odot T^{2m} \odot \cdots \odot T^{nm}$, что невозможно.

Докажем бесконечность ранга степени $T^{\odot n}$: для любого фиксированного r пространство $X^{\odot n}$ не может асимптотически покрываться набором аппроксимирующих башен U_j^i , $i = 1, \dots, r$.

Рассмотрим башни U_j^i как симметричные множества на X^n . Фиксируем $\delta > 0$. Из сказанного выше и п. (ii) леммы 3 получим, что для некоторой подпоследовательности j' множества $Y_{j'}^i \subset U_{j'}^i$ с точностью до δ совпадают с $U_{j'}^i$, и с асимптотически исчезающей ошибкой располагаются в $Z_{j'}^i = \bigcup_{\sigma} (X_{j'}^{\sigma(1)}(i) \times \cdots \times X_{j'}^{\sigma(n)}(i))$, где множества $X_{j'}^p(i)$, $p = 1, \dots, n$, попарно не пересекаются при фиксированных j' и $i = 1, \dots, r$. Объединение r таких множеств $Z_{j'}^i$ не может иметь меру, большую, чем $1 - n^{-nr}$ (так как это объединение не пересекается с некоторым декартовым кубом меры n^{-nr}). Устремляя δ к нулю,

убеждаемся в том, что мера объединения башен U_j^i , $i = 1, \dots, r$, асимптотически отделена от 1. Таким образом, $T^{\odot n}$ не может обладать конечным рангом. Теорема доказана.

Автор благодарит рецензента за замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Katok, *Combinatorial Constructions in Ergodic Theory and Dynamics*, Univ. Lecture Ser., vol. 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003. [2] J. L. King, J.-P. Thouvenot, *J. Analyse Math.*, **56** (1991), 211–230. [3] A. A. Prikhod'ko, <http://arxiv.org/abs/1008.4301>. [4] В. В. Рыжиков, *Матем. сб.*, **183**:3 (1992), 133–160. [5] В. В. Рыжиков, *Функц. анализ и его прил.*, **35**:2 (2001), 84–87. [6] В. В. Рыжиков, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 137–159. [7] A. M. Vershik, *Discrete Contin. Dynam. Syst.*, **13**:5 (2005), 1305–1324.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vryzh@mail.ru

Поступило в редакцию
28 сентября 2011 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Сдано в набор 21.12.2012. Подписано к печати 22.1.2013. Формат $70 \times 100/16$
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,5. Усл. кр.-отт. 1,5 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 7,8. Тираж 182 экз. Заказ 911.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6