Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Доси, Теорема о представлении для квантовых систем, *Функци. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 3, 90–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3105>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 11:34:21

Выполнение условий (4) требует некоторых соотношений между параметрами h и d . В частности, при достаточно малых h это условие не выполнено ни в одной точке. Элементарный анализ соотношений (3) позволяет получить такое достаточное условие:

Следствие 2. Пусть выполнены условия

$$h > \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi/h)^2 + 1}} < d < \pi.$$

Тогда найдется $k_0 \in (0, \pi)$, для которого условия (4) выполнены с $n = -1$ и $m = 0$ и оператор H^ε имеет при достаточно малых ε лауну, лежащую в $O(1/\ln \varepsilon)$ -окрестности точки E_0 , причем прилегающие к этой лауне зонные функции достигают экстремальных значений в $O(1/\ln \varepsilon)$ -окрестности точки k_0 .

Отметим, что за счет подходящего выбора параметров d и h можно добиться выполнения условий теоремы 1 при любом наперед заданном значении квазиимпульса $k_0 \in (0, \pi)$. Аналогично можно добиться наличия любого наперед заданного числа различных точек k_0 в интервале $(1/4, 9/4)$, каждая из которых будет удовлетворять условиям (4). Каждая из них будет порождать свою лауну в силу теоремы 1. Поэтому за счет подходящего выбора параметров d и h на интервале $(1/4, 9/4)$ можно открыть любое наперед заданное число лакун, причем для каждой из них будет верно утверждение теоремы 1; значения k_0 , отвечающие различным лагунам, будут, вообще говоря, различными.

Настоящая работа была выполнена летом 2011 г. во время визита Д. И. Борисова в Южно-Парижский университет, которому он благодарен за оказанное гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Exner, P. Kuchment, B. Winn, J. Phys. A, **43**:47 (2010), id 474022. [2] A. Figotin, I. Vitebsky, Phys. Rev. A, **76**:5 (2007), id 053839. [3] J. Harrison, P. Kuchment, A. Sobolev, B. Winn, J. Phys. A, **40**:27 (2007), 7597–7618. [4] S. Mahmoodian, A. A. Sukhorukov, S. Ha et al., Optics Express, **18**:25 (2010), 25693–25701. [5] G. Mumcu, K. Sertel, J. L. Volakis, I. Vitebskiy, A. Figotin, IEEE Trans. Antennas Propagation, **53**:12 (2005), 4026–4034.

Институт математики с вычислительным центром РАН
Башкирский педагогический университет им. М. Акмуллы
e-mail: borisovdi@yandex.ru

Поступило в редакцию
29 ноября 2011 г.

Laboratoire de mathématiques, Université Paris-Sud
e-mail: konstantin.pankrashkin@math.u-psud.fr

УДК 517.98

Теорема о представлении для квантовых систем

© 2013. А. Доси

Локально выпуклая версия операторной системы в ее конкретной форме введена в [3]. Такие системы являются унитарными эрмитовыми подпространствами унитарной полинормированной C^* -алгебры

$$C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D}) = \{T \in L(\mathcal{D}) : p_\alpha T \subseteq T p_\alpha, T p_\alpha \in \mathcal{B}(H), \alpha \in \Lambda\}$$

всех некоммутативных непрерывных функций на квантовой области $\mathcal{E} = \{p_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, которая является фильтрованным вверх семейством проекторов в $\mathcal{B}(H)$ с $\sup_\alpha p_\alpha = 1_H$, где $\mathcal{D} = \bigcup_\alpha p_\alpha(H)$ есть объединенное пространство квантовой области $\mathcal{E}$, а $L(\mathcal{D})$ — алгебра всех линейных преобразований пространства $\mathcal{D}$. Предполагается, что обычные (или коммутативные) непрерывные функции на локально компактном пространстве Ω , рассматриваемые как неограниченные операторы умножения в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, \mu)$ всех μ -интегрируемых с квадратом функций на Ω , являются элементами алгебры $C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$ для некоторой квантовой области $\mathcal{E}$ в $L_2(\Omega, \mu)$, полученной с помощью компактных подмножеств пространства Ω (см. [3, пример 3.1]). Это наводит на мысль называть элементы из $C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$ некоммутативными непрерывными функциями на $\mathcal{E}$. В некоммутативном случае каждый неограниченный оператор $T \in C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$ обладает неограниченным сопряженным $T^\star$, таким, что $\mathcal{D} \subseteq \text{dom}(T^\star)$, $T^\star(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$ и $T^\star = T^\star|_{\mathcal{D}} \in C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$ [3]. Кроме того, $*$ -алгебра $C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$, снабженная семейством C^* -полунорм $\|\cdot\|_\alpha$, где $\|T\|_\alpha = \|Tp_\alpha\|$, $T \in C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$, $\alpha \in \Lambda$, оказывается унитарной полинормированной C^* -алгеброй. Унитарное самосопряженное подпространство $X \subseteq C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$ называется *локальной операторной системой*. Основные свойства локальных операторных систем исследовались в [3], а их приложения к квантовым проблемам моментов рассматривались в [4], [5]. Ключевую роль в теории таких систем играет понятие локально матричной положительности. С помощью этого понятия в [3] была доказана локально выпуклая версия теоремы об инъективности Чои–Эффроса [2] для квантовых систем. А именно, теорема об инъективности из [3] утверждает, что инъективная квантовая система в $C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$ допускает единственную структуру полинормированной C^* -алгебры относительно инволюции и квантовой топологии, индуцированной топологией C^* -алгебры $C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$. Матричная положительность в нормированном случае допускает абстрактную характеристику, полученную в той же самой статье [2] Чои и Эффроса. На самом деле мы имеем дело с матрично упорядоченным $*$ -линейным пространством с единицей по отношению к архимедову матричному порядку. Каждое абстрактное операторное пространство вкладывается в абстрактную операторную систему с точностью до матричной изометрии. Этот факт играет центральную роль в подходе Полсена [15] к (нормированному) квантовому функциональному анализу.

Для того чтобы работать с локально матричной положительностью в общем контексте, необходимо исследовать свойства квантовых конусов. Как показано в [8] (см. также [9]), этот подход обобщает точку зрения Полсена на этот вопрос, использованную в нормированном случае в [15] (см. также [11], [14]). На локальной операторной системе $X \subseteq C_\mathcal{E}^*(\mathcal{D})$ рассматривается база фильтра $\{\mathfrak{C}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ замкнутых унитарных квантовых конусов, где $\mathfrak{C}_\alpha$ есть множество всех матриц над X , которые являются (локально) положительными на $p_\alpha(H)$. В общем случае квантовый (или матричный) порядок определяется как база фильтра замкнутых унитарных квантовых конусов на унитарном $*$ -линейном пространстве, пересечение которой является отделимым квантовым конусом. *Квантовая система* (или *абстрактная локальная операторная система*) определяется как унитарное $*$ -линейное пространство, снабженное структурой квантового порядка. Если база фильтра сводится к единственному квантовому конусу, мы получаем абстрактную операторную систему [15]. В этой заметке мы предлагаем абстрактную характеристику локальных операторных систем. Основной

результат утверждает, что это в точности квантовые системы в $C_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{D})$, введенные выше. А именно, каждую квантовую систему можно реализовать как конкретную квантовую L^∞ -систему с точностью до изоморфизма, сохраняющего квантовый порядок. Каждая квантовая L^∞ -система является локальной операторной системой в некоторой C^* -алгебре $C_{\mathcal{E}}^*(\mathcal{D})$. Этот результат обобщает теорему Чои–Эффроса об абстрактной характеристизации операторных систем [2].

1. Унитарные квантовые конусы. Обозначим через $M_n(X)$ линейное пространство всех квадратных матриц $x = [x_{ij}]$ порядка n над линейным пространством X , а через $M(X)$ линейное пространство всех матриц $x = [x_{ij}]$ конечного размера над линейным пространством X . Каждое $M_n(X)$ является подпространством в $M(X)$ с точностью до канонического отождествления и $M(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n(X)$. Мы также полагаем $M = M(\mathbb{C})$. Последнее оказывается нормированным пространством, если отождествить матрицы с операторами конечного ранга в гильбертовом пространстве ℓ_2 . Если $x, y \in M(X)$, то определена их *прямая сумма* $x \oplus y \in M(X)$. Если $a \in M$, $x \in M(X)$ и $b \in M$ — матрицы подходящих размеров, то существует их *матричное произведение* $axb = [\sum_{k,l} a_{ik}x_{kl}b_{lj}]_{i,j} \in M(X)$. Линейное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ обладает каноническим линейным продолжением $\varphi^{(\infty)}: M(X) \rightarrow M(Y)$, $\varphi([x_{ij}]) = [\varphi(x_{ij})]$. Под *квантовым множеством* $\mathfrak{B}$ на X мы понимаем набор $\mathfrak{B} = (b_n)$ подмножеств $b_n \subseteq M_n(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Квантовое подмножество $\mathfrak{B}$ в $M(X)$ называется *абсолютно матрично выпуклым* [12], если $\mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ и $a\mathfrak{B}b \subseteq \mathfrak{B}$ для всех сжатий $a, b \in \text{ball } M$. Функционал Минковского поглощающего (в $M(X)$) абсолютно матрично выпуклого множества называется *матричной полуноормой* на X ([12], [6]). Полинормированная (или локально выпуклая) топология, определенная разделяющим семейством матричных полуноrm, называется *квантовой топологией*, а линейное пространство X , наделенное квантовой топологией, называется *квантовым пространством*. Квантовое пространство, в котором квантовая топология определена матричной нормой, называется *квантовым нормированным* (или *абстрактным операторным*) *пространством* (см. [14]). Подпространства C^* -алгебры $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H являются (конкретными) операторными пространствами.

Под *инволюцией* линейного пространства X мы понимаем линейное отображение сопряжения $x \mapsto x^*$ на X , такое, что $x^{**} = x$ для всех $x \in X$. Линейное пространство, наделенное инволюцией, называется **-линейным пространством*. Элемент $x \in X$ называется *эрмитовым*, если $x^* = x$. Множество всех эрмитовых элементов обозначается через X_h . Оно является вещественным линейным подпространством в X . Инволюция пространства X естественным образом расширяется до инволюции матричного пространства $M(X)$. Таким образом, $M(X)$ также оказывается *-линейным пространством. Квантовое подмножество $\mathfrak{C}$ в $M(X)_h$ называется *квантовым конусом* на X , если $\mathfrak{C} + \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}$ и $a^*\mathfrak{C}a \subseteq \mathfrak{C}$ для всех $a \in M$ [8]. Квантовый конус $\mathfrak{C}$ называется *квантовым *-конусом*, если $M(X)_h = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}$. Если $\mathfrak{C} \cap -\mathfrak{C} = \{0\}$, то квантовый конус $\mathfrak{C}$ на X называется *отделимым квантовым конусом* на X . Зафиксируем эрмитов элемент e в X . Будем говорить, что (X, e) , или просто X , является *унитарным пространством*. Обозначим через $\mathfrak{e}$ квантовое множество $(\{e^{\oplus n}\})$ на X , где $e^{\oplus n} = e \oplus \dots \oplus e \in M_n(X)$. Квантовый конус $\mathfrak{C}$ на унитарном пространстве (X, e) называется *унитарным квантовым конусом*, если $\mathfrak{C} - \mathfrak{e}$ является поглощающим в $M(X)_h$. В этом случае $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}$ оказывается квантовым *-конусом.

Далее, квантовое множество $\bigcap_{r>0} r(\mathfrak{C} - \mathfrak{e})$ называется алгебраическим замыканием конуса $\mathfrak{C}$; мы будем обозначать его через $\mathfrak{C}^-$. Положим $\hat{\mathfrak{C}} = h_X^{-1}(\mathfrak{C} - \mathfrak{e})$, где $h_X: M(X) \rightarrow M(X)_h$, $h_X(x) = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{bmatrix}$, является квантовым овеществлением (hermitifier) на X . Если $\mathfrak{C}$ — квантовый конус на (X, e) , такой, что $\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{C}$, то $\hat{\mathfrak{C}}$ является абсолютно матрично выпуклым множеством в $M(X)$. Если $\mathfrak{C}$ унитарен, то $\hat{\mathfrak{C}}$ — поглощающее абсолютно матрично выпуклое множество в $M(X)$ (подробнее см. в [9]). В частности, его функционал Минковского, обозначаемый через $p_{\mathfrak{C}}$, оказывается матричной полунормой на X . Кроме того, если $\mathfrak{C}$ является отделимым и замкнутым (т.е. $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^-$) квантовым конусом, то $\hat{\mathfrak{C}}$ — отделимое абсолютно матрично выпуклое множество, т.е. $\bigcap_{\varepsilon>0} \varepsilon \hat{\mathfrak{C}} = \{0\}$.

Лемма 1. Если $\mathfrak{C}$ является унитарным квантовым конусом на (X, e) , то $p_{\mathfrak{C}}(x) = \inf \left\{ r > 0 : \begin{bmatrix} re & x \\ x^* & re \end{bmatrix} \in \mathfrak{C} \right\}$ и $p_{\mathfrak{C}}(x^*) = p_{\mathfrak{C}}(x)$ для всех $x \in M(X)$. В частности, $p_{\mathfrak{C}} = p_{\mathfrak{C}^-}$ и $\widehat{\mathfrak{C}^-} = \widehat{\mathfrak{C}}$.

2. Теорема об унитарной биполяре. Пусть теперь X — унитарное $*$ -линейное пространство с единицей e . Пусть (X, Y) — дуальная пара, такая, что инволюция в X является $\sigma(X, Y)$ -непрерывной. Тогда Y обладает канонической инволюцией $y \mapsto y^*$, $\langle x, y^* \rangle = \langle x^*, y \rangle^*$. В этом случае мы говорим, что (X, Y) — дуальная $*$ -пара. Данное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пары (X, Y) определяет, в свою очередь, квантовое (или матричное) спаривание $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle: M(X) \times M(Y) \rightarrow M$, $\langle\langle x, y \rangle\rangle = [\langle x_{ij}, y_{st} \rangle]_{(i,s),(j,t)}$. Если $\mathfrak{C}$ — квантовое множество на X , то мы имеем его квантовую поляр $\mathfrak{C}^{\square} = \{y \in M(Y)_h : \langle\langle \mathfrak{C}, y \rangle\rangle \geq 0\}$ в $M(Y)$ [8]. Легко проверить, что $\mathfrak{C}^{\square}$ — квантовый конус в $M(Y)$. Рассмотрим квантовое подмножество $M(Y)_e = \{y \in M(Y) : \langle\langle e, y \rangle\rangle = I\}$ в $M(Y)$.

Лемма 2. Пусть (X, Y) — дуальная $*$ -пара с унитарным пространством X , и пусть $\mathfrak{C}$ — унитарный квантовый конус на X . Если $x \in M(X)$, то $\langle\langle x, \mathfrak{C}^{\square} \rangle\rangle = \langle\langle x, (\mathfrak{C}^{\square} \cap M(Y)_e)^c \rangle\rangle$, где $(\mathfrak{C}^{\square} \cap M(Y)_e)^c$ — квантовый конус в $M(Y)_h$, порожденный квантовым множеством $\mathfrak{C}^{\square} \cap M(Y)_e$.

Основываясь на лемме 2, можно получить следующую теорему о об унитарной биполяре.

Теорема 3. Пусть (X, Y) — дуальная $*$ -пара с унитарным пространством X , и пусть $\mathfrak{C}$ — слабо замкнутый унитарный квантовый конус на X . Тогда $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}^{\square} \cap M(Y)_e)^{\square}$.

3. Квантовые L^{∞} -системы. Пусть (J, n) — упорядоченная пара, состоящая из множества J и фиксированного отображения $n: J \rightarrow \mathbb{N}$. Пусть (I, m) и (J, n) — две пары. Тогда мы пишем $(I, m) \preceq (J, n)$, если $I \subseteq J$ и $n|_I = m$. Это задает структуру частичного порядка на множестве всех таких упорядоченных пар. Если $\{(J_{\alpha}, n_{\alpha}) : \alpha \in \Lambda\}$ — фильтрованное вверх семейство упорядоченных пар, то наименьшая верхняя грань этого семейства является упорядоченной парой (J, n) , где $J = \bigcup_{\alpha} J_{\alpha}$ и $n(w) = n_{\alpha}(w)$ для $w \in J_{\alpha}$. Предположим, что (J, n) — упорядоченная пара. Каждому $w \in J$ соответствует атомная алгебра $M_{n(w)}$ всех квадратных комплексных матриц порядка $n(w)$. В частности, мы имеем L^{∞} -алгебру фон Неймана $M_{(J,n)} = \bigoplus_{w \in J}^{\infty} M_{n(w)}$. Отметим, что $M_{(J,n)}$ является унитарной $*$ -подалгеброй в прямом произведении $D_{(J,n)} =$

$\prod_{w \in J} M_{n(w)}$ атомных алгебр. Поэтому каждый элемент $v \in M_{(J,n)}$ можно записать как семейство $v = (v_w)_{w \in I}$ с $v_w \in M_{n(w)}$ и $\|v\| = \sup_{w \in J} \|v_w\| < \infty$. Если $(I, m) \preceq (J, n)$, то мы имеем корректно определенный W^* -гомоморфизм $M_{(J,n)} \rightarrow M_{(I,m)}$, $(a_w)_{w \in J} \mapsto (a_w)_{w \in I}$. Пусть теперь $(J, n) = \sup_{\alpha \in \Lambda} (J_\alpha, n_\alpha)$. Элемент $v \in D_{(J,n)}$ называется Λ -ограниченным, если он локально ограничен в том смысле, что $v_\alpha \in M_{(J_\alpha, n_\alpha)}$ для всех α , где $v_\alpha = (v_w)_{w \in J_\alpha}$. Таким образом, $\|v\|_\alpha = \|v_\alpha\| = \sup_{w \in J_\alpha} \|v_w\| < \infty$, $\alpha \in \Lambda$, если v является Λ -ограниченным. Линейное подпространство в $D_{(J,n)}$ всех Λ -ограниченных элементов обозначается через $\mathfrak{D}_{(J,n)}$ и называется *квантовой L^∞ -алгеброй*. Для краткости мы используем обозначение $\mathfrak{D}_J$ вместо $\mathfrak{D}_{(J,n)}$. Таким образом, $\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ является отделимым семейством C^* -полунорм на унитарной $*$ -алгебре $\mathfrak{D}_J$. На самом деле $\mathfrak{D}_J$ — унитарная полинормированная W^* -алгебра (см. [13], [10]) и $\mathfrak{D}_J = \text{oplim} \{M_{(J_\alpha, n_\alpha)}\}$ [9]. В частности, $\mathfrak{D}_J$ — квантовое пространство.

Унитарное подпространство $X \subseteq \mathfrak{D}_J$, такое, что $X^* \subseteq X$, называется *квантовой L^∞ -системой*. Возьмем $x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} \in M(\mathfrak{D}_J) = \varprojlim \{M(M_{(J_\alpha, n_\alpha)})\}$. Мы пишем $x \geq_\alpha 0$ (x локально матрично положителен), если $x \in M(\mathfrak{D}_J)_h$ и $x_w \geq 0$ для всех $w \in J_\alpha$ (т.е. $x_\alpha \geq 0$). Положим $\mathfrak{C}_\alpha = \{x \in M(\mathfrak{D}_J)_h : x \geq_\alpha 0\}$, $\alpha \in \Lambda$. Каждое множество $\mathfrak{C}_\alpha$ является замкнутым унитарным квантовым конусом на $\mathfrak{D}_J$. Значит, $\mathcal{F}_J = \{\mathfrak{C}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ является базой фильтра замкнутых унитарных квантовых конусов (называемой *квантовым порядком*) на $\mathfrak{D}_J$, пересечение $\bigcap \mathcal{F}_J = M(\mathfrak{D}_J)_+ = \{v \in M(\mathfrak{D}_J)_h : v \geq 0\}$ которой есть замкнутый отделимый конус. В частности, каждая квантовая L^∞ -система $X \subseteq \mathfrak{D}_J$ обладает структурой квантового порядка, определенной базой фильтра $\mathcal{F}_J \cap M(X)_h = \{\mathfrak{C}_\alpha \cap M(X)_h : \alpha \in \Lambda\}$.

В действительности квантовая L^∞ -алгебра $\mathfrak{D}_J$ — это замкнутая $*$ -подалгебра в $C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D})$, где $\mathcal{E}$ — канонически определенная квантовая область. А именно, $\mathcal{E} = \{p_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ — квантовая область на $H = \bigoplus_{w \in J} \mathbb{C}^{n(w)}$, которая состоит из проекторов на $H_\alpha = \bigoplus_{w \in J_\alpha} \mathbb{C}^{n(w)}$, $\alpha \in \Lambda$. В частности, локально матричная положительность в $\mathfrak{D}_J$ сводится к локально матричной положительности в $C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D})$ (см. [3]).

4. Квантовый порядок. Пусть X — унитарное $*$ -линейное пространство с единицей e , и пусть $\mathcal{F}$ — база фильтра квантовых конусов на $M(X)_h$. Мы скажем, что $\mathcal{F}$ есть *база унитарного фильтра квантовых конусов*, если все квантовые конусы из $\mathcal{F}$ унитарны и $\bigcap \mathcal{F}$ является отделимым квантовым конусом. База унитарного фильтра квантовых конусов $\mathcal{F}$ называется *квантовым порядком* (или *базой архимедова фильтра*), если $\bigcap \mathcal{F}$ замкнуто. Унитарное линейное пространство X , снабженное квантовым порядком $\mathcal{F}$, называется *квантовой системой*. Мы будем кратко говорить, что $(X, \mathcal{F})$ является квантовой системой.

Каждая квантовая L^∞ -система $X \subseteq \mathfrak{D}_J$ оказывается квантовой системой, квантовый порядок которой — это база фильтра $\mathcal{F}_J \cap M(X)_h$. Любой отделимый замкнутый унитарный квантовый конус $\mathfrak{C}$ на унитарном $*$ -линейном пространстве X определяет квантовый порядок $\{\mathfrak{C}\}$. В этом случае мы скажем, что X — *абстрактная операторная система*. В частности, если $X = A$ — унитарная C^* -алгебра, то $\mathcal{F} = \{M(A)_+\}$ является квантовым порядком на A , а значит, A — операторная система.

Теперь пусть $(X, \mathcal{F})$ и $(Z, \mathcal{U})$ — квантовые системы. Линейное отображение $\varphi: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Z, \mathcal{U})$ называется *квантовым* (или *локально матрично*) *положительным*, если для соответствующих баз фильтров выполняется условие $\mathcal{U} \preceq \varphi^{(\infty)}(\mathcal{F})$ (см., например, [1, 1.6.3]) в $M(Z)$. Скажем, что $\varphi: (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Z, \mathcal{U})$ является *локальным морфизмом*, если φ квантовый положительный и унитарный, т.е. $\varphi(e) = e'$, где e и e' — единицы в X и Z соответственно. Наконец, если φ обратимо и как φ , так и φ^{-1} являются локальными морфизмами, то φ называется *изоморфизмом, сохраняющим квантовый порядок*.

Если $(X, \mathcal{F})$ — квантовая система, то $\widehat{\mathcal{F}} = \{\widehat{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \in \mathcal{F}\}$ является базой фильтра поглощающих абсолютно матрично выпуклых множеств на $M(X)$. В частности, $\widehat{\mathcal{F}}$ порождает квантовую топологию на $M(X)$, базой окрестностей нуля которой является $\{r\widehat{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \in \mathcal{F}, r > 0\}$. Для этой квантовой топологии мы используем то же самое обозначение $\widehat{\mathcal{F}}$. Например, квантовая топология, индуцированная квантовым порядком $\mathcal{F}_J$ на квантовой L^∞ -алгебре $\mathfrak{D}_J$ — это ее исходная квантовая топология в силу леммы 1. В общем случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть $(X, \mathcal{F})$ — квантовая система. Тогда $\widehat{\mathcal{F}}$ является хаусдорфовой квантовой топологией на $M(X)$ и $\widehat{\mathcal{F}}$ -замыкание каждого квантового конуса $\mathfrak{C} \in \mathcal{F}$ совпадает с его алгебраическим замыканием $\mathfrak{C}^-$. Кроме того, $\mathcal{G} = \{\mathfrak{C}^- : \mathfrak{C} \in \mathcal{F}\}$ есть квантовый порядок на X и $\widehat{\mathcal{F}} = \widehat{\mathcal{G}}$ как квантовые топологии на X .

Таким образом, квантовая система $(X, \mathcal{F})$ является квантовым пространством, снабженным квантовой топологией $\widehat{\mathcal{F}}$. В частности, мы имеем дуальную пару (X, Y) , где $Y = X'$ — топологически сопряженное к X пространство, т.е. пространство всех линейных непрерывных функционалов на X . В действительности это $*$ -дуальная пара (см. лемму 1). Если $\mathfrak{C} \in \mathcal{F}$, то $\mathfrak{C}^-$ является $\widehat{\mathcal{F}}$ -замкнутым квантовым конусом. По теореме Мазура $\mathfrak{C}^-$ слабо замкнут (см. [7]). Значит, $\mathcal{G}$ есть квантовый порядок (слабо) замкнутых унитарных квантовых конусов. Поэтому, основываясь на теореме 4, разумно предположить, что любой квантовый порядок $\mathcal{F}$ состоит из замкнутых унитарных квантовых конусов, или просто предположить, что $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются эквивалентными базами фильтров, т.е. $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$ и $\mathcal{G} \preceq \mathcal{F}$.

Следствие 5. Если $(X, \mathcal{F})$ — квантовая система, то $\mathfrak{C}^- = (\mathfrak{C}^\square \cap M(Y)_e)^\square$ для всех $\mathfrak{C} \in \mathcal{F}$.

5. Теорема о представлении. Пусть $(X, \mathcal{F})$ — квантовая система с квантовым порядком $\mathcal{F} = \{\mathfrak{K}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Мы имеем квантовую топологию $\widehat{\mathcal{F}}$ на X (теорема 4) и дуальную $*$ -пару (X, Y) с $Y = X'$. Для каждого α положим $J_\alpha = \mathfrak{K}_\alpha^\square \cap M(Y)_e$. Так как $\mathcal{F}$ — база фильтра, то $\{J_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ есть фильтрованное вверх семейство подмножеств в $M(Y)_e$. Положим $J = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} J_\alpha$ и рассмотрим отображение $n: J \rightarrow \mathbb{N}$, $n(w) = i$, если $w \in M_i(Y)$. Рассмотрим L^∞ -алгебру $\mathfrak{D}_J$ с квантовым порядком $\mathcal{F}_J = \{\mathfrak{C}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ (см. разд. 3).

Лемма 6. Соответствие $\varphi: X \rightarrow \mathfrak{D}_J$, $\varphi(x) = (\langle x, w \rangle)_{w \in J}$, — это корректно определенное унитарное $*$ -линейное отображение. Кроме того, $\varphi^{(\infty)}(\mathfrak{K}_\alpha^-) = \mathfrak{C}_\alpha \cap M(\varphi(X))_h$ для всех α .

Используя лемму 6 и теорему 4, можно получить следующую теорему о представлении.

Теорема 7. Пусть $(X, \mathcal{F})$ — квантовая система. Тогда ее можно отождествить с квантовой L^∞ -системой в некоторой квантовой L^∞ -алгебре $\mathfrak{D}_J$, где $(J, n) = \sup_{\alpha \in \Lambda} (J_\alpha, n_\alpha)$, $\text{Card } \Lambda = \text{Card } \mathcal{F}$, с точностью до изоморфизма квантовых порядков и изоморфизма квантовых пространств одновременно.

Следствие 8 (Чои–Эффрос). Пусть $(X, \{\mathfrak{C}\})$ — абстрактная операторная система. Тогда ее можно отождествить с некоторой операторной системой в $M_{(J,n)}$ с точностью до изоморфизма, сохраняющего квантовый порядок.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1959.
 [2] M. D. Choi, E. G. Effros, J. Funct. Anal., **24**:2 (1977), 156–209. [3] A. A. Dosiev, J. Funct. Anal., **255**:7 (2008), 1724–1760. [4] A. A. Dosiev, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **344**:10 (2007), 627–630. [5] A. A. Dosi, Trans. Amer. Math. Soc., **363**:2 (2011), 801–856. [6] A. A. Dosi, J. Math. Phys., **51**:6 (2010), 1–43. [7] A. A. Dosi, Internat. J. Math., **22**:4 (2011), 535–544. [8] А. Доси, Функц. анализ и его прил., **46**:3 (2012), 84–89. [9] A. A. Dosi, Quantum cones and their duality, Houston J. Math. (to appear). [10] A. A. Dosi, Proc. Amer. Math. Soc., **140**:12 (2012), 4187–4202. [11] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator Spaces*, Clarendon Press, Oxford, 2000. [12] E. G. Effros, C. Webster, in: *Operator Algebras and Applications* (Samos 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 495, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997, 163–207. [13] M. Fragouloupoulou, Yokohama Math. J., **34**:1–2 (1986), 35–51. [14] А. Я. Хелемский, *Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении*, МЦНМО, М., 2009. [15] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 78, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

Northern Cyprus Campus,
 Middle East Technical University, Turkey
 e-mail: dosiev@yahoo.com, dosiev@metu.edu.tr

Поступило в редакцию
 18 мая 2011 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 23.07.2013. Дата выхода в свет 20.08.2013. Формат 70 × 100/16
 Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,5 тыс. Бум. л. 3,0
 Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 179 экз. Заказ 1444. Цена свободная

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
 Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
 117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
 Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6