Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, Асимптотика произведений неотрицательных случайных матриц, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 2, 68–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 12:33:12

Асимптотика произведений неотрицательных случайных матриц*

© 2013. В. Ю. ПРОТАСОВ

Исследуются асимптотические свойства произведения случайных матриц $\xi_k = X_k \cdots X_1$ при $k \rightarrow \infty$. Все сомножители X_i независимы и одинаково распределены на заданном конечном множестве неотрицательных матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Доказано, что если $\mathcal{A}$ неприводимо, то все ненулевые элементы матрицы ξ_k с вероятностью 1 имеют одинаковый показатель асимптотического роста при $k \rightarrow \infty$, равный максимальному показателю Ляпунова $\lambda(\mathcal{A})$. Это усиливает известные результаты о произведениях случайных неотрицательных матриц и, в частности, снимает ряд дополнительных условий «неразрезанности» матриц, предполагавшихся в литературе ранее. Получены обобщения данного результата на приводимые множества. В качестве следствия мы доказываем, что гипотеза Коэна (об асимптотике спектрального радиуса произведений случайных матриц) верна для неотрицательных матриц.

§1. Введение

Асимптотика роста произведений случайных матриц подробно исследовалась в литературе по динамическим системам, теории вероятностей, функциональному анализу, статистической физике, теории графов и сетей и т.д. (см. [1]–[15] и ссылки в этих работах). Для простоты мы ограничимся случаем, когда задано конечное множество $d \times d$ -матриц $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ и каждый сомножитель в произведении выбирается независимо из множества $\mathcal{A}$ с заданными положительными вероятностями $p_1, \dots, p_m$. Основные результаты статьи и методы доказательств переносятся на более общие случаи распределений матриц. Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $d_1, d_2, \dots$, принимающих значения на множестве $\{1, \dots, m\}$, причем $\mathbf{P}\{d_i = n\} = p_n$, $n = 1, \dots, m$, $i \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\xi_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$ соответствующее произведение матриц из $\mathcal{A}$. Согласно классической теореме Фюрстенберга–Кестена [1], с вероятностью 1 величина $\frac{1}{k} \ln \|\xi_k\|$ стремится при $k \rightarrow \infty$ к некоторой константе $\lambda = \lambda(\mathcal{A})$, называемой *показателем Ляпунова* семейства $\mathcal{A}$, снабженного вероятностями $\{p_n\}_{n=1}^m$. Таким образом, норма случайного произведения ξ_k почти наверное (п.н.) асимптотически при $k \rightarrow \infty$ растет, как $e^{\lambda k}$. Во многих задачах необходима более точная информация об асимптотике произведения ξ_k , например, порядок роста образа заданного вектора $\xi_k x$, $x \in \mathbb{R}^d$, или даже конкретного элемента матрицы $(\xi_k)_{ij}$ при $k \rightarrow \infty$ (здесь и далее через $(B)_{ij}$ обозначаем элемент матрицы B в i -й строке и j -м столбце). Согласно теореме Оселедца [2], для любого вектора $x \in \mathbb{R}^d$ предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k x\|$ существует п.н. и принимает одно из d значений $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_d \geq -\infty$, зависящих только от матриц из $\mathcal{A}$ и от вероятностей $\{p_n\}_{n=1}^m$. Данные значения называются показателями Ляпунова

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 13-01-00642 и 11-01-00329, гранта НШ-6003.2012.1 и гранта фонда «Династия».

семейства $\mathcal{A}$, наибольший из них, λ_1 , совпадает с показателем λ . В случае одной матрицы показатели Ляпунова превращаются в логарифмы модулей ее собственных значений. Для одного и того же вектора x предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k x\|$ может принимать значения разных показателей Ляпунова λ_i с определенными вероятностями. Подставляя вместо x базисный вектор e_j пространства $\mathbb{R}^d$ (как обычно, j -я координата e_j равна 1, остальные — нули), получаем асимптотику роста нормы j -го столбца матрицы ξ_k . Вычисление соответствующих вероятностей для столбцов — сложная задача, особенно если среди матриц A_j есть вырожденные. Но и для невырожденных матриц эта задача не всегда поддается решению из-за того, что трудно проверять возникающие условия на семейство $\mathcal{A}$ (сильную неприводимость, условие стягивания и т.д.); подробнее см. обзор [6]. Что же касается асимптотического поведения матричных элементов $(\xi_k)_{ij}$, об этом известно мало. Определенные результаты получены лишь для некоторых частных случаев, один из которых — семейства неотрицательных матриц.

Случайные произведения неотрицательных матриц широко изучались в литературе и нашли множество применений, например, в неоднородных марковских цепях, в задачах о случайных блужданиях по графам, в ряде задач комбинаторики, теории формальных языков и т.д. (см. [7]–[15] и библиографию в этих работах). В 1976 г. Ипитани [8] доказал, что если все матрицы семейства $\mathcal{A}$ *строго положительны* (т.е. все их элементы положительны), то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln (\xi_k)_{ij} = \lambda$ п.н. для любых i, j . Таким образом, порядок роста каждого элемента матрицы ξ_k равен наибольшему показателю Ляпунова λ . В частности, для любого вектора $x \geq 0$, $x \neq 0$, предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k x\|$ с вероятностью 1 равен λ . Условие строгой положительности всех матриц является, конечно, слишком ограничительным. Оно последовательно ослаблялось в ряде работ (см. [7], [9], [10] и библиографию в этих работах). На сегодняшний день наиболее законченным считается следующий результат Хенниона [10].

Если все матрицы семейства $\mathcal{A}$ неотрицательны, а также

(а) существует хотя бы одно строго положительное произведение матриц из $\mathcal{A}$;

(б) ни одна матрица из $\mathcal{A}$ не имеет нулевой строки или нулевого столбца, то для любых $i, j \in \{1, \dots, d\}$ имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln (\xi_k)_{ij} = \lambda$ п.н.

Основная идея доказательств в работах Ипитани и Хенниона состоит в рассмотрении проективных отображений, которые задают матрицы A_j на единичном симплексе $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \geq 0, \sum x_i = 1\}$. Доказывается, что при определенных условиях эти отображения являются сжатиями в специальной метрике на Δ , а значит, их произведения стремятся п.н. к неподвижной точке, которая к тому же имеет положительные координаты (это гарантируется условиями (а) и (б)). Поэтому для любых i, j с вероятностью 1 имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln (\xi_k)_{ij} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k\| = \lambda$.

Другое обобщение было получено Хонгом [11], который избавился от условия (а), однако результат получился слабее. Он показал, что если семейство $\mathcal{A}$ *неприводимо* (т.е. для любых i и j ($i \neq j$) существует произведение Π матриц из $\mathcal{A}$, такое, что $(\Pi)_{ij} > 0$) и матрицы из $\mathcal{A}$ не имеют нулевых столбцов, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k e_j\| = \lambda$ п.н. Таким образом, показатель роста нормы любого столбца матрицы ξ_k (но не конкретного ее элемента!) равен λ .

Возникает естественный вопрос: до каких пределов можно ослаблять условия в теоремах Хенниона и Хонга? Можно ли избавиться от условий (а) и (б),

которые не выполняются во многих задачах с разреженными матрицами? Это важно, поскольку в большинстве приложений, в том числе упомянутых выше, приходится иметь дело именно с разреженными матрицами. Основной результат данной работы, теорема 1, устанавливает общий факт, из которого следуют все упомянутые теоремы и который верен при самых общих предположениях. Теорема 1 утверждает, что для любого неприводимого семейства $\mathcal{A}$ неотрицательных матриц все ненулевые компоненты матрицы ξ_k п.н. имеют одинаковый показатель роста, равный максимальному показателю Ляпунова $\lambda(\mathcal{A})$. При этом никаких условий «неразрезанности» матриц (существование положительного произведения, отсутствие нулевых столбцов и т.д.) не требуется. В качестве следствия этого результата мы докажем гипотезу Коэна [16] для неотрицательных матриц. Гипотеза состоит в том, что в теореме Фюрстенберга–Кестена норму матрицы $\|\xi_k\|$ можно заменить ее спектральным радиусом $\rho(\xi_k)$, т. е. наибольшим модулем ее собственных значений. Иначе говоря, для любого семейства матриц имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \rho(\xi_k) = \lambda$ п.н. Несмотря на простую формулировку, гипотеза остается не доказанной и не опровергнутой до сих пор (подробнее см. §2). Теорема 2 утверждает, что гипотеза верна для любого семейства неотрицательных матриц.

Общий план статьи таков. Основные результаты сформулированы в следующем параграфе и доказаны в §3. Обобщение теоремы 1 на случай приводимых семейств матриц представлено в §4.

§2. Основные результаты

Мы используем следующие обозначения: $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ — конечное семейство неотрицательных $d \times d$ -матриц, $p_1, \dots, p_m$ — соответствующие положительные вероятности, $\sum_{n=1}^m p_n = 1$, $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых случайных величин, одинаково распределенных на множестве $\{1, \dots, m\}$, $\mathbf{P}\{d_k = n\} = p_n$, $n = 1, \dots, m$, $k \in \mathbb{N}$. Через $\xi_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$ обозначаем случайное произведение матриц из $\mathcal{A}$. Для простоты мы иногда будем использовать тот же символ ξ_k для какого-либо конкретного (не случайного) произведения матриц длины k .

Через $\lambda = \lambda(\mathcal{A})$ обозначаем (наибольший) показатель Ляпунова семейства $\mathcal{A}$, снабженного данными вероятностями; $\mathcal{A}^k$ — множество всех m^k произведений матриц из $\mathcal{A}$ длины k (с возможными повторениями); $\mathcal{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^k$. Для данного неотрицательного вектора $x = (x_1, \dots, x_d)$ обозначаем через $\text{supp}(x) = \{i \mid x_i > 0\}$ его *носитель*. Носитель назовем *полным*, если он совпадает со всем множеством $\{1, \dots, d\}$. Только положительные векторы имеют полные носители. Семейство $\mathcal{A}$ неприводимо, если для любой пары индексов i, j существует произведение $\Pi \in \mathcal{S}$, для которого $(\Pi)_{ij} > 0$. Если, напротив, семейство приводимо, то его матрицы A_j имеют общее собственное подпространство, порожденное несколькими базисными векторами. После подходящей перестановки базиса, ставящей эти векторы на первые места, все матрицы A_j приобретают блочный верхнетреугольный вид.

Бинарной называется матрица, все элементы которой — нули и единицы. Последовательность чисел $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ назовем *летальной*, если $a_k = 0$ для всех достаточно больших k ; аналогично определяются *летальные* последовательности векторов или матриц. Семейство $\mathcal{A}$ называется *смертным* (mortal), если существует конечное произведение матриц из $\mathcal{A}$, равное нулю. Определение, является ли данное семейство бинарных матриц смертным, есть NP-полная задача [17].

Для матрицы $B \geq 0$, $B \neq 0$, обозначим через $(B)_{\min}$ ее наименьший положительный элемент, а через $(B)_{\max}$ ее наибольший элемент. Все положительные элементы матрицы B лежат между $(B)_{\min}$ и $(B)_{\max}$, а норма матрицы эквивалентна величине $(B)_{\max}$. Следовательно, в силу теоремы Фюрстенберга–Кестена $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln(\xi_k)_{\max} \rightarrow \lambda$ п.н. Наш основной результат устанавливает, что если $\mathcal{A}$ неприводимо, то это равенство выполнено и для $(\xi_k)_{\min}$.

Теорема 1. *Если неприводимое семейство $\mathcal{A}$ смертно, то последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ летальна п.н., а если не смертно, то $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln(\xi_k)_{\min} \rightarrow \lambda$ п.н.*

Таким образом, все ненулевые элементы матрицы ξ_k с вероятностью 1 имеют одинаковый порядок роста, равный максимальному показателю Ляпунова λ . Для любых индексов i, j последовательность матричных элементов $(\xi_k)_{ij}$ с вероятностью 1 ведет себя следующим образом: если убрать из нее все нулевые члены, то оставшаяся последовательность либо конечна, либо для нее выполнено $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln(\xi_k)_{ij} \rightarrow \lambda$. С увеличением длины k меняется комбинаторика матрицы ξ_k (расположение положительных элементов), величины же положительных элементов имеют одинаковую асимптотику роста. Теоремы Хенниона и Хонга следуют из теоремы 1 как частные случаи.

Условие неприводимости существенно: уже для «семейства» из одной диагональной матрицы $\mathcal{A} = \{A_1\}$ пределы $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln(\xi_k)_{ii}$, равные $\ln(A_1)_{ii}$, могут быть различными при разных i . Тем не менее теорема 1 позволяет получить асимптотику элементов матриц и для приводимых семейств. Это — предмет §4 (теорема 3).

Первая часть теоремы 1 тривиальна. В самом деле, если существует нулевое произведение $\Pi \in \mathcal{S}$, то вероятность того, что оно встретится в произведении ξ_k , стремится к 1 с ростом k ; поэтому последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ летальна п.н. Доказательство второй части нетривиально. Заметим, что методы доказательства теорем Ишитани и Хенниона в [8], [10] (см. введение) не подходят для теоремы 1. Множество $\mathcal{S}$ может не содержать ни одного положительного произведения (например, если все A_j эквивалентны матрицам перестановок). В этом случае последовательность проективных образов единичного симплекса $\xi_k(\Delta)$ не будет стягиваться в точку и нарушается ключевой аргумент, использованный в [10]. Кроме того, если одна из матриц A_j имеет нулевой столбец, то она вообще не определяет проективного отображения на Δ . Доказательство теоремы 1 использует другой подход, основанный на комбинаторике неотрицательных матриц. Оно приводится в следующем параграфе. Пока же отметим несколько следствий. Первое из них является дополнением к теореме Оселедца для случая неотрицательных матриц.

Следствие 1. *Если семейство $\mathcal{A}$ неприводимо и его матрицы не имеют нулевых столбцов, то на каждом векторе $x \geq 0$, $x \neq 0$, с вероятностью 1 реализуется максимальный показатель Ляпунова. Если нулевые столбцы есть, то реализовываться могут только максимальный показатель $\lambda_1 = \lambda$ и минимальный показатель $\lambda_d = -\infty$. Последнее происходит, если $\mathbf{P}\{\xi_k x = 0\} > 0$ для некоторого k .*

Замечание 1. Для произвольной последовательности произведений $\xi_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$ и для любых $i, j \in \{1, \dots, d\}$ соотношение $\frac{1}{k} \ln(\xi_k)_{ij} \rightarrow -\infty$ означает в точности, что последовательность $\{(\xi_k)_{ij}\}_{k \in \mathbb{N}}$ летальна. В самом деле, обозначим через q наименьший положительный элемент матриц семейства $\mathcal{A}$.

Если матрица ξ_k имеет положительный элемент, то он не меньше, чем q^k . Поэтому любой ненулевой элемент последовательности $\frac{1}{k} \ln(\xi_k)_{ij}$ не меньше, чем $\ln q > -\infty$.

То же верно и для норм $\|\xi_k x\|$, где x — произвольный неотрицательный вектор. В силу теоремы Оселедца предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k x\|$ существует п.н. Он равен $-\infty$ в точности тогда, когда последовательность векторов $\{\xi_k x\}_{k \in \mathbb{N}}$ летальна.

Второе следствие теоремы 1 — доказательство гипотезы Коэна для неотрицательных матриц.

Гипотеза 1 [16]. Для любого семейства матриц $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \rho(\xi_k) = \lambda$ п.н.

Гипотеза была сформулирована Ж. Коэном в 1984 г. [16, с. 329–330]. Тогда же [16, с. 332] Фюрстенберг заметил, что она выполнена для семейств строго положительных матриц (это прямо следует из теоремы Иштитани). В 1990 г. Кей [9] ослабил требование положительности до условий (а) и (б) из §1. Следующая теорема показывает, что гипотеза верна для любых (в том числе приводимых) семейств неотрицательных матриц, без каких-либо условий.

Теорема 2. Гипотеза 1 верна для неотрицательных матриц.

Доказательство приводится в §3.

§3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1 будет разбито на предложения 1 и 2. Как уже было замечено, если $\mathcal{A}$ смертно, то $\lambda = -\infty$ и утверждение теоремы очевидно. Далее предполагаем, что $\mathcal{A}$ не является смертным, т.е. множество произведений $\mathcal{S}$ не содержит нулевых матриц. В этом случае $(\xi_k)_{\min} \geq q^k$ п.н. (замечание 1), а значит, $\lambda \geq \ln q$. Поэтому, умножив все матрицы семейства $\mathcal{A}$ на константу $e^{-\lambda}$, считаем впредь, что $\lambda = 0$.

Предложение 1. Для любого вектора $x \geq 0$ с вероятностью 1 предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k x\|$ равен либо λ , либо $-\infty$.

Таким образом, для каждого вектора $x \geq 0$ с вероятностью 1 выполнено одно из следующих утверждений: либо последовательность $\{\xi_k x\}_{k \in \mathbb{N}}$ летальна, либо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k x\| = \lambda$. В частности, все ненулевые столбцы матрицы ξ_k имеют одинаковый показатель роста п.н. при $k \rightarrow \infty$, равный максимальному показателю Ляпунова семейства $\mathcal{A}$.

Перед доказательством предложения 1 введем еще несколько обозначений. Пусть $\mathcal{S}$ — множество всех 2^d бинарных векторов (т.е. векторов с координатами 0 и 1) пространства $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{0\}$. Для каждого вектора $x \in \mathbb{R}_+^d$ обозначим через $\tilde{x}$ вектор из $\mathcal{S}$ с тем же носителем. Таким образом, $\tilde{x}_i = 0$, если $x_i = 0$, и $\tilde{x}_i = 1$, если $x_i > 0$. Ясно, что для любого произведения $\xi_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$ имеем $\|\xi_k x\| \asymp \|\xi_k \tilde{x}\|$, поэтому предложение 1 достаточно доказать только для векторов из $\mathcal{S}'$. Неотрицательной матрице A ставим в соответствие отображение $\tilde{A}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, определенное равенством $\tilde{A}\omega = \widetilde{A\omega}$, $\omega \in \mathcal{S}$. Таким образом, данному семейству $\mathcal{A}$ соответствует семейство отображений $\tilde{\mathcal{A}}$. Для данного элемента $\omega \in \mathcal{S}$ элементы $\tilde{A}_1\omega, \dots, \tilde{A}_m\omega$ будем называть его *детьми*, а все элементы вида $\Pi\omega$, $\Pi \in \tilde{A}^k$, $k \in \mathbb{N}$, — его *потомками*. Элемент $\omega \in \mathcal{S}'$ назовем *бессмертным*, если все его потомки ненулевые. Аналогичные понятия будем использо-

вать для произвольных неотрицательных векторов $x \in \mathbb{R}^d$. Таким образом, вектор $x \geq 0$ бессмертен, если все его потомки $A_{d_k} \cdots A_{d_1} x$, $k \in \mathbb{N}$, ненулевые.

Доказательство предложения 1. Предположим обратное: существует вектор $\omega \in \mathcal{J}'$, для которого предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k \omega\|$ с положительной вероятностью принимает значение $c \in (-\infty, 0)$. Заметим, что c равен одному из показателей Ляпунова семейства $\mathcal{A}$. Обозначим через Ω множество векторов $\omega \in \mathcal{J}'$, для которых вероятность события $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k \omega\| = c$ наибольшая (среди всех элементов из $\mathcal{J}'$). Обозначим эту наибольшую вероятность через p . Если вектор ω лежит в Ω , то все его дети также лежат в Ω . В самом деле, по формуле полной вероятности

$$p = \sum_{i=1}^m p_i \mathbf{P} \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k A_i \omega\| = c \right\} \leq \sum_{i=1}^m p_i p = p,$$

причем неравенство будет строгим, если $\mathbf{P} \{ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k A_i \omega\| = c \} < p$ хотя бы для одного i , т.е. если $\tilde{A}_i \omega \notin \Omega$. Итак, $\tilde{A}_i \Omega \subset \Omega$ для всех i . Отсюда по индукции заключаем, что все потомки любого элемента $\omega \in \Omega$ лежат в Ω . В частности, все они ненулевые. Выделим три ключевых свойства множества Ω :

Свойство 1. Все потомки любого элемента $\omega \in \Omega$ принадлежат Ω .

Свойство 2. Все элементы множества Ω бессмертны.

Свойство 3. Для любого $i = 1, \dots, d$ существует элемент $\omega \in \Omega$, такой, что $\omega_i = 1$.

Последнее свойство следует из неприводимости семейства $\mathcal{A}$. Произвольный элемент $\nu \in \Omega$ ненулевой; поэтому $\nu_j > 0$ для некоторого j . Взяв соответствующее произведение $\Pi \in \mathcal{S}$, для которого $(\Pi)_{ij} > 0$, получаем, что элемент $\omega = \tilde{\Pi} \nu$ лежит в Ω (как потомок элемента ν) и $\omega_i > 0$.

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{D}$ всех бессмертных элементов $\omega \in \mathcal{J}'$, для которых предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k \omega\|$ с положительной вероятностью отличен от нуля и от $-\infty$. Из свойства 2 следует, что $\Omega \subset \mathcal{D}$, в частности, $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Выберем из множества $\mathcal{D}$ элемент ω с наибольшим (по включению) носителем и возьмем произвольный вектор $z \geq 0$, такой, что $\tilde{z} = \omega$. Заметим, что носитель вектора z неполный, в противном случае $z > 0$, и тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k z\| = 0$ п.н., а значит, $\tilde{z} \notin \mathcal{D}$. Поэтому в силу свойства 3 существует вектор $y \geq 0$, такой, что $\tilde{y} \in \Omega$ и $\supp(z + y) \neq \supp z$.

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k z\| = c_0 \in (-\infty, 0)$ с некоторой вероятностью $\beta > 0$. Возьмем два независимых случайных произведения длины k : u_k и v_k , и положим $\xi_{2k} = v_k u_k$. Фиксируем малые $\varepsilon, \delta > 0$. При достаточно большом k вероятность того, что $\frac{1}{k} \ln \|u_k z\| < c_0 + \varepsilon$, превосходит $\beta - \delta$, а вероятность того, что $\frac{1}{k} \ln \|u_k y\| < \varepsilon$, превосходит $1 - \delta$. Значит, с вероятностью, большей, чем $\beta - 2\delta$, эти два неравенства выполнены одновременно.

Далее, так как $\lambda = 0$, то для каждого вектора $a \in \mathcal{J}'$ с вероятностью 1 выполнено неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|\xi_k a\| \leq 0$. Поэтому найдется такая константа N , что для любого $k > N$ имеем $\frac{1}{k} \ln \|\xi_k a\| < \varepsilon$ с вероятностью, большей, чем $1 - \delta$. В силу конечности множества $\mathcal{J}'$ найдется такая константа N сразу для всех $a \in \mathcal{J}'$. Поскольку для любого вектора $x \geq 0$ имеем $x \leq C \|x\| \tilde{x}$, где C — константа, зависящая только от нормы, для больших N получаем, что неравенство $\frac{1}{k} \ln \|\xi_k x\| < \frac{1}{k} \ln \|x\| + \varepsilon$ выполнено при $k > N$ с вероятностью,

большой, чем $1 - \delta$. Аналогично, найдется такая константа N , что для любого $b \in \Omega$ и любого $k > N$ имеем $\frac{1}{k} \ln \|\xi_k b\| < c + \varepsilon$ с вероятностью, большей, чем $p - \delta$. Следовательно, для любого вектора $t \geq 0$, такого, что $\tilde{t} \in \Omega$, имеем $\frac{1}{k} \ln \|\xi_k t\| < \frac{1}{k} \ln \|t\| + c + \varepsilon$ с вероятностью, большей, чем $p - \delta$. Применим данные неравенства к произведению $\xi_k = v_k$ и к векторам $x = u_k z$ и $t = u_k y$. Оба вектора ненулевые п.н. как потомки бессмертных векторов z и y соответственно. Кроме того, вектор $\tilde{t}$ принадлежит Ω п.н. как потомок вектора $y \in \Omega$ (свойство 1). Получаем, что при $k > N$ с вероятностью, большей, чем $p - 2\delta$, выполнены оба неравенства

$$\frac{1}{k} \ln \|v_k u_k z\| < \frac{1}{k} \ln \|u_k z\| + \varepsilon, \quad \frac{1}{k} \ln \|v_k u_k y\| < \frac{1}{k} \ln \|u_k y\| + c + \varepsilon. \quad (1)$$

Поскольку произведения u_k и v_k независимы, с вероятностью, большей, чем $(p - 2\delta)(\beta - 2\delta)$, одновременно с неравенствами (1) выполнены неравенства

$$\frac{1}{k} \ln \|u_k z\| < c_0 + \varepsilon, \quad \frac{1}{k} \ln \|u_k y\| < \varepsilon. \quad (2)$$

Объединяя (1) и (2), получаем, что для всех достаточно больших k с вероятностью, большей, чем $(p - 2\delta)(\beta - 2\delta)$, выполнены оба неравенства

$$\frac{1}{k} \ln \|v_k u_k z\| < c_0 + 2\varepsilon, \quad \frac{1}{k} \ln \|v_k u_k y\| < c + 2\varepsilon.$$

Полагая $v_k u_k = \xi_{2k}$ и $c_1 = \max\{c_0, c\}$, приходим к неравенству

$$\frac{1}{k} \ln \|\xi_{2k}(z + y)\| < \frac{\ln 2}{k} + c_1 + 2\varepsilon,$$

которое выполнено с вероятностью, большей, чем $(p - 2\delta)(\beta - 2\delta)$, для всех достаточно больших k . Следовательно, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \|\xi_n(z + y)\|$, существующий п.н. в силу теоремы Оселедца, не превосходит $c_1/2 + \varepsilon$ с вероятностью, большей, чем $(p - 2\delta)(\beta - 2\delta)$. С другой стороны, вектор $z + y$ бессмертный как сумма бессмертных векторов; поэтому данный предел не меньше, чем $\ln q$, п.н. (замечание 1). Выбирая достаточно малые ε и δ и учитывая, что $c_1 < 0$, приходим к выводу, что данный предел с положительной вероятностью лежит на интервале $(-\infty, 0)$, и, следовательно, для вектора $h = z + y$ имеем $\tilde{h} \in \mathcal{D}$. Однако носитель вектора h больше носителя вектора z , что противоречит выбору z . $\square$

Переходим к предложению 2. Перед формулировкой введем еще несколько обозначений. Как обычно, полагаем

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, d} |x_i|, \quad \|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, d} \sum_{j=1}^d |(A)_{ij}| = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty.$$

Для данной неотрицательной матрицы A и для данного $j \in \{1, \dots, d\}$ положим

$$\tau_j(A) = \max_{i, i'=1, \dots, d, (A)_{ij} > 0} \frac{(A)_{i'j}}{(A)_{ij}}.$$

Таким образом, $\tau_j(A)$ — это наибольшее отношение положительных элементов j -го столбца матрицы A . Если в нем только один положительный элемент, то $\tau_j(A) = 1$, если положительных элементов нет (т.е. j -й столбец нулевой), мы также формально полагаем $\tau_j(A) = 1$.

Предложение 2. Если семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A}$ неприводимо, то для каждого $j = 1, \dots, d$ с вероятностью 1 имеем $\frac{1}{k} \ln \tau_j(\xi_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Таким образом, в случайном произведении длины k все ненулевые элементы одного столбца «выравниваются» с ростом k в том смысле, что $[\tau_j(\xi_k)]^{1/k} \rightarrow 1$ п.н. при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Обозначим через q наименьший положительный элемент матриц из $\mathcal{A}$, а через Q наибольший элемент. Легко показать, что для любой матрицы $M \geq 0$ и для любого $A_s \in \mathcal{A}$ выполнено неравенство $\tau_j(A_s M) \leq \frac{dQ}{q} \tau_j(M)$. Отсюда по индукции заключаем, что для любых натуральных k, n и любого случайного произведения $\xi_{k+n} = A_{d_{k+n}} \cdots A_{d_k} \cdots A_{d_1}$

$$\tau_j(\xi_{k+n}) \leq \left(\frac{dQ}{q} \right)^n \tau_j(\xi_k) \quad \text{п.н.} \quad (3)$$

Для базисного вектора $e_j \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим множество $\mathcal{Q}_j \subset \mathcal{S}$, состоящее из его потомков, имеющих наибольший (по включению) носитель. Следующее простое наблюдение является ключевым:

Множества $\mathcal{Q}_j$ совпадают для всех $j = 1, \dots, d$.

Для доказательства возьмем произвольный вектор $a \in \mathcal{Q}_j$ и для любого $l \in \{1, \dots, d\}$ найдем произведение $\Pi \in \mathcal{S}$, для которого $j \in \text{supp}(\Pi e_l)$ (оно существует в силу неприводимости семейства $\mathcal{A}$). Так как a — потомок вектора e_j , то $a = \tilde{\Pi}_a e_j$ для подходящего произведения $\Pi_a \in \mathcal{S}$. Тогда носитель вектора $\Pi_a \Pi e_l$ содержит носитель вектора a . Итак, для любого $a \in \mathcal{Q}_j$ найдется элемент $b \in \mathcal{Q}_l$, такой, что $\text{supp}(a) \subset \text{supp}(b)$. Поменяв местами j и l , показываем, что найдется вектор $a' \in \mathcal{Q}_j$, такой, что $\text{supp}(b) \subset \text{supp}(a')$. Следовательно, $\text{supp}(a) \subset \text{supp}(a')$. При этом строгое включение невозможно, так как носитель вектора a является наибольшим среди носителей всех потомков вектора e_j . Поэтому $\text{supp}(a) = \text{supp}(b) = \text{supp}(a')$ и, значит, $a = b$, т. е. $a \in \mathcal{Q}_l$. Таким образом, каждый элемент одного из множеств $\mathcal{Q}_j$ принадлежит всем множествам, из чего следует, что все множества $\mathcal{Q}_j$ совпадают. Мы будем обозначать это множество через $\mathcal{Q}$ без указания индекса.

Каждому $l = 1, \dots, d$ поставим в соответствие любое произведение $\Pi_l \in \mathcal{S}$, для которого $\tilde{\Pi}_l e_l \in \mathcal{Q}$. Обозначим через n_l длину произведения Π_l . Предположим, что вектор $z = \xi_k e_j$ ненулевой, его наибольшая координата имеет номер l и равна M . Тогда наибольшая координата вектора $y = \Pi_l z$ не превосходит $\|\Pi_l\|_\infty M$. Для оценки наименьшей положительной координаты вектора y докажем, что $\text{supp}(y) = \text{supp}(\Pi_l e_l)$. С одной стороны, $l \in \text{supp}(z)$, поэтому $\text{supp}(\Pi_l e_l) \subset \text{supp}(\Pi_l z) = \text{supp}(y)$. С другой стороны, вектор $\Pi_l e_l$ имеет максимальный носитель среди всех потомков вектора e_l , а значит, и среди всех потомков любого базисного вектора (свойство 1), в частности, e_j . Следовательно, $\text{supp}(y) = \text{supp}(\Pi_l \xi_k e_j) \subset \text{supp}(\Pi_l e_l)$. Таким образом, $\text{supp}(y) = \text{supp}(\Pi_l e_l)$. Значит, наименьшая положительная координата у вектора $y = \Pi_l z$ не меньше, чем у вектора $M \Pi_l e_l$, что не меньше, чем $M q^{n_l}$. Следовательно, $\tau_j(\Pi_l \xi_k) \leq \|\Pi_l\|_\infty q^{-n_l}$. Итак, любое произведение ξ_k можно домножить слева на одно из произведений Π_l , после чего величина $\tau_j(\cdot)$ станет не больше $\|\Pi_l\|_\infty q^{-n_l}$. Положим $N = \max_{l=1, \dots, d} n_l$ и дополним каждое произведение Π_l произвольным

домножением слева на матрицы из $\mathcal{A}$ до длины N . Из неравенства (3) заключаем, что любое произведение ξ_k можно домножить слева на произведение длины N , после чего величина $\tau_j(\cdot)$ станет не больше $\|\Pi_l\|_\infty q^{-n_l} (dQ/q)^{N-n_l}$. Обозначим через C_0 логарифм максимума этих величин по всем $l = 1, \dots, d$ и через p наименьшую (по всем l) вероятность соответствующих произведений длины N . Функция $f(\xi_k) = \ln \tau_j(\xi_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ удовлетворяет следующим трем условиям:

- (a) $f(\xi_k) \geq 0$ п.н.;
- (b) $f(\xi_{k+1}) \leq f(\xi_k) + C$ п.н.;
- (c) $\mathbf{P}\{f(\xi_{k+N}) \leq C_0 \mid \xi_k = \Pi\} \geq p$ для любого $\Pi \in \mathcal{A}^k$.

Как легко показать, из условий (a), (b) и (c) следует, что $\frac{1}{k}f(\xi_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ п.н. $\square$

Теорема 1 вытекает из предложений 1 и 2. Заметим, что одного предложения 2, примененного к строкам и столбцам матрицы ξ_k , не достаточно для доказательства теоремы 1. Причина в том, что при $k \rightarrow \infty$ выравниваются *только* ненулевые элементы каждой строки и каждого столбца матрицы ξ_k . Из этого, вообще говоря, не следует, что выравниваются все ненулевые элементы матрицы. Например, если каждая матрица $A_j \in \mathcal{A}$ имеет не более одного ненулевого элемента в каждой строке и в каждом столбце, то предложение 2 ничего не дает.

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \rho(\xi_k) \geq \lambda$. Если семейство $\mathcal{A}$ смертно, то последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ летальна п.н. и $\lambda = -\infty$; поэтому доказывать нечего. Если оно не является смертным, то можем положить $\lambda = 0$ (замечание 1). Рассмотрим множество $\mathcal{P}$ всех бинарных $d \times d$ -матриц, не являющихся нильпотентными, т. е. никакая степень которых не является тождественным нулем. Число таких матриц конечно, и у каждой из них спектральный радиус положителен, поэтому $r = \min_{A \in \mathcal{P}} \rho(A) > 0$. Для матрицы $B \geq 0$, $B \neq 0$, обозначим через $[B]$ бинарную матрицу, определенную формулами $[B]_{ij} = 1$ при $(B)_{ij} > 0$ и $[B]_{ij} = 0$ при $(B)_{ij} = 0$. Так как $B \geq (B)_{\min}[B]$, то $\rho(B) \geq (B)_{\min}\rho([B])$. В частности, если B не нильпотентна, то $\rho(B) \geq (B)_{\min}r$. Рассмотрим случайное произведение ξ_k матриц семейства $\mathcal{A}$. С вероятностью 1 оно не нильпотентно, иначе $\mathcal{A}$ было бы смертным. Следовательно, $\|\xi_k\| \geq \rho(\xi_k) \geq (\xi_k)_{\min}r$ п.н. Если $\mathcal{A}$ неприводимо, то по теореме 1 с вероятностью 1 выполнено $\frac{1}{k} \ln (\xi_k)_{\min} \rightarrow 0$, откуда вытекает, что $\frac{1}{k} \ln \rho(\xi_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и это завершает доказательство теоремы для этого случая. Если же $\mathcal{A}$ приводимо, то используем следующий стандартный аргумент. Существует перестановка базиса, после которой каждая матрица $A_n \in \mathcal{A}$ приобретает блочный верхнетреугольный вид. На диагонали стоят квадратные блоки $A_n^{(1,1)}, \dots, A_n^{(l,l)}$, причем в каждом блоке соответствующее семейство $\mathcal{A}_s = \{A_1^{(s,s)}, \dots, A_m^{(s,s)}\}$ неприводимо. Как показано в [18], при таком разложении $\lambda(\mathcal{A}) = \max_{s=1, \dots, l} \lambda(\mathcal{A}_s)$. С другой стороны, $\rho(\mathcal{A}) = \max_{s=1, \dots, l} \rho(\mathcal{A}_s)$. Поэтому если $\frac{1}{k} \ln \rho(\xi_k^{(s,s)}) \rightarrow \lambda(\mathcal{A}_s)$ п.н. в каждом блоке $\xi_k^{(s,s)}$ матрицы $\xi_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$, то

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \rho(\xi_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \max_{s=1, \dots, l} \rho(\xi_k^{(s,s)}) \\ &= \max_{s=1, \dots, l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \rho(\xi_k^{(s,s)}) = \max_{s=1, \dots, l} \lambda(\mathcal{A}_s) = \lambda(\mathcal{A}). \end{aligned} \quad \square$$

§ 4. Случай общих неотрицательных матриц

Теорема 1 распространяется на всевозможные неприводимые семейства неотрицательных матриц. Неприводимость — достаточно общее свойство, и, видимо, можно было и ограничиться только этим случаем. Однако для полноты картины интересно выяснить, насколько результаты теоремы 1 применимы к приводимым семействам. Как мы уже упоминали, прямое обобщение невозможно. Если, например, все матрицы семейства $\mathcal{A}$ диагональные, то на различных диагональных элементах произведения ξ_k будут достигаться разные показатели Ляпунова, а не только наибольший из них, как у неприводимых семейств. Тем не менее следующее важное свойство сохранится и в общем случае:

Для любой пары индексов i, j найдется показатель Ляпунова λ_s семейства $\mathcal{A}$, такой, что с вероятностью 1 предел $\lim_{(\xi_k)_{ij} > 0, k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln(\xi_k)_{ij}$ существует и равен λ_s .

Таким образом, за асимптотический рост каждого элемента $(\xi_k)_{ij}$, $k \rightarrow \infty$, отвечает один конкретный показатель Ляпунова λ_s семейства $\mathcal{A}$. Более того, за конечное время можно явно определить, какой именно из показателей Ляпунова соответствует данному элементу. Зависит это лишь от комбинаторики матриц из $\mathcal{A}$ (расположения нулей в матрицах) и не зависит от величин положительных элементов. Все это следует из теоремы 3, для формулировки которой нам понадобится ввести несколько обозначений.

Если семейство $\mathcal{A}$ приводимо, то существует перестановка базиса, после которой каждая матрица $A_n \in \mathcal{A}$ приобретает блочный верхнетреугольный вид:

$$A_n = \begin{pmatrix} A_n^{(1,1)} & A_n^{(1,2)} & \dots & \dots & A_n^{(1,l)} \\ 0 & A_n^{(2,2)} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_n^{(l,l)} \end{pmatrix}.$$

На диагонали стоят квадратные блоки $A_n^{(1,1)}, \dots, A_n^{(l,l)}$, $l \geq 2$. В каждом блоке соответствующее семейство $\mathcal{A}_s = \{A_1^{(s,s)}, \dots, A_m^{(s,s)}\}$ неприводимо, и $\lambda(\mathcal{A}) = \max_{s=1, \dots, l} \lambda(\mathcal{A}_s)$.

Числа $\lambda^{(s)} = \lambda(\mathcal{A}_s)$, $s = 1, \dots, l$, являются показателями Ляпунова семейства $\mathcal{A}$ (если $l < d$, то у семейства $\mathcal{A}$ есть еще и другие показатели Ляпунова).

Внедиагональные блоки $A_n^{(a,b)}$ (блок, стоящий в пересечении блочной строки a и блочного столбца b , $a, b \in \{1, \dots, l\}$) прямоугольные. Так как матрица A_n блочная верхнетреугольная, то блок $A_n^{(a,b)}$ нулевой при $a > b$.

Рассмотрим ориентированный граф G с вершинами $\{1, \dots, l\}$. Для данных a, b существует ребро, ведущее из b в a , если среди m матриц $A_n^{(a,b)}$, $n = 1, \dots, m$, есть хотя бы одна ненулевая. Поскольку все матрицы семейства $\mathcal{A}$ верхнетреугольные, ребро $b \rightarrow a$ может существовать, только если $b \geq a$. Таким образом, *вдоль любого пути на графе G номера вершин не увеличиваются*. Для каждой пары вершин (a, b) , $a \leq b$, рассмотрим множество вершин $r \in \{a, \dots, b\}$, через каждую из которых проходит хотя бы один путь из b в a . В этом множестве выберем вершину $r = r(a, b)$, для которой показатель Ляпунова $\lambda^{(r)}$ является наибольшим (если таких r несколько, выберем наименьшее из них). Таким образом, функция $r(a, b)$ определена, если существует путь из b в a .

Через $\xi_k^{(a,b)}$ обозначаем соответствующий блок в матрице $\xi_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$.

Теорема 3. Допустим, что семейство неотрицательных матриц $\mathcal{A}$ приводимо. Тогда для каждого блока (a, b) справедливо следующее утверждение: если не существует пути на графе G из вершины b в вершину a , то последовательность $\{\xi_k^{(a,b)}\}_{k=1}^\infty$ летальна п.н.; если путь существует, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln(\xi_k^{(a,b)})_{\min} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln(\xi_k^{(a,b)})_{\max} = \lambda^{(r)} \quad \text{п.н.,}$$

где $r = r(a, b)$.

Итак, все положительные элементы блока (a, b) имеют одинаковый порядок асимптотического роста при $k \rightarrow \infty$, равный показателю Ляпунова r -го диагонального блока, где число $r = r(a, b)$ определяется через граф G указанным выше способом.

Доказательство теоремы 3. Достаточно доказать теорему для $l = 2$ и затем применить индукцию по l . При $l = 2$ граф G имеет две вершины $\{1, 2\}$, поэтому возможны три случая: $(a, b) = (1, 2)$, $(a, b) = (1, 1)$, $(a, b) = (2, 2)$. В случаях $(a, b) = (1, 1)$ и $(a, b) = (2, 2)$ доказательство непосредственно следует из теоремы 1, поскольку семейства $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ неприводимы. Остался случай $(a, b) = (1, 2)$.

Если вершины 1 и 2 не связаны ребром, то $A_n^{(1,2)} = 0$ для всех $n = 1, \dots, m$, т. е. все матрицы $\mathcal{A}_n$ блочно-диагональные. В этом случае $\xi_k^{(1,2)} = 0$ для всех k , т. е. последовательность $\{\xi_k^{(a,b)}\}_{k=1}^\infty$ летальна при $(a, b) = (1, 2)$.

Если же вершины 1 и 2 связаны ребром, то $A_n^{(1,2)} \neq 0$ для некоторого n , пусть для $n = 1$. Таким образом, $(A_1^{(1,2)})_{\alpha\beta} > 0$ для некоторой пары индексов (α, β) . Не ограничивая общности, считаем, что $\lambda^{(1)} \geq \lambda^{(2)}$, в противном случае переходим к транспонированным матрицам A_n^T , $n = 1, \dots, m$. Имеем $\lambda = \lambda(\mathcal{A}) = \lambda^{(1)}$ и $r(1, 2) = 1$. Поэтому достаточно доказать, что $\frac{1}{k} \ln(\xi_k^{(1,2)})_{\min} \rightarrow \lambda$ п.н. при $k \rightarrow \infty$. Для произвольного $\xi_k = A_{d_k} \cdots A_{d_1}$

$$\xi_k^{(1,2)} = \sum_{t=1}^k V_{k-t} A_{d_t}^{(1,2)} U_{t-1}, \quad (4)$$

где $V_{k-t} = A_{d_k}^{(1,1)} \cdots A_{d_{t+1}}^{(1,1)}$ при $t < k$ и V_0 — единичная матрица, $U_{t-1} = A_{d_{t-1}}^{(2,2)} \cdots A_{d_1}^{(2,2)}$ при $t > 1$ и U_0 — единичная матрица.

Рассмотрим произвольный элемент (i, j) , принадлежащий блоку $(1, 2)$. Предположим, что $(\xi_k)_{ij} > 0$. Фиксируем натуральное N . Так как семейство $\mathcal{A}_2$ неприводимо, то вероятность того, что неравенство $(A_{d_h} \cdots A_{d_1})_{\beta j} > 0$ выполнено не менее чем для N различных $h \in \{1, \dots, k\}$ (при условии $(\xi_k)_{ij} > 0$), стремится к 1 при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, при достаточно большом n вероятность того, что существует $t < n$, при котором $(U_{t-1})_{\beta j} > 0$ и $d_t = 1$ (при условии $(\xi_k)_{ij} > 0$), больше $1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданное число. Тогда $(A_{d_t} U_{t-1})_{\alpha j} > 0$ и, значит, $(A_{d_t} U_{t-1})_{\alpha j} > q^t \geq \min\{1, q^n\}$, где, напомним, q — наименьший положительный элемент матриц семейства $\mathcal{A}$. Таким образом, с вероятностью не менее $1 - \varepsilon$ в сумме (4) существует слагаемое, не меньшее $(V_{k-t})_{\min} \min\{1, q^n\}$, для которого $t \leq n$. Поэтому $(\xi_k)_{ij} \geq (V_{k-t})_{\min} \min\{1, q^n\}$. Так как семейство $\mathcal{A}_1$

неприводимо, то, согласно теореме 1, $\frac{1}{k-t} \ln(V_{k-t})_{\min} \rightarrow \lambda$ п.н. при $k \rightarrow \infty$. Поскольку $t \leq n$, получаем, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln(\xi_k)_{ij} \geq \lambda$ с вероятностью не менее $1 - \varepsilon$. Устремляя ε к нулю, завершаем доказательство. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] H. Furstenberg, H. Kesten, *Products of random matrices*, Ann. Math. Statist., **31** (1960), 457–469.
- [2] В. И. Оселедец, *Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем*, Труды ММО, т. 19, Изд-во Моск. ун-та, М., 1968, 179–210.
- [3] В. Н. Тутубалин, *О предельных теоремах для произведений случайных матриц*, ТВП, **10**:1 (1965), 19–32.
- [4] E. Le Page, *Théorème limites pour les produits de matrices aléatoires*, in: Lecture Notes in Math., vol. 928, 1982, 258–303.
- [5] А. В. Лётчиков, *Условная предельная теорема для произведений случайных матриц*, Матем. сб., **186**:3 (1995), 65–84.
- [6] И. Я. Гольдштейн, Г. А. Маргулис, *Показатели Ляпунова произведения случайных матриц*, УМН, **44**(269):5 (1989), 13–60.
- [7] W. C. Watkins, *Limit theorems for products of random matrices: a comparison of two points of view*, in: Contemp. Math., vol. 50, Amer. Math. Sci., Providence, RI, 1986, 5–29.
- [8] H. Ishitani, *A central limit theorem for the subadditive process and its application to products of random matrices*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **12**:3 (1976/77), 565–575.
- [9] E. S. Key, *Lower bounds for the maximal Lyapunov exponent*, J. Theoret. Probab., **3**:3 (1990), 477–488.
- [10] H. Hennion, *Limit theorems for products of positive random matrices*, Ann. Probab., **25**:4 (1997), 1545–1587.
- [11] D. Hong, *Lyapunov exponents: when the top joins the bottom* Technical Report RR-4198, INRIA (2001). <http://hal.inria.fr/docs/00/07/24/24/pdf/rr-4198.pdf>.
- [12] J. E. Cohen, *Convexity properties of products of random nonnegative matrices*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **77**:7, part. 1 (1980), 3749–3752.
- [13] R. Jurgens, V. Yu. Protasov, V. Blondel, *Overlap-free words and spectra of matrices*, Theor. Comput. Sc., **410**:38–40 (2009), 3670–3684.
- [14] В. Ю. Протасов, *Инвариантные функционалы случайных матриц*, Функци. анализ и его прил., **44**:3 (2010), 84–88.
- [15] В. Ю. Протасов, *Инвариантные функции для показателей Ляпунова случайных матриц*, Матем. сб., **202**:1 (2011), 105–132.
- [16] *Random Matrices and Their Applications*, Contemp. Math., vol. 50 (eds. J. E. Cohen, H. Kesten, C. M. Newman), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [17] J. N. Tsitsiklis, V. D. Blondel, *The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard—when not impossible—to compute and to approximate*, Math. Control Signals Systems, **10**:1 (1997), 31–40.
- [18] L. Gerencser, G. Michaletzky, Z. Orlovits, *Stability of block-triangular stationary random matrices*, Systems Control Lett., **57**:8 (2008), 620–625.