Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Качковский, Отсутствие собственных значений у периодического оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом в прямоугольном цилиндре, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 2, 27–37

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:31:02

УДК 517.984.56

Отсутствие собственных значений у периодического оператора Шрёдингера с сингулярным потенциалом в прямоугольном цилиндре*

© 2013. И. В. Качковский

В работе рассматривается периодический оператор Шрёдингера в d -мерном цилиндре с прямоугольным сечением, $d \geq 3$. Электрический потенциал может иметь сингулярную часть вида $\sigma(x, y)\delta_\Sigma(x, y)$, где Σ — периодическая система гиперповерхностей. Устанавливается, что в спектре такого оператора отсутствуют собственные значения, если Σ обладает достаточной гладкостью и $\sigma \in L_{p, \text{loc}}(\Sigma)$, $p > d - 1$.

§1. Введение

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ — решетка,

$$\Gamma = \{l_1 b_1 + \dots + l_m b_m, l_j \in \mathbb{Z}\}, \quad (1)$$

где $b_1, \dots, b_m$ — фиксированный (не обязательно ортонормированный) базис в $\mathbb{R}^m$. Будем считать, что $|b_1| = 1$; условия теорем будут инвариантны относительно масштабирования по соответствующей координате. Пусть

$$\Omega = \{y_1 b_1 + \dots + y_m b_m, 0 \leq y_i < 1\} \quad (2)$$

— элементарная ячейка решетки Γ . Множество Ω естественно отождествляется с множеством точек m -мерного тора $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \Gamma$. Пусть $U = [0; a_1] \times \dots \times [0; a_k] \subset \mathbb{R}^k$, $a_i > 0$, — параллелепипед в $\mathbb{R}^k$, $k \geq 0$. Пусть $d = k + m$. Через mes_{d-1} будем обозначать $(d - 1)$ -мерную меру Лебега.

Определение 1. $(d - 1)$ -мерное липшицево подмногообразие $\Sigma_0 \subset U \times \mathbb{T}^m$ будем называть C^l -гиперповерхностью, если существует C^l -гладкое компактное подмногообразие

$$\tilde{\Sigma}_0 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^m$$

без края или с C^l -гладким краем, такое, что $\Sigma_0 = \tilde{\Sigma}_0 \cap (U \times \mathbb{T}^m)$ и $\text{mes}_{d-1}(\Sigma_0) > 0$.

Определение 2. Γ -периодической системой C^l -гиперповерхностей в цилиндре $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$ будем называть подмножество вида

$$\Sigma = \bigcup_{j=1}^{j_0} \bigcup_{n \in \Gamma} (\Sigma_j + n) \subset \Xi,$$

где вектор $n \in \Gamma \subset \mathbb{R}^m$ отождествляется с вектором $(0, n) \in \mathbb{R}^d$, а $\Sigma_j \subset U \times \Omega$, рассматриваемые как подмногообразия в $U \times \mathbb{T}^m$, являются C^l -гладкими гиперповерхностями.

*Работа выполнена при поддержке King's Annual Fund Studentship и King's Overseas Research Studentship, King's College, London.

Мы будем рассматривать матричный периодический оператор Шрёдингера

$$H = -\Delta + V(x, y) + \sigma(x, y)\delta_\Sigma(x, y), \quad (3)$$

в пространстве $L_2(\Xi; \mathbb{C}^N)$, где $\Xi = U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^d$, $d = k + m \geq 3$. Подразумевается, что при $k = 0$ цилиндр Ξ — это все пространство $\mathbb{R}^d$, а при $k = 1$ это плоско-параллельный слой $\Xi = [0, a] \times \mathbb{R}^{d-1}$. Нам понадобится общий вариант краевых условий: на каждой паре противоположных граней цилиндра Ξ для каждой из N компонент вектора u мы задаем условие Дирихле или Неймана (при $k = 0$ краевые условия отсутствуют). Мы предполагаем, что Σ есть Γ -периодическая система C^d -гиперповерхностей в Ξ . Через $M_N(\mathbb{C})$ будем обозначать пространство $N \times N$ -матриц с комплексными элементами. Матричнозначные функции

$$\sigma \in L_{d-1, \text{loc}}(\Sigma; M_N(\mathbb{C})) \quad \text{и} \quad V \in L_{d/2, \text{loc}}(U \times \mathbb{R}^m; M_N(\mathbb{C}))$$

предполагаются периодическими по «продольным» переменным,

$$\sigma(x, y + a) = \sigma(x, y), \quad V(x, y + a) = V(x, y), \quad (x, y) \in \Xi, \quad a \in \Gamma.$$

Мы не исключаем ситуации, в которой $\Sigma \cap \partial\Xi \neq \emptyset$. Таким образом, результат охватывает случай краевого условия третьего типа

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) + \sigma(x, y)u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Xi. \quad (4)$$

Чтобы дать точное определение оператора H , рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} h[u] = \int_{\Xi} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + \int_{\Xi} \langle V(x, y)u(x, y), u(x, y) \rangle dx dy \\ + \int_{\Sigma} \langle \sigma(x, y)u(x, y), u(x, y) \rangle dS(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где dS — поверхностная мера на Σ , а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$. Квадратичная форма h определена на области

$$H_{\mathcal{C}}^1(\Xi; \mathbb{C}^N) = \{u \in H^1(\Xi; \mathbb{C}^N) : u_i(x, y)|_{x_j=0} = u_i(x, y)|_{x_j=a_j} = 0 \text{ при } (i, j) \in \mathcal{C}\}, \quad (6)$$

где $\mathcal{C} \subset \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, k\}$ — некоторый фиксированный набор пар индексов, определяющий, на каких гранях и для каких компонент функции заданы условия Дирихле. Нетрудно показать, что эта форма замкнута и секториальна в смысле Като [5] и отвечает некоторому m -секториальному оператору H , который мы будем называть матричным периодическим оператором Шрёдингера в прямоугольном цилиндре со смешанными краевыми условиями, см. также [15]. При эрмитовых V и σ оператор H самосопряжен и полуограничен снизу.

Теорема 3. Пусть $d = k + m \geq 3$, $m \geq 1$. Пусть $\Sigma \subset \Xi = U \times \mathbb{R}^m$ есть Γ -периодическая система C^d -гиперповерхностей. Пусть $\sigma \in L_{p, \text{loc}}(\Sigma; M_N(\mathbb{C}))$, $p > d - 1$, и $V \in L_{d/2, \text{loc}}(\Xi; M_N(\mathbb{C}))$ — некоторые Γ -периодические функции. Тогда у соответствующего оператора H в $L_2(\Xi)$ нет собственных значений. Если $H = H^*$, то его спектр абсолютно непрерывен.

Доказательство отсутствия собственных значений в несамосопряженном матричном случае проводится точно так же, как и доказательство абсолютной непрерывности спектра в скалярном случае с вещественными V и σ . Однако в приложениях теорема 3 может понадобиться в общей формулировке. В частности, вопрос об абсолютной непрерывности спектра самосопряженного оператора Максвелла в слое $[0; a] \times \mathbb{R}^2$ (см. [16]) или в параллелепипеде $[0; a_1] \times [0; a_2] \times \mathbb{R}$ (см. [11]) сводится к отсутствию собственных значений у оператора Шрёдингера с несамосопряженными V и σ , $N = 6$ (при этом три компонента удовлетворяют условию Дирихле, а три другие — условию Неймана).

Мы не рассматриваем двумерный случай, так как он изучен в большой общности (см. [1], [13], [18], [14], [21]). В частности, в [21] рассмотрен оператор $H_{d=2}$, отвечающий квадратичной форме

$$h_{d=2}[u] = \int_{\Xi} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + \int_{\Xi} |u(x, y)|^2 d\nu(x, y).$$

На периодический заряд $d\nu$ накладывается условие подчиненности. Ему, например, удовлетворяют заряды $d\nu$, такие, что для любого положительного ε выполняется оценка

$$\int_{U \times \Omega} |u|^2 |d\nu| \leq \varepsilon \int_{U \times \Omega} |\nabla u|^2 dx dy + C(\varepsilon) \int_{U \times \Omega} |u|^2 dx dy \quad \forall u \in H^1(U \times \Omega).$$

При таком условии спектр оператора $H_{d=2}$ абсолютно непрерывен. Этот результат включает в себя

$$V \in L_{p, \text{loc}}(\Xi) \quad \text{и} \quad \sigma \in L_{p, \text{loc}}(\Sigma), \quad p > 1$$

(оптимальные условия на V и σ в шкале L_p при $d = 2$). Результат в [21] получен и для всей плоскости, и для периодического волновода на плоскости (и, более того, для оператора с магнитным потенциалом). В многомерном случае получить результат в такой общности не удастся.

Вопрос об отсутствии собственных значений периодического оператора Шрёдингера исследуется, начиная с пионерской работы Томаса [19], где была установлена абсолютная непрерывность спектра оператора

$$H_V = -\Delta + V$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$ с вещественным периодическим потенциалом $V \in L_2(\Omega)$. В дальнейшем спектр оператора H_V в случае $\mathbb{R}^d$ интенсивно изучался, см. например, обзор [2]. Оптимальный в шкале L_p результат был установлен в [20]: спектр H_V абсолютно непрерывен при $V \in L_{d/2}(\Omega)$, $d \geq 3$.

Оператор Шрёдингера

$$H_\sigma = -\Delta + \sigma \delta_\Sigma$$

в $\mathbb{R}^d$ с сингулярным электрическим потенциалом рассматривался, насколько известно автору, в двух работах. В [17] абсолютная непрерывность спектра оператора H_σ установлена при $d = 3$, кусочно C^3 -гладкой поверхности Σ и $\sigma \in L_{2, \text{loc}}(\Sigma)$. В этой работе рассматривались и более высокие размерности, однако на (кусочно C^2 -гладкую) поверхность Σ накладывалось дополнительное геометрическое условие — существование направления, трансверсального к Σ во всех ее точках (такому условию удовлетворяют, например, многогранники, но не удовлетворяет сфера). В предыдущей работе автора [6] рассмотрен случай $d = 4$, поверхность $\Sigma \in C^4$ подчинена другому геометрическому условию

— ее гауссова кривизна нигде не обращается в нуль (здесь, наоборот, подходит сфера, но не подходит многогранник; поверхность цилиндра не удовлетворяет ни условиям из [17], ни условиям из [6]). Преимуществом теоремы 3 является отсутствие каких бы то ни было геометрических условий на Σ .

Периодический оператор в многомерном цилиндре изучен сравнительно мало. В работе [15] установлена абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера в слое ($k = 1$) с третьим краевым условием (4) при

$$\sigma \in L_{q,\text{loc}}(\partial\Xi), \quad q = 2 \text{ при } d = 3, \quad q = 2d - 2 \text{ при } d \geq 4.$$

Этот результат легко переносится на случай *прямоугольного* цилиндра с теми же условиями на q (при $d > 3$ условие $q > d - 1$ лучше). В цилиндре Ξ с сечением общего вида возникают трудности уже с обычным электрическим потенциалом (при условиях Дирихле или Неймана, см. [7], [8]). Вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора Шрёдингера в цилиндре с третьим краевым условием остается открытым (даже в случае $V = 0$, $\sigma \in C^\infty(\partial\Xi)$, если σ нетривиально зависит от «продольных» переменных). Отметим, что методы из [17] и [6] в случае $\Sigma = \partial\Xi$ не работают (заведомо нет трансверсальных направлений и гауссова кривизна равна нулю).

Мы используем метод работы [8], опирающийся на оценки спектральных проекторов оператора Лапласа. Соответствующие оценки сужений спектральных проекторов на подмногообразия заимствованы из [3]. Выигрыш такого метода также в том, что мы единым образом охватываем сингулярный электрический потенциал и третье краевое условие.

В §2 формулируется критерий Томаса отсутствия собственных значений. Теорема 3 сводится к оценке Томаса (теореме 4). В §3 строится вспомогательный оператор с периодическими краевыми условиями, для которого, с использованием результатов из [3] и [4], доказываются необходимые оценки. В §4 эти оценки распространяются на исходный оператор. Теорема 4 доказывается в §5. Прием с отражениями, примененный в §4, впервые был использован в доказательстве абсолютной непрерывности в работе [13], см. также [14], [18].

Автор благодарит своего научного руководителя Н. Д. Филонова за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также Т. А. Суслину за ценные замечания.

§2. Схема Томаса

Для $\xi \in \mathbb{C}^m$ рассмотрим операторы $H(\xi)$ в пространстве $L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$, задаваемые семейством квадратичных форм

$$\begin{aligned} h(\xi)[v, v] = & \int_{U \times \Omega} \langle (\nabla_y + i\xi)v(x, y), (\nabla_y + i\bar{\xi})v(x, y) \rangle dx dy \\ & + \int_{U \times \Omega} \langle \nabla_x v(x, y), \nabla_x v(x, y) \rangle dx dy + \int_{U \times \Omega} \langle V(x, y)v(x, y), v(x, y) \rangle dx dy \\ & + \int_{\Sigma \cap (U \times \Omega)} \langle \sigma(x, y)v(x, y), v(x, y) \rangle dS(x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

Областью определения этих форм является пространство Соболева $H_{\mathcal{E}, \text{per}}^1(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$ с условиями (6) на $\partial U \times \Omega$ и периодическими краевыми условиями на

$U \times \partial\Omega$. Операторы $H(\xi)$ являются секториальными в смысле Като и аналитически зависят от ξ .

Вложение $H_{\mathcal{C},\text{per}}^1(U \times \Omega; \mathbb{C}^N) \subset L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$ компактно, поэтому спектры операторов $H(\xi)$ дискретны. Согласно критерию Томаса (см. [19], [12], [2], а также [9], [10] для случая несамосопряженного оператора H), достаточно показать, что у $H(\xi)$ нет постоянных (по $\xi \in \mathbb{C}^m$) собственных значений. Таким образом, утверждение теоремы 3 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Для любых $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \perp b_1$, существует такое τ_0 , что при $\tau > \tau_0$ оператор $(H((\pi + i\tau)b_1 + \xi) - \lambda I)$ обратим и

$$\|(H((\pi + i\tau)b_1 + \xi) - \lambda I)^{-1}\| \leq C\tau^{-1}. \quad (8)$$

§3. Оператор с периодическими краевыми условиями

Пусть $\tilde{U} = (-a_1; a_1] \times \cdots \times (-a_k; a_k]$. В $L_2(\tilde{U} \times \Omega)$ введем вспомогательный оператор $\hat{H}_0(\tau)$, заданный квадратичной формой

$$\begin{aligned} \hat{h}(\tau)[v, v] = \int_{\tilde{U} \times \Omega} \langle (\nabla_y + i((\pi + i\tau)b_1 + \xi))v(x, y), (\nabla_y + i((\pi - i\tau)b_1 + \xi))v(x, y) \rangle dx dy \\ + \int_{\tilde{U} \times \Omega} \langle \nabla_x v(x, y), \nabla_x v(x, y) \rangle dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

на области определения $H_{\text{per}}^1(\tilde{U} \times \Omega)$ (с периодическими краевыми условиями по всем переменным). Его собственными значениями будут

$$\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi|^2 - \tau^2 + |\hat{n}|^2 + 2i\tau \langle n + \pi b_1, b_1 \rangle, \quad \hat{n} \in \tilde{\Gamma}', n \in \Gamma',$$

а собственные функции имеют вид $|\Omega|^{-1/2} |\tilde{U}|^{-1/2} e^{i(\hat{n}x + ny)}$, где

$$\Gamma' = \left\{ \sum_{i=1}^m n_i b'_i \right\}, \quad n_i \in \mathbb{Z}, \langle b'_i, b_j \rangle = 2\pi \delta_{ij}$$

— двойственная к Γ решетка, а

$$\tilde{\Gamma}' = \{\hat{n} = (\pi m_1/a_1, \dots, \pi m_k/a_k), m_i \in \mathbb{Z}\}$$

— решетка, двойственная к решетке $\tilde{\Gamma} \subset \mathbb{R}^k$ с элементарной ячейкой $\tilde{U}$. При $\tau > 0$ оператор $\hat{H}_0(\tau)$ обратим и $\|\hat{H}_0(\tau)^{-1}\| \leq (2\pi\tau)^{-1}$, поскольку

$$|\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau)| \geq 2\tau |\langle n + \pi b_1, b_1 \rangle| = 2\pi\tau |2n_1 + 1| \geq 2\pi\tau, \quad (10)$$

так как $n_1 \in \mathbb{Z}$.

Из определения Σ следует, что $\Sigma \cap (U \times \Omega) = \tilde{\Sigma} \cap (U \times \Omega)$ для некоторого $\tilde{\Sigma} \subset (\tilde{U} \times \Omega)$, где $\tilde{\Sigma}$, рассматриваемое как подмножество тора $(\mathbb{R}^k/\tilde{\Gamma}) \times (\mathbb{R}^m/\Gamma)$, является конечным объединением C^l -гладких $(d-1)$ -мерных подмногообразий.

Нам понадобится следующий результат из [3].

Предложение 5. Пусть M есть C^∞ -гладкое компактное d -мерное риманово многообразие без края, $d \geq 3$, и $S \subset M$ — его C^d -подмногообразие размерности $d-1$. Пусть $-\Delta$ — оператор Лапласа–Бельтрами на M и $E_\mu =$

$E_{-\Delta}[(\mu - 1)^2; \mu^2)$, $\mu \in \mathbb{N}$, — его спектральный проектор в $L_2(M)$. Тогда для $u \in L_2(M)$

$$\|E_\mu u\|_{L_q(S)} \leq C \mu^{\frac{d-1}{2} - \frac{d-1}{q}} \|u\|_{L_2(M)}, \quad \frac{2d}{d-1} < q \leq +\infty. \quad (11)$$

Отметим, что левая часть определена корректно, так как $E_\mu u \in H^s(M)$ для любого $s > 0$ и, следовательно, допускает L_q -следы на подмногообразиях. Ясно также, что оценка (11) сохраняет силу, если S — конечное объединение C^d -гиперповерхностей.

Замечание 6. В [3] предложение 5 доказано для $S \in C^\infty$, однако можно проследить, что доказательство сохраняет силу для $S \in C^d$.

Лемма 7. Пусть $0 < \delta < 1/2$, $b \geq 1$, и пусть $|m_\mu| \leq b$ для любого $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|(\mu + m_\mu)^2 - \tau^2| + \tau} \leq C(b, \delta) \tau^{-\delta} \quad (12)$$

при $\tau > 1$.

Доказательство. Ясно, что оценка верна для любого фиксированного конечного числа слагаемых. Поэтому достаточно оценивать сумму только по $\mu \geq 2b$. Заметим, что

$$\sum_{\mu \in [\tau-b-1; \tau+b]} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|(\mu + m_\mu)^2 - \tau^2| + \tau} \leq (2b+1) \frac{(\tau+b)^{1-2\delta}}{\tau} \leq C(b) \tau^{-2\delta}, \quad \tau > 1,$$

так что далее можно ограничиться $\mu \notin [\tau-b-1; \tau+b]$. В этом случае можно заменить m_μ на целые числа (возможно, увеличив b на 1) так, чтобы все слагаемые разве лишь увеличились. Таким образом, достаточно предполагать, что $m_\mu \in \mathbb{Z} \cap [-b; b]$. Последнее множество конечно и не зависит от μ . Разбив сумму на несколько, можно свести оценку к случаю $m_\mu = \text{const}$. Наконец, в сумме с фиксированным m_μ заменим переменную суммирования на $\mu + m_\mu$. С точностью до множителя, зависящего только от b , оценка такой суммы сведется к оценке величины

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|\mu^2 - \tau^2| + \tau}.$$

Заметим, что

$$\sum_{\mu^2 \geq 2\tau^2} \frac{\mu^{1-2\delta}}{\mu^2 - \tau^2 + \tau} \leq 2 \sum_{\mu^2 \geq 2\tau^2} \mu^{-1-2\delta} \leq C(\delta) \tau^{-2\delta}.$$

Далее,

$$\sum_{\mu < 2\tau} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|\mu^2 - \tau^2| + \tau} \leq 2\tau^{1-2\delta} \sum_{\mu < 2\tau} \frac{1}{|\mu^2 - \tau^2| + \tau} \leq 2\tau^{-2\delta} \sum_{\mu < 2\tau} \frac{1}{|\mu - \tau| + 1}.$$

Ограниченность последней суммы следует из ограниченности интеграла

$$\tau^{-2\delta} \int_0^{2\tau} \frac{d\mu}{|\mu - \tau| + 1} = 2\tau^{-2\delta} \int_\tau^{2\tau} \frac{d\mu}{\mu - \tau + 1} = 2\tau^{-2\delta} \ln(\tau + 1) \leq C(\delta) \tau^{-\delta}. \quad \square$$

При $\tau \neq 0$ введем оператор $|\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2}$ с теми же собственными функциями, что и у $\hat{H}_0(\tau)$, и собственными числами $|\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau)|^{-1/2}$.

Лемма 8. При $\tau > 1$ и $u \in L_2(\tilde{U} \times \Omega)$

$$\| |\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} u \|_{L_q(\tilde{\Sigma})}^2 \leq C(q, \tau) \|u\|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)}^2, \quad 1 \leq q < \frac{2(d-1)}{d-2},$$

где $C(q, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Заметим, что при фиксированном τ выполняется оценка $|\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau)| \geq C(|\hat{n}|^2 + |n|^2)$, откуда следует, что $|\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} u \in H^1(\tilde{U} \times \Omega)$, и L_q -след в левой части определен корректно.

Пусть E_μ — спектральный проектор оператора $-\Delta$ на многообразии $\tilde{U} \times \Omega$ (которое в силу периодических краевых условий отождествляется с d -мерным тором) на отрезок $[(\mu-1)^2; \mu^2]$. Поскольку $\text{mes}_{d-1}(\tilde{\Sigma}) < +\infty$, из утверждения леммы для q_0 следует утверждение для $1 \leq q \leq q_0$. Поэтому можно ограничиться случаем $2d/(d-1) < q < 2(d-1)/(d-2)$ и применить неравенство (11). Заметим, что при рассматриваемых q оно выполняется с показателем $(d-1)/2 - (d-1)/q = 1/2 - \delta$ для некоторого $0 < \delta < 1/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \| |\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} u \|_{L_q(\tilde{\Sigma})} &\leq \sum_{\mu=1}^{\infty} \| E_\mu |\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} u \|_{L_q(\tilde{\Sigma})} \\ &\leq C \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{1/2-\delta} \| E_\mu |\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} u \|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)} \\ &\leq C \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{1/2-\delta} \| E_\mu |\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} \| \cdot \| E_\mu u \|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)}, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $|\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2}$ коммутирует с $-\Delta$. Далее, по неравенству Коши–Буняковского–Шварца

$$\| |\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} u \|_{L_q(\tilde{\Sigma})}^2 \leq C \|u\|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)}^2 \left(\sum_{\mu=1}^{[b]+1} + \sum_{\mu=[b]+2}^{+\infty} \right) \mu^{1-2\delta} \| E_\mu |\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} \|^2, \quad (13)$$

где $b = |\pi b_1 + \xi|$. В силу (10) первая сумма оценивается через $C(b)\tau^{-1} \|u\|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)}^2$ и удовлетворяет утверждению леммы. Оценим вторую сумму. Собственные значения оператора $-\Delta$ имеют вид $|\hat{n}|^2 + |n|^2$, $\hat{n} \in \tilde{\Gamma}'$, $n \in \Gamma'$. Область значений проектора E_μ отвечает таким парам $(\hat{n}, n)$, что $(\mu-1)^2 \leq |\hat{n}|^2 + |n|^2 < \mu^2$. Отсюда вытекает, что $|n + \pi b_1 + \xi|^2 + |\hat{n}|^2 \in [(\mu-b-1)^2; (\mu+b)^2]$. Следовательно, при $\mu \geq [b] + 2$

$$\begin{aligned} \| E_\mu |\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2} \|^2 &= \max_{|\hat{n}|^2 + |n|^2 \in [(\mu-1)^2; \mu^2]} \frac{1}{|\hat{h}_{\hat{n}n}(\tau)|} \\ &\leq \max_{|n + \pi b_1 + \xi|^2 + |\hat{n}|^2 \in [(\mu-1-b)^2; (\mu+b)^2]} \frac{\sqrt{2}}{\| |n + \pi b_1 + \xi|^2 + |\hat{n}|^2 - \tau^2 | + \tau}. \end{aligned}$$

Таким образом, вторая сумма в правой части формулы (13) не превосходит

$$C\|u\|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)}^2 \sum_{\mu=b+1}^{\infty} \max_{|n+\pi b_1+\xi|^2+|\hat{n}|^2 \in [(\mu-1-b)^2; (\mu+b)^2]} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|n+\pi b_1+\xi|^2+|\hat{n}|^2-\tau^2|+\tau} \leq C(b, \delta) \tau^{-\delta} \|u\|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)}^2$$

по лемме 7. Но последняя величина стремится к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$. $\square$

С точностью до обозначений следующее предложение доказано в [4, теорема 1.2].

Предложение 9. Пусть $V \in L_{d/2}(\tilde{U} \times \Omega)$. Существует такое $\tau_0 > 0$, что при $\tau > \tau_0$

$$\| |V|^{1/2} u \|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)} \leq C \|V\|_{L_{d/2}(\tilde{U} \times \Omega)}^{1/2} \| |\hat{H}_0(\tau)|^{1/2} u \|_{L_2(\tilde{U} \times \Omega)} \quad \forall u \in H_{\text{per}}^1(\tilde{U} \times \Omega).$$

§4. Оценки свободного оператора

Оператор $H((\pi + i\tau)b_1 + \xi)$ при фиксированных b_1, ξ будем обозначать через $H(\tau)$; мы не будем рассматривать его при других значениях квазиимпульса, поэтому это не приведет к недоразумениям. Пусть $H_0(\tau)$ — тот же оператор при $V = 0$, $\sigma = 0$. Заметим, что последний оператор действует на вектор-функции из $\mathbb{C}^N$, не перемешивая их компоненты, и является ортогональной суммой N скалярных операторов, отличающихся только краевыми условиями; на каждой паре противоположных граней заданы условия Дирихле или Неймана. В связи с этим в этом параграфе везде, кроме формулировок лемм, будет предполагаться, что $N = 1$.

Пусть $T: L_2(U \times \Omega) \rightarrow L_2(\tilde{U} \times \Omega)$ — оператор, продолжающий функцию по координатам x с U на $\tilde{U}$ четным образом через границы с условием Неймана и нечетным — через границы с условием Дирихле. Собственные функции оператора Лапласа в U с краевыми условиями (6) переходят в собственные функции оператора Лапласа в $\tilde{U}$ с периодическими краевыми условиями и теми же собственными значениями. Отсюда следует, что $TH_{\mathcal{C}}^1(U \times \Omega) \subset H_{\text{per}}^1(\tilde{U} \times \Omega)$. Кроме того, верны соотношения

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{L_r(\tilde{U} \times \Omega)} &= 2^{k/r} \|u\|_{L_r(U \times \Omega)}, \quad \hat{H}_0(\tau)Tu = TH_0(\tau)u, \\ |\hat{H}_0(\tau)|^{1/2}Tu &= T|H_0(\tau)|^{1/2}u, \end{aligned} \quad (14)$$

а также

$$|\hat{H}_0(\tau)|^{-1/2}Tu = T|H_0(\tau)|^{-1/2}u, \quad \tau > 0, \quad (15)$$

в случае, если правые часть определены. Равенства проверяются разложением по собственным функциям оператора $H_0(\tau)$.

Лемма 10. Для любого $1 \leq q < 2(d-1)/(d-2)$ существует такое $\tau_0 > 0$, что при $\tau > \tau_0$

$$\| |H_0(\tau)|^{-1/2} u \|_{L_q(\Sigma \cap (U \times \Omega); \mathbb{C}^N)}^2 \leq C(q, \tau) \|u\|_{L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)}^2, \quad C(q, \tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Заметим, что из (15), леммы 8 и (14) при $\tau > \tau_0$ вытекает

$$\begin{aligned} \| |H_0(\tau)|^{-1/2} u \|_{L_q(\Sigma \cap (U \times \Omega))}^2 &\leq \| |\widehat{H}_0(\tau)|^{-1/2} T u \|_{L_q(\widetilde{\Sigma})}^2 \\ &\leq C(q, \tau) \| T u \|_{L_2(\widetilde{U} \times \Omega)}^2 = 2^k C(q, \tau) \| u \|_{L_2(U \times \Omega)}^2. \quad \square \end{aligned}$$

Следующая лемма очевидным образом следует из (10).

Лемма 11. При $\tau \neq 0$, $u \in L_2(U \times \Omega)$

$$\| |H_0(\tau)|^{-1/2} u \|_{L_2(U \times \Omega)} \leq (2\pi\tau)^{-1/2} \| u \|_{L_2(U \times \Omega)}.$$

Через $(\cdot, \cdot)$ обозначаем стандартное скалярное произведение в $L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$,

$$(u_1, u_2) = \int_{U \times \Omega} \langle u_1(x, y), u_2(x, y) \rangle dx dy. \quad (16)$$

Лемма 12. Пусть $u_1, u_2 \in \text{Dom}(H_0(\tau))$. Пусть $V \in L_{d/2}(U \times \Omega; M_N(\mathbb{C}))$. Тогда

$$\begin{aligned} |(Vu_1, u_2)| &\leq C \| V \|_{L_{d/2}(U \times \Omega; M_N(\mathbb{C}))} \\ &\quad \times \| |H_0(\tau)|^{1/2} u_1 \|_{L_2(U \times \Omega; M_N(\mathbb{C}))} \| |H_0(\tau)|^{1/2} u_2 \|_{L_2(U \times \Omega; M_N(\mathbb{C}))}. \end{aligned}$$

Доказательство. Продолжим V нулем с $U \times \Omega$ на $\widetilde{U} \times \Omega$. Имеем

$$|(Vu_1, u_2)| = |(VTu_1, Tu_2)| \leq \| |V|^{1/2} T u_1 \|_{L_2(\widetilde{U} \times \Omega)} \| |V|^{1/2} T u_2 \|_{L_2(\widetilde{U} \times \Omega)}.$$

В силу предложения 9 получаем

$$\begin{aligned} |(Vu_1, u_2)| &\leq C \| V \|_{L_{d/2}(\widetilde{U} \times \Omega)} \| |\widehat{H}_0(\tau)|^{1/2} T u_1 \|_{L_2(\widetilde{U} \times \Omega)} \| |\widehat{H}_0(\tau)|^{1/2} T u_2 \|_{L_2(\widetilde{U} \times \Omega)} \\ &= C \| V \|_{L_{d/2}(U \times \Omega)} \| T |H_0(\tau)|^{1/2} u_1 \|_{L_2(\widetilde{U} \times \Omega)} \| T |H_0(\tau)|^{1/2} u_2 \|_{L_2(\widetilde{U} \times \Omega)} \\ &= 2^k C \| V \|_{L_{d/2}(U \times \Omega)} \| |H_0(\tau)|^{1/2} u_1 \|_{L_2(U \times \Omega)} \| |H_0(\tau)|^{1/2} u_2 \|_{L_2(U \times \Omega)}. \quad \square \end{aligned}$$

§ 5. Доказательство теоремы 2

Дальнейшие рассуждения проводятся по обычной схеме, см., например, [2] или [8]. Теорема 4 будет доказана, если мы установим, что для любого $v_1 \in \text{Dom}(H(\tau))$, $\|v_1\| = 1$, существует v_2 , такое, что $\|v_2\| = 1$ и

$$|(H(\tau)v_1, v_2) - \lambda(v_1, v_2)| \geq C\tau \quad \text{при } \tau \geq \tau_0.$$

Рассмотрим полярное разложение

$$H_0(\tau) = \Phi_0(\tau) |H_0(\tau)|.$$

Пусть $v_1 \in \text{Dom}(H(\tau))$, $\|v_1\| = 1$. Положим $v_2 = \Phi_0(\tau)v_1$. Имеем

$$(H_0(\tau)v_1, v_2) = \| |H_0(\tau)|^{1/2} v_1 \|_{L_2(U \times \Omega)}^2 = \| |H_0(\tau)|^{1/2} v_2 \|_{L_2(U \times \Omega)}^2.$$

Из (10) следует, что

$$(H_0(\tau)v_1, v_2) = (|H_0(\tau)|v_1, v_1) \geq 2\pi\tau.$$

Пусть $\sigma \in L_p(\partial U \times \Omega; M_N(\mathbb{C}))$, $p > d - 1$, $q = 2p' < 2(d - 1)/(d - 2)$. Применяя неравенство Гёльдера и лемму 10, получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Sigma \cap (U \times \Omega)} \langle \sigma(x, y) v_1(x, y), v_2(x, y) \rangle dS(x, y) \right| \\
& \leq \| \sigma \|_{L_p(\Sigma \cap (U \times \Omega); M_N(\mathbb{C}))} \| v_1 \|_{L_q(\Sigma \cap (U \times \Omega); \mathbb{C}^N)} \| v_2 \|_{L_q(\Sigma \cap (U \times \Omega); \mathbb{C}^N)} \\
& \leq C(q, \tau) \| \sigma \|_{L_p(\Sigma \cap (U \times \Omega); M_N(\mathbb{C}))} \\
& \quad \times \| |H_0(\tau)|^{1/2} v_1 \|_{L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)} \| |H_0(\tau)|^{1/2} v_2 \|_{L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)}.
\end{aligned}$$

Пусть

$$V = V_\varepsilon + V_\infty, \quad \| V_\varepsilon \|_{L_{d/2}(U \times \Omega; M_n(\mathbb{C}))} \leq \varepsilon, \quad V_\infty \in L_\infty(U \times \Omega; M_N(\mathbb{C})).$$

В силу лемм 11 и 12

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{U \times \Omega} \langle V(x, y) v_1(x, y), v_2(x, y) \rangle dx dy \right| \\
& \leq C(\varepsilon + C(\varepsilon)\tau^{-1}) \| |H_0(\tau)|^{1/2} v_1 \|_{L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)} \| |H_0(\tau)|^{1/2} v_2 \|_{L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)}.
\end{aligned}$$

Объединяя оценки, получаем

$$\begin{aligned}
& |(H(\tau)v_1, v_2) - \lambda(v_1, v_2)| \\
& \geq (H_0(\tau)v_1, v_2) - |\lambda| - \left| \int_{\Sigma \cap (U \times \Omega)} \langle \sigma(x, y) v_1(x, y), v_2(x, y) \rangle dS(x, y) \right| \\
& \quad - \left| \int_{U \times \Omega} \langle V(x, y) v_1(x, y), v_2(x, y) \rangle dx dy \right| \\
& \geq (H_0(\tau)v_1, v_2) - |\lambda| - C(\varepsilon + C(q, \tau)) \| \sigma \|_{L_p(\Sigma \cap (U \times \Omega))} \\
& \quad + C(\varepsilon)\tau^{-1} \| |H_0(\tau)|^{1/2} v_1 \|_{L_2(U \times \Omega)} \| |H_0(\tau)|^{1/2} v_2 \|_{L_2(U \times \Omega)} \\
& = (H_0(\tau)v_1, v_2) - |\lambda| - C(\varepsilon + \tilde{C}(q, \tau) + C(\varepsilon)\tau^{-1})(H_0(\tau)v_1, v_2) \\
& \geq 2\pi\tau(1 - C(\varepsilon + \tilde{C}(q, \tau) + C(\varepsilon)\tau^{-1})) - |\lambda|,
\end{aligned}$$

где $\tilde{C}(q, \tau) = C(q, \tau) \| \sigma \|_{L_p(\Sigma \cap (U \times \Omega))}$. Последнее неравенство завершает доказательство, поскольку $C, C(\varepsilon)$ не зависят от τ , C не зависит от ε , $\tilde{C}(q, \tau) \rightarrow 0$, а λ фиксировано. $\square$

Замечание 13. Утверждение теоремы 3 остается верным, если в качестве U взять $[0; a_1] \times \dots \times [0; a_k] \times \mathbb{T}^l$, где $\mathbb{T}^l = \mathbb{R}^l / \Gamma_l$, $\Gamma_l \subset \mathbb{R}^l$ — некоторая l -мерная решетка, $k + l + m = d$. Это соответствует добавлению к U граней с периодическими краевыми условиями. С точностью до обозначений, доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 3.

Замечание 14. В скалярном случае (т.е. при $N = 1$) в качестве U вместо параллелепипеда можно рассматривать гладкое компактное риманово многообразие без края. Требования к Σ и σ будут теми же, но условие на электрический потенциал будет иметь вид $V \in L_{p, \text{loc}}(U \times \mathbb{R}^m)$, $p > d/2$, так как вместо результатов работы [4] придется применять результаты из [8].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность двумерного оператора Шрёдингера с дельта-потенциалом, сосредоточенным на периодической системе кривых*, Алгебра и анализ, **12:6** (2000), 140–177.

- [2] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности*, Алгебра и анализ, **11**:2 (1999), 1–40.
- [3] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov, *Restrictions of the Laplace–Beltrami eigenfunctions to submanifolds*, Duke Math. J., **138**:3 (2007), 445–486.
- [4] L. Danilov, *On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator*, J. Phys. A: Math. Theor., **42**:27 (2009), 275204.
- [5] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [6] И. В. Качковский, *Теорема Стейна–Томаса для тора и периодический оператор Шрёдингера с сингулярным потенциалом*, Алгебра и анализ, **24**:6 (2012), 124–138.
- [7] И. В. Качковский, Н. Д. Филонов, *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в многомерном цилиндре*, Алгебра и анализ, **21**:1 (2009), 133–152.
- [8] И. Качковский, Н. Филонов, *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в слое и в гладком цилиндре*, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 41, Зап. научн. сем. ПОМИ, **385** (2010), 69–82.
- [9] P. Kuchment, *Floquet Theory for Partial Differential Equations*, Birkhauser, Basel, 1993.
- [10] P. Kuchment, S. Levendorskii, *On the structure of spectra of periodic elliptic operators*, Trans. Amer. Math. Soc., **354**:2 (2001), 537–569.
- [11] А. Прохоров, Н. Филонов, *О спектре периодического оператора Максвелла в цилиндре* (в печати).
- [12] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики, т. 4, Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [13] A. Sobolev, J. Walthoe, *Absolute continuity in periodic waveguides*, Proc. London Math. Soc., **85**:3 (2002), 717–741.
- [14] E. Shargorodsky, A. V. Sobolev, *Quasiconformal mappings and periodic spectral problems in dimension two*, J. Anal. Math., **91** (2003), 67–103.
- [15] Т. А. Суслина, *On the absence of eigenvalues of a periodic matrix Schrödinger operator in a layer*, Russ. J. Math. Phys., **8**:4 (2001), 463–486.
- [16] Т. А. Суслина, *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Максвелла в слое*, Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций, 32, Зап. научн. сем. ПОМИ, **288** (2002), 232–255.
- [17] Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей*, Алгебра и анализ, **13**:5 (2001), 197–240.
- [18] Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра магнитного оператора Шрёдингера с метрикой в двумерном периодическом волноводе*, Алгебра и анализ, **14**:2 (2002), 159–206.
- [19] L. Thomas, *Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal*, Comm. Math. Phys., **33** (1973), 335–343.
- [20] Z. Shen, *On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators*, Intern. Math. Res. Notes, **2001**:1 (2001), 1–31.
- [21] Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра двумерного периодического оператора Шрёдингера с сильно подчиненным магнитным потенциалом*, Исследования по линейным операторам и теории функций, 31, Зап. научн. сем. ПОМИ, **303** (2003), 279–320.