Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Агранович, А. М. Селицкий, Дробные степени операторов, отвечающих коэрцитивным задачам в липшицевых областях, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 2, 2–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3109>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:01:53

Дробные степени операторов, отвечающих коэргитивным задачам в липшицевых областях*

© 2013. М. С. АГРАНОВИЧ, А. М. СЕЛИЦКИЙ

Пусть Ω — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть в ней задан матричный сильно эллиптический оператор L 2-го порядка, записанный в дивергентной форме. Обширная литература посвящена изучению областей определения дробных степеней операторов, отвечающих задачам для уравнения $Lu = f$, прежде всего Дирихле и Неймана, с однородными граничными условиями, включая решение проблемы Като, возникшей в 1961 г. Охвачены также смешанные задачи и некоторый класс задач для систем высших порядков.

Мы предлагаем новый абстрактный подход к этой проблематике, позволяющий существенно проще и единым образом получить наиболее важные, с нашей точки зрения, результаты и охватить новые операторы — классические граничные операторы на липшицевой границе Γ области Ω или ее части. Для этого мы одновременно рассматриваем два хорошо известных оператора, сопоставляемых граничной задаче.

Оператор L имеет вид

$$L = - \sum_{j,k=1}^n \partial_j a_{j,k}(x) \partial_k + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j + c(x), \quad (0.1)$$

где $\partial_j = \partial/\partial x_j$ и коэффициенты — $d \times d$ -матрицы из комплекснозначных функций. Эти коэффициенты подчиняются некоторым слабым предположениям о гладкости (см. п. 5). Условие сильной эллиптичности [10] состоит в том, что

$$\operatorname{Re} \sum a_{j,k}(x) \xi_j \xi_k \geq C_0 |\xi|^2 I \quad (0.2)$$

при $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \bar{\Omega}$ в смысле неравенства для квадратичных форм, где C_0 — положительная постоянная. С этим оператором связана «энергетическая» форма

$$\Phi_{\Omega}(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum a_{j,k}(x) \partial_k u(x) \cdot \partial_j \overline{v(x)} + \sum b_j(x) \partial_j u(x) \cdot \overline{v(x)} + c(x) u(x) \cdot \overline{v(x)} \right] dx. \quad (0.3)$$

Наша основная цель в этой статье — объяснение простого и единого подхода к положительному решению проблемы Като в наиболее интересных для нас вариантах; мы напомним ее в п. 3. Этот подход имеет и новые приложения.

Наши основные результаты — это теоремы в п. 3. Сначала мы будем рассматривать как модельные только задачи Дирихле и Неймана для системы $Lu = f$ в ограниченных липшицевых областях. Но изложение будет сразу абстрактным,

*Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00277, 12-01-00523а и 13-01-00923.

а в п. 4 мы объясним применимость нашего подхода к смешанным задачам, задачам для общих сильно эллиптических систем высших порядков и к новому в этой тематике (насколько мы знаем) классу операторов — классическим граничным операторам на липшицевой поверхности. При этом не нужна перестройка нашей схемы рассуждений. Некоторые известные несложные импликации будут заимствованы из работ по рассматриваемой тематике. Краткое сравнение нашей схемы с методикой в других работах будет приведено в п. 5.

1. Два классических операторных подхода к коэрцитивным задачам для сильно эллиптических систем. Рассмотрим следующую абстрактную ситуацию. Пусть заданы три (сепарабельных) гильбертовых пространства H_{-1} , H_0 , H_1 с компактными (для простоты) и плотными вложениями

$$H_{-1} \supset H_0 \supset H_1. \quad (1.1)$$

Скалярные произведения и нормы в этих пространствах обозначим через $(\cdot, \cdot)_k$ и $\|\cdot\|_k$, $k = -1, 0, 1$. Предположим, что пространства H_{-1} и H_1 дуальны относительно формы $(u, v)_0$ и что H_0 получается из H_{-1} и H_1 комплексной интерполяцией (см. определения в [9] и [17]) с индексом $1/2$:

$$H_0 = [H_{-1}, H_1]_{1/2}. \quad (1.2)$$

Далее, предположим, что на $H_1 \times H_1$ задана ограниченная полуторалинейная форма $\Phi(u, v)$, удовлетворяющая неравенству *сильной коэрцитивности*

$$\|u\|_1^2 \leq C \operatorname{Re} \Phi(u, u) \quad (1.3)$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Тогда соотношение

$$\Phi(u, v) = (A_1 u, v)_0 \quad (u, v \in H_1) \quad (1.4)$$

определяет ограниченный линейный оператор $A_1: H_1 \rightarrow H_{-1}$, и этот оператор обратим по теореме Лакса–Мильграма (см., например, [13, гл. 2, теорема 9.1], [48], [49] или [7]). Это модель *первого подхода* к интересующим нас задачам с однородными граничными условиями.

В случае сильно эллиптической системы 2-го порядка пространство H_0 — это $L_2(\Omega)$. В задаче Дирихле $H_1 = \tilde{H}^1(\Omega)$, $H_{-1} = H^{-1}(\Omega)$, в задаче Неймана $H_1 = H^1(\Omega)$, $H_{-1} = \tilde{H}^{-1}(\Omega)$. Коэрцитивность (неравенство вида (1.3) с добавлением $\|u\|_0^2$ справа) следует из сильной эллиптичности в случае матричной задачи Дирихле и скалярной ($d = 1$) задачи Неймана при $a_{j,k} = a_{k,j}$, но это дополнительное предположение в случае матричной задачи Неймана (хорошо известны достаточные условия, см. [49], [48] или [7]).

Здесь $H^s(\Omega)$ ($s \in \mathbb{R}$) — это L_2 -пространство бесселевых потенциалов в Ω — сужений элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$ на Ω с обычной $\inf$ -нормой. При $s \geq 0$ это пространства W_2^s Соболева–Слободецкого. Через $\tilde{H}^s(\Omega)$ обозначается подпространство в $H^s(\mathbb{R}^n)$, состоящее из элементов с носителями в $\bar{\Omega}$. При $|s| < 1/2$ пространства $H^s(\Omega)$ и $\tilde{H}^s(\Omega)$ можно отождествить. При не полуцелом $s \geq 0$ пространство $\tilde{H}^s(\Omega)$ можно отождествить с $\mathring{H}^s(\Omega)$ — замыканием в $H^s(\Omega)$ линейного продолжения скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ на их прямое произведение. Добавим, что пространства $H^s(\Gamma)$ на липшицевой границе Γ области Ω определяются при помощи локальных карт при $|s| \leq 1$. См. [48] или [7].

Та же форма Φ определяет сопряженный к A_1 оператор A_1^* равенством

$$\Phi(u, v) = (u, A_1^* v)_0 \quad (u, v \in H_1), \quad (1.5)$$

или, что то же,

$$\overline{\Phi(v, u)} = (A_1^* u, v)_0 \quad (u, v \in H_1). \quad (1.6)$$

Операторы A_1 и A_1^* формально сопряжены относительно формы $(u, v)_0$: на элементах из H_1 . В наших модельных задачах A_1^* отвечает формально сопряженному к L оператору L^* .

Пусть $\Lambda = \Lambda_\theta$ — наименьший замкнутый угол (сектор) раствора 2θ с биссектрисой $\mathbb{R}_+$, содержащий все значения формы $\Phi(u, u)$. Из (1.3) следует, что мнимая часть формы оценивается через вещественную, поэтому $2\theta < \pi$. Оператор A_1 в H_{-1} имеет область определения H_1 и дискретный спектр, содержащийся в этом угле; при этом собственных значений нет в некоторой окрестности начала. То же верно для оператора A_1^* . Корневые векторы лежат в H_1 .

Пусть теперь форма $\Phi(u, v)$ эрмитова:

$$\Phi(u, v) = \overline{\Phi(v, u)} \quad (u, v \in H_1). \quad (1.7)$$

Тогда сектор Λ — это просто луч $\overline{\mathbb{R}}_+$. Переобозначим форму в этом случае через $\Psi(u, v)$ и соответствующий оператор через S_1 . Он обратим и является формально самосопряженным относительно формы $(u, v)_0$: $(S_1 u, v)_0 = (u, S_1 v)_0$ при $u, v \in H_1$. Эрмитова форма

$$\langle u, v \rangle_1 = \Psi(u, v) = (S_1 u, v)_0 = (u, S_1 v)_0 \quad (1.8)$$

на H_1 удовлетворяет условию (сильной) коэрцитивности

$$\|u\|_1^2 \leq C \langle u, u \rangle_1 \quad (u \in H_1), \quad (1.9)$$

и мы можем принять ее за скалярное произведение в H_1 . Соответствующая норма эквивалентна исходной норме в H_1 . Заменяя u на $S_1^{-1}u$ и v на $S_1^{-1}v$, получаем новое скалярное произведение в H_{-1}

$$\langle u, v \rangle_{-1} = (S_1^{-1}u, v)_0 = (u, S_1^{-1}v)_0. \quad (1.10)$$

Соответствующая норма эквивалентна исходной норме в H_{-1} , а оператор S_1 (с областью определения H_1) является самосопряженным в H_{-1} относительно этого скалярного произведения. Компактный оператор S_1^{-1} в H_{-1} тоже является самосопряженным относительно этого скалярного произведения.

В общем случае, поскольку операторы A_1 и A_1^* в H_{-1} имеют общую область определения H_1 , вещественная часть S_1 этих операторов легко вводится как их полусумма. Соответствующая форма $\Psi(u, v)$ есть полусумма форм $\Phi(u, v)$ и $\overline{\Phi(v, u)}$, она при $u = v$ положительна и удовлетворяет неравенству (1.9):

$$\|u\|_1^2 \leq C \Psi(u, u) \quad (u \in H_1). \quad (1.11)$$

По оператору S_1 определяются скалярные произведения (1.8) и (1.10). Фактически он строится по форме Φ .

Следующее предложение известно и легко проверяется.

Предложение 1.1. Пусть Λ' — открытый угол с вершиной в начале, содержащий $\Lambda \setminus \{0\}$. Тогда для решения $v(\lambda)$ уравнения $(A_1 - \lambda I)v(\lambda) = f$ при $f \in H_{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda'$ справедлива априорная оценка

$$\|v(\lambda)\|_1 + |\lambda| \|v(\lambda)\|_{-1} \leq C_1 \|f\|_{-1} \quad (1.12)$$

с постоянной C_1 , не зависящей от f и λ .

Поясним, что при $|\arg \lambda| \geq \pi/2$ сначала получается равномерная по λ оценка для $\|v(\lambda)\|_1$ из (1.3)–(1.4), так как справа в (1.3) можно прибавить $-\operatorname{Re} \lambda(u, u)_0$. Затем используем уравнение для $v(\lambda)$. На все нужные λ оценка распространяется переходом от формы Φ к формам $e^{i\theta}\Phi$ с малыми $|\theta|$.

Второй подход к нашим задачам состоит в том, что по существу то же, что и (1.4), соотношение

$$\Phi(u, v) = (A_2 u, v)_0 \quad (v \in H_1) \quad (1.13)$$

рассматривается как определяющее неограниченный линейный оператор A_2 в H_0 с областью определения $H_2 = D(A_2)$, содержащейся в H_1 :

$$H_1 \supset H_2. \quad (1.14)$$

В абстрактных рамках область определения $D(A_2)$ оператора A_2 определяется как состоящая из таких $u \in H_1$, что антилинейный функционал $\Phi(u, v)$ на H_1 непрерывен по норме $\|v\|_0$:

$$|\Phi(u, v)| \leq C_u \|v\|_0. \quad (1.15)$$

Он поэтому продолжается до непрерывного антилинейного функционала на H_0 и записывается в виде (1.13). В H_2 вводится норма графика

$$\|u\|_2 = (\|u\|_0^2 + \|A_2 u\|_0^2)^{1/2}, \quad (1.16)$$

после чего H_2 становится гильбертовым пространством, а A_2 — ограниченным оператором из H_2 в H_0 .

Если $A_1 u = f \in H_0$, то форма $\Phi(u, v) = (f, v)_0$, конечно, непрерывна по v в H_0 , так что $u \in H_2$, $A_2 u = A_1 u$, $A_2^{-1} f = A_1^{-1} f$. Поэтому A_2 есть сужение оператора A_1 на H_2 . В задачах Дирихле и Неймана это реализации соответствующего оператора L в $L_2(\Omega)$.

Оператор A_2^* , сопряженный к A_2 в H_0 , и самосопряженный оператор S_2 определяются соответственно формой $\overline{\Phi(v, u)}$ и полусуммой $\Psi(u, v)$ форм $\Phi(u, v)$ и $\overline{\Phi(v, u)}$. Эти операторы соответственно совпадают с A_1^* на $D(A_2^*)$ и с S_1 на $D(S_2)$.

Предложение 1.2. *Оператор A_2 обратим. То же верно для операторов A_2^* и S_2 .*

Доказательство см., например, в [42, с. 11].

Следствие 1.3. *Пространство $H_2 = D(A_2)$ плотно и компактно вложено в H_1 . То же верно для $D(A_2^*)$ и $D(S_2)$.*

Действительно, соответствующий оператор вложения $\mathcal{E}_{2,1}$ можно представить в виде $A_1^{-1} \mathcal{E}_{0,-1} A_2$, где $\mathcal{E}_{0,-1}$ — оператор вложения H_0 в H_{-1} . Последний компактен, поэтому $\mathcal{E}_{2,1}$ компактен. Далее, если $u_0 \in H_1$, то $v_0 = A_1 u_0$ можно аппроксимировать в H_{-1} элементами $v_k \in H_0$. Тогда $w_k = A_2^{-1} v_k = A_1^{-1} v_k$ принадлежат H_2 и сходятся к u_0 в H_1 .

См. также [11, гл. VI, §2].

Для оператора A_2 справедлив также аналог предложения 1.1:

Предложение 1.4. Для решений $v(\lambda)$ в H_2 уравнения $(A_2 - \lambda I)v(\lambda) = f$, $f \in H_0$, при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda'$ справедлива оценка

$$\|v(\lambda)\|_2 + |\lambda|\|v(\lambda)\|_0 \leq C_2\|f\|_0 \quad (1.17)$$

с постоянной C_2 , не зависящей от f и λ . То же верно для операторов A_2^* и S_2 вместо A_2 .

Здесь сначала оцениваем $|\operatorname{Re} \lambda|\|v(\lambda)\|_0$ через $\|f\|_0$ при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. В немного более узком угле с биссектрисой $\mathbb{R}_-$ получаем отсюда оценку для $|\lambda|\|v(\lambda)\|_0$. На угол раствора больше $\pi/2$ она распространяется умножением оператора и формы на $e^{i\theta}$. Теперь из уравнения получается оценка для $\|A_2 v(\lambda)\|_0$. Это приводит к оценке первого слагаемого в (1.17).

Спектры и корневые векторы у операторов A_1 и A_2 одинаковы. Это следует из того, что собственные векторы оператора A_1 принадлежат H_0 , а значит, H_2 , поскольку собственные значения ненулевые. Аналогично обстоит дело с операторами A_2^* и A_1^* , а также с операторами S_2 и S_1 .

Второй подход к задачам для сильно эллиптических систем тоже общеизвестен, отражен, например, в монографиях [42] и [11] (гл. VI, § 2) и рассматривался в очень многих работах. Важнейший вопрос — возможно более полное описание пространства $D(A_2) = H_2$. Для систем 2-го порядка с гладкими коэффициентами в области с гладкой границей оно получается, если выполнены условия эллиптичности задачи, из результатов общей теории эллиптических задач (см., например, [18] или [7]). Это подпространство в $H^2(\Omega)$, выделяемое однородными граничными условиями. При этом ясно, что, например, в случае задачи Неймана области определения операторов A_2 и A_2^* могут быть разными. В области с липшицевой границей в общем случае $D(A_2)$ неизвестна.

Первый подход очень удобен «адекватностью» используемых и заранее заданных пространств рассматриваемым задачам. В наших конкретных задачах это пространства типа Соболева–Слободецкого. Операторы A_1 и A_1^* имеют общую и известную область определения H_1 . Второй подход удобен тем, что правые части системы принадлежат $L_2(\Omega)$.

Оба подхода обобщаются на ситуацию, в которой оператор фредгольмов и приводится к обратимому включением в L слагаемого $\mu i(x)$ с достаточно большим положительным μ .

2. Позитивные операторы и их дробные степени. Напомним некоторые общеизвестные определения и факты. Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и A — замкнутый линейный оператор в X с плотной областью определения $D(A) \subset X$. Он называется *позитивным*, если замкнутая отрицательная полуось $\overline{\mathbb{R}}_-$ принадлежит резольвентному множеству этого оператора и на ней для резольвенты $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ выполняется неравенство

$$\|R(\lambda)\| \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}. \quad (2.1)$$

Отсюда следует, что резольвентное множество содержит некоторый сектор с биссектрисой $\mathbb{R}_-$ и некоторую окрестность начала координат (см., например, [12]); в угле чуть меньшего раствора с той же биссектрисой и чуть меньшей окрестности сохраняется неравенство вида (2.1). Для простоты будем считать, что A имеет дискретный спектр.

Через Λ сейчас обозначим фиксированный замкнутый сектор с биссектрисой $\mathbb{R}_+$, вне которого верна оценка (2.1). Он содержит спектр оператора.

Примерами позитивных операторов являются оператор A_1 в H_{-1} и оператор A_2 в H_0 из п. 1. В этих случаях есть общий для них сектор Λ раствора меньше π . Примеры позитивных операторов в общей теории «гладких» эллиптических задач — это эллиптические с параметром вдоль $\mathbb{R}_-$ системы и задачи с однородными граничными условиями, однозначно разрешимые во всех точках замыкания этого луча (см. [21] или [8]).

Для позитивного оператора A можно определить его степени A^z с произвольным комплексным z . Степени $A^{-\alpha}$ с $\operatorname{Re} \alpha > 0$ определяются формулой

$$A^{-\alpha} = -\frac{1}{2\pi i} \int_l \lambda^{-\alpha} R(\lambda) d\lambda. \quad (2.2)$$

Здесь бесконечный контур l охватывает спектр оператора A . В основном этот контур идет по лучам, охватывающим сектор Λ , но вблизи начала координат обходит его справа и не имеет общих точек с $\mathbb{R}_-$. Направление обхода — сверху из бесконечности, т. е. положительное. Это ограниченный оператор. Неограниченный оператор A^α определяется как обратный к $A^{-\alpha}$. Определения степеней A^α при общих комплексных α можно смотреть, например, в книгах [17] и [12], а также в [22] и [35].

При перемножении двух степеней действует обычное правило сложения показателей. Если $0 \leq \alpha < \beta$, то область определения $D(A^\beta)$ плотно вложена в $D(A^\alpha)$. Кроме того, в гильбертовом пространстве $(A^\alpha)^* = (A^*)^\alpha$ (см., например, [35]).

В литературе большое внимание было уделено нахождению областей определения положительных дробных степеней, в частности, из-за их роли в нестационарных задачах. Следующая теорема доказана в книге Трибеля [17, п. 1.15].

Теорема 2.1. Пусть A — позитивный оператор в гильбертовом пространстве $X = H$ и его чисто мнимые степени A^{it} — ограниченные операторы при достаточно малом t , имеющие равномерно по t ограниченные нормы. Тогда если $0 \leq \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \beta < \infty$ и $0 < \theta < 1$, то

$$[D(A^\alpha), D(A^\beta)]_\theta = D(A^{\alpha(1-\theta)+\beta\theta}). \quad (2.3)$$

Арендт в [22, п. 4.4.10] указывает, что верно и обратное утверждение: из (2.3) следует локальная по t равномерная ограниченность операторов A^{it} с вещественным t .

Условие локальной ограниченности чисто мнимых степеней выполнено не всегда, см., например, [41, с. 342].

Простейший случай, когда чисто мнимые степени ограничены, — это случай самосопряженного позитивного оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Если спектр этого оператора дискретен, то в H имеется ортонормированный базис из собственных векторов e_j нашего оператора ($j = 1, 2, \dots$), и если λ_j — соответствующие собственные значения, то любой вектор в H разлагается в ряд

$$u = \sum_1^\infty (u, e_j) e_j, \quad \|u\|^2 = \sum_1^\infty |(u, e_j)|^2, \quad (2.4)$$

а оператор A^α действует по формуле

$$A^\alpha u = \sum_1^\infty \lambda_j^\alpha (u, e_j) e_j. \quad (2.5)$$

Этот оператор при $\operatorname{Re} \alpha > 0$ является неограниченным: ряд

$$\|A^\alpha u\|^2 = \sum |\lambda_j^\alpha|^2 |(u, e_j)|^2$$

сходится не при всех u . Но очевидно, что при чисто мнимом $\alpha = it$ это равномерно по t ограниченный оператор.

Трибель пишет, что об ограниченности чисто мнимых степеней позитивных операторов мало что известно. Однако для операторов, отвечающих «гладким» задачам, эллиптическим с параметром вне угла раствора меньше π (а также «бисекториальным» задачам, эллиптическим с параметром вне вертикальных углов, содержащих мнимую ось), положительный результат содержится в работе Сили [51].

Глубокие исследования проблемы Като принесли положительные результаты для операторов A_1 , отвечающих, в частности, коэрцитивным задачам Дирихле и Неймана в липшицевых областях. Мы напомним эту проблему и объясним наш подход к ней в следующем пункте.

Для подготовки к этому приведем результат Лионса [43]–Яги [55].

Теорема 2.2. Пусть для позитивного оператора A в гильбертовом пространстве H выполнено соотношение

$$D(A^\alpha) = D(A^{*\alpha}) \quad (2.6)$$

при $0 < \alpha < \varepsilon$ с достаточно малым ε . Тогда

$$D(A^\alpha) = [H, D(A)]_\alpha, \quad D(A^{*\alpha}) = [H, D(A^*)]_\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \quad (2.7)$$

При этом чисто мнимые степени A^{it} оператора A локально ограничены.

Упомянем тесную связь позитивных операторов с полугруппами, важную при рассмотрении нестационарных задач. См., например, [12], [17], [22], [35].

3. Дробные степени операторов, отвечающих коэрцитивным задачам в липшицевых областях, и проблема Като. Вернемся к операторам из п. 1. Будем считать, что выполнены указанные там предположения о пространствах и операторах. Но при обсуждении проблемы Като мы дополним их предположением, сформулированным немного ниже.

Области определения дробных степеней S_1^α самосопряженного оператора S_1 , как видно из сказанного в предыдущем пункте, при $0 \leq \alpha \leq 1$ образуют шкалу для комплексного метода интерполяции между пространствами H_{-1} и H_1 . Обозначим эти пространства через H_τ , $\tau = -1 + 2\alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Поясним, что если $\{e_j\}_1^\infty$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора S_1 в H_{-1} и λ_j — соответствующие собственные значения, то H_τ состоит из векторов

$$u = \sum_1^\infty \lambda_j^\alpha \langle u, e_j \rangle_{-1} e_j \quad \text{с} \quad \|u\|_\tau^2 = \sum_1^\infty \lambda_j^{2\alpha} |\langle u, e_j \rangle_{-1}|^2 < \infty. \quad (3.1)$$

При $\tau = 0$ оно совпадает с H_0 . Оператор S_1^α действует ограниченным и обратимым образом из H_{τ_1} в H_{τ_2} при $\tau_2 = \tau_1 - 2\alpha$.

Эту шкалу можно, используя степени оператора S_1 , продолжить за точки ± 1 . В задачах Дирихле и Неймана в липшицевых областях, как мы отметили в п. 1, это пространства $H^\tau(\Omega)$ и $\tilde{H}^\tau(\Omega)$, заданные априорно. В частности, S_1 остается ограниченным и обратимым оператором из $H_{1+\gamma}$ в $H_{-1+\gamma}$ при любом $\gamma \in \mathbb{R}$. Но мы договоримся пользоваться обозначением H_τ только при $\tau \in (-3/2, 3/2)$, чтобы сохранить обозначение H_2 для $D(A_2)$. В гладком случае в этих обозначениях нет противоречий и можно рассматривать H_τ при любых τ .

Мы предположим выполненным следующее

Условие 3.1. *Операторы A_1 и A_1^* остаются ограниченными из $H_{1+\gamma}$ в $H_{-1+\gamma}$ при $|\gamma| < \varepsilon$ с некоторым малым $\varepsilon > 0$.*

В задачах Дирихле и Неймана с этим нет проблем (см. [1] или [7]). Такая ограниченность обеспечивается предположением о небольшой гладкости коэффициентов.

Более того, по теореме Шнейберга об экстраполяции обратимости оператора, действующего ограниченным образом из одной интерполяционной шкалы в другую (см. [20] или [7]), *эти операторы обратимы* при $|\gamma| < \varepsilon_1$, где ε_1 — некоторое достаточно малое положительное число, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon$. Для коэрцитивных задач Дирихле и Неймана это теоремы о гладкости решений (см. [1], [2], [7]).

В этом пункте мы объясним предлагаемый нами простой путь к важным результатам для дробных степеней операторов A_1 и A_2 . Начнем с оператора A_2 .

Как мы уже отмечали, в общем случае нет информации о $H_2 = D(A_2)$. Однако Като из элементарных соображений получил, даже для позитивных операторов с углом Λ_θ раствора $2\theta < \pi$ ([39, теорема 1.1]), что

$$D(A_2^\alpha) = D(A_2^{*\alpha}) = D(S_2^\alpha) \quad \text{при } 0 \leq \alpha < 1/2. \quad (3.2)$$

Таких равенств, как отметил Като, в общем случае нет при $1/2 < \alpha < 1$, а Лионс показал (на том же примере) [43], что их может не быть и при $\alpha = 1/2$. (См. также контрпример Макинтоша в [44] с не дифференциальным оператором, отвечающим коэрцитивной форме.) Возникла содержательная проблема: когда справедливы равенства

$$D(A_2^{1/2}) = D(A_2^{*1/2}) = H_1. \quad (3.3)$$

Она получила известность как *проблема Като* (the Kato square root problem) и вызвала много содержательных исследований. В частности, для задач Дирихле и Неймана и других упомянутых в аннотации задач в липшицевых областях разными и непростыми способами было показано, что проблема решается положительно. См. ниже ссылки в п. 4 и п. 5.

Заметим, что в силу теоремы 2.2

$$D(A_2^\alpha) = [H_0, D(A_2)]_\alpha, \quad D(A_2^{*\alpha}) = [H_0, D(A_2^*)]_\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1). \quad (3.4)$$

Но $D(A_2)$ и $D(A_2^*)$ в общем случае остаются не известными и могут не совпадать, так что решение проблемы Като непосредственно отсюда не следует.

Для гладких эллиптических задач пространства справа в (3.4) описаны в работе Гривара [34], см. также Сили [52], и из этого описания видно, что проблема в этом случае решается положительно.

Совпадение двух из пространств (3.3) влечет совпадение всех трех ([40], [43]). Поэтому, в частности, проблема решается положительно в случае самосопряженного оператора S_2 .

Мы хотим теперь показать, что проблема Като решается положительно в принятой нами общности.

Теорема 3.2. *При наших предположениях для операторов A_2 и A_2^* справедливы равенства (3.3).*

Доказательство. Положим

$$B = S_1^{-1/2} A_1 S_1^{-1/2}. \quad (3.5)$$

Это при наших предположениях ограниченный обратимый оператор в H_γ при малых $|\gamma|$, и мы имеем существенную для дальнейшего *факторизацию оператора A_1* :

$$A_1 = S_1^{1/2} B S_1^{1/2}. \quad (3.6)$$

Оператор B не произволен: так как $S_1 = \frac{1}{2}[A_1 + A_1^*]$, то

$$A_1^* = 2S_1 - A_1 = 2S_1 - S_1^{1/2} B S_1^{1/2} = S_1^{1/2} (2I - B) S_1^{1/2} = S_1^{1/2} B^* S_1^{1/2}$$

и

$$\frac{1}{2}(B + B^*) = I. \quad (3.7)$$

Лемма 3.3. *Имеют место непрерывные вложения*

$$H_1 \subset D(A_2^{1/2}), \quad H_1 \subset D(A_2^{*1/2}). \quad (3.8)$$

Отсюда теорема 3.2 следует в силу результата из [40, с. 293]; см. также [43]. Этот путь подсказан нам работой [32], в которой рассмотрены более специальные задачи. В отличие от нее мы будем пользоваться оператором A_1 , совпадающим с A_2 на $D(A_2)$, и его факторизацией (3.6).

Пусть γ — малое положительное число. Тогда $D(A_2) \subset H_{1+\gamma}$, так как оператор A_1 взаимно однозначно и непрерывно отображает эти пространства на $H_0 \subset H_{-1+\gamma}$. Последнее включение является плотным, поэтому $D(A_2)$ плотно вложено в $H_{1+\gamma}$.

Для доказательства леммы 3.3, как в [32], докажем следующую лемму.

Лемма 3.4. *Пространство $H_{1+\gamma}$ непрерывно вложено в пространства $D(A_2^{(1+\gamma)/2})$ и $D(A_2^{*(1+\gamma)/2})$.*

Доказательство леммы 3.4. Зафиксируем любые u и v сначала в $D(A_2)$ и $D(A_2^*)$ соответственно. Положим $\delta = (1 - \gamma)/2$. Тогда $\delta \in (0, 1/2)$.

Оператор $A_2^{*- \delta}$ непрерывен из H_0 в $D(A_2^{\delta})$. Но в силу (3.2) и самосопряженности оператора S_2

$$D(A_2^{\delta}) = D(S_2^{\delta}) = [H_0, D(S_2^{1/2})]_{2\delta} = [H_0, H_1]_{2\delta} = H_{2\delta}.$$

Поэтому $A_2^{*- \delta}$ — непрерывный оператор из H_0 в $H_{2\delta}$. Так как $2\delta - 1 = -\gamma$, то $S_1^{1/2} A_2^{*- \delta}$ — непрерывный оператор из H_0 в $H_{-\gamma}$:

$$\|S_1^{1/2} A_2^{*- \delta} v\|_{-\gamma} \leq C_1 \|v\|_0 \quad (3.9)$$

даже для $v \in H_0$.

Кроме того, $B S_1^{1/2}$ — ограниченный оператор из $H_{1+\gamma}$ в H_γ :

$$\|B S_1^{1/2} u\|_\gamma \leq C_2 \|u\|_{1+\gamma}. \quad (3.10)$$

Далее, мы имеем с учетом того, что $A_2^* = A_1^*$ на $D(A_2^*)$,

$$A_2^{*(1+\gamma)/2} v = A_2^{*- \delta} A_2^* v = A_2^* A_2^{*- \delta} v = A_1^* A_2^{*- \delta} v.$$

Поэтому $(u, A_2^{*(1+\gamma)/2} v)_0 = (A_1 u, A_2^{*- \delta} v)_0$, или (см. (3.6))

$$(A_2^{(1+\gamma)/2} u, v)_0 = (BS_1^{1/2} u, S_1^{1/2} A_2^{*- \delta} v)_0.$$

Отсюда в силу обобщенного неравенства Шварца и неравенств (3.9), (3.10)

$$|(A_2^{(1+\gamma)/2} u, v)_0| \leq C_3 \|BS_1^{1/2} u\|_\gamma \|S_1^{1/2} A_2^{*- \delta} v\|_{-\gamma} \leq C_4 \|u\|_{1+\gamma} \|v\|_0.$$

Так как $D(A_2^*)$ плотно в H_0 , то получаем, что

$$\|A_2^{(1+\gamma)/2} u\|_0 \leq C_4 \|u\|_{1+\gamma}. \quad (3.11)$$

Это неравенство предельным переходом распространяется на $u \in H_{1+\gamma}$. Из него видно, что $H_{1+\gamma}$ содержится в $D(A_2^{(1+\gamma)/2})$ и что вложение непрерывно, поскольку левую часть в (3.11) можно считать нормой в $D(A_2^{(1+\gamma)/2})$.

Для $D(A_2^{*(1+\gamma)/2})$ все аналогично. $\square$

Доказательство леммы 3.3. Мы имеем теперь, используя первое равенство в (3.4) и теорему о реитерации (см. [9] или [17]),

$$H_1 = [H_0, H_{1+\gamma}]_{1/(1+\gamma)} \subset [H_0, D(A_2^{(1+\gamma)/2})]_{1/(1+\gamma)} = [H_0, D(A_2)]_{1/2} = D(A_2^{1/2}).$$

Аналогично получаем, что $H_1 \subset D(A_2^{*1/2})$.

Этим лемма 3.3 и теорема 3.2 доказаны.

Перейдем к оператору A_1 .

Теорема 3.5. При наших предположениях чисто мнимые степени оператора A_1 локально ограничены. При $0 < \alpha < 1$

$$D(A_1^\alpha) = [H_{-1}, H_1]_\alpha. \quad (3.12)$$

Этот результат следует из его эквивалентности результату теоремы 3.2, которая объяснена в [22, пп. 5.5.2 и 4.4.10]. Впрочем, эта эквивалентность проверяется несложно. Если $D(A_2^{1/2}) = H_1$, то

$$\begin{aligned} D(A_1^{1/2}) &= A_1^{-1/2} H_{-1} = A_1^{1/2} A_1^{-1} H_{-1} = A_1^{1/2} H_1 \\ &= A_1^{1/2} A_2^{-1/2} A_2^{1/2} H_1 = A_1^{1/2} A_2^{-1/2} H_0 = H_0. \end{aligned}$$

Здесь равенство $A_2^{-1/2} = A_1^{-1/2}$ на H_0 следует из формулы вида (2.2) с $\alpha = 1/2$ для A_2 : в ней можно заменить $R(\lambda) = (A_2 - \lambda I)^{-1}$ на $(A_1 - \lambda I)^{-1}$, поскольку $A_2 = A_1$ на $D(A_2)$. Этим равенство (3.12) получено для $\alpha = 1/2$. На остальные α оно распространяется при помощи теоремы 6.6.8 из [35] (Хаасе указывает, что эта теорема принадлежит по существу Коматсу), в силу которой справедливость этого равенства следует из его справедливости для какого-нибудь значения α . Объяснение обратной импликации ((3.12) для $\alpha = 1/2 \Rightarrow (3.3)$) занимает у Арендта две строчки. Операторы $A_1^{1/2}$ и $A_2^{*1/2}$ оказываются сопряженными в смысле теории ограниченных операторов в парах банаховых (у нас гильбертовых) пространств.

Добавим также, что интерполяционные шкалы $\{H_{-1+2\alpha}\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, и $\{[H_0, D(A_2)]_\theta\}$, $0 \leq \theta \leq 1$, «склеиваются» в одну шкалу по теореме Вольфа (см. [54] и [38]) благодаря положительному решению проблемы Като (так как имеет место совпадение этих шкал на пространствах H_0 и H_1). Поэтому операторы A_1 и A_2 оказываются «согласованными» в пространствах между H_{-1} и $D(A_2)$. Любое утверждение о гладкости для решений уравнения $A_1 u = f$ дает некоторую информацию о $D(A_2)$. См. [48] и [1]–[3] или [7]. И наоборот, любая информация о $D(A_2)$ может содержать утверждение о гладкости для решений уравнения $A_1 u = f$.

4. Некоторые приложения.

4.1. Смешанные и более общие задачи. Смешанная задача для системы $Lu = f$ состоит в том, что ищется решение, подчиненное однородным условиям Дирихле на части Γ_1 границы и однородным условиям Неймана на дополнительной части Γ_2 . Смешанным задачам посвящена очень большая литература. В [5], [7] рассмотрен случай, когда Γ_1 — область на замкнутой липшицевой поверхности с липшицевым краем. Пространство H_1 — это подпространство $H_{\Gamma_1}^1(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$, состоящее из функций, равных нулю на Γ_1 . Нужна сильная коэрцитивность формы (0.3) на этом пространстве (вытекающая из сильной коэрцитивности на $H^1(\Omega)$). Отдельно рассматривать соответствующие операторы A_1 и A_2 не приходится (ср. [45], [30]), применимы результаты из п. 3. Результаты обобщаются на случай, когда Γ_1 и Γ_2 — открытые множества, состоящие из компонент связности с липшицевыми краями.

Отметим, что здесь нужен следующий результат об интерполяции для пространств $H_{\Gamma_1}^s(\Omega)$: если $1 - \varepsilon < s_1 < s_2 < 1 + \varepsilon$, то

$$[H_{\Gamma_1}^{s_1}(\Omega), H_{\Gamma_1}^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_{\Gamma_1}^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega) \quad (0 < \theta < 1). \quad (4.1)$$

Укажем простой способ его получения в предположении однозначной разрешимости задачи Дирихле для рассматриваемых s . Пространство $H^s(\Omega)$ можно представить в виде прямой суммы подпространства $\tilde{H}^s(\Omega)$ и подпространства решений однородной системы $Lu = 0$ («разложение Вейля», см. [6], [7]). Последнее параметризуется пространством $H^{s-1/2}(\Gamma)$ данных Дирихле этих решений. Аналогичное разложение имеет место для $H_{\Gamma_1}^s(\Omega)$, только второе подпространство надо заменить пространством решений однородной системы с нулевыми данными Дирихле на Γ_1 . Последнее параметризуется пространством $\tilde{H}^{s-1/2}(\Gamma_2)$ данных Дирихле этих решений — функций из $H^{s-1/2}(\Gamma)$ с носителями на $\bar{\Gamma}_2$. Интерполяция пространств $\tilde{H}^s(\Omega)$ и $\tilde{H}^{s-1/2}(\Gamma_2)$ не вызывает проблем. Отметим, что дело обстоит сложнее при более общем, чем у нас, крае $\partial\Gamma_1$, ср. [33].

Можно рассмотреть и более общие задачи, в которых область определения оператора A_1 — некоторое подпространство в $H^1(\Omega)$, содержащее $\mathring{H}^1(\Omega)$. Ср., например, [45]. Но здесь нам надо предположить, что выполнено наше условие 3.1. Тогда снова применимы результаты из п. 3.

4.2. Операторы на липшицевой границе. Теоремы 3.2 и 3.5 применимы также к операторам на липшицевой границе Γ , а именно, к оператору Дирихле D , к оператору A^{-1} (где $A\psi$ — сужение на границу потенциала простого слоя

$\mathcal{A}\psi$) и к гиперсингулярному оператору H (см. [3], [6], [7]) при уточняемых ниже предположениях.

Оператор Дирихле — это оператор, переводящий данные Дирихле для решенной однородной системы $Lu = 0$ в данные Неймана. Ему посвящена большая литература. В [3], [7] он рассмотрен для систем 2-го порядка в ограниченной липшицевой области.

Для введения операторов A и H удобно иметь две области $\Omega^\pm$ с общей границей. В [3], [7] рассмотрен случай, когда они вместе с их общей липшицевой границей составляют стандартный тор $\mathbb{T}^n$.

Во всех этих случаях $H_1 = H^{1/2}(\Gamma)$, $H_0 = H^0(\Gamma)$ и $H_{-1} = H^{-1/2}(\Gamma)$. В «гладких» задачах $H_2 = H^1(\Gamma)$.

В частности, формула (3.12) справедлива для оператора Дирихле как оператора из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$. В общих негладких задачах $D(A_2)$ остается неизвестной, хотя некоторая информация о $D(A_2)$ получается из теорем о гладкости (см. [48] и [3], [7]).

Во всех случаях граничных операторов первичны не форма, а оператор, по которому определяется форма:

$$\Phi(u, v) = (A_1 u, v)_0.$$

Ее сильная коэрцитивность в случае оператора D следует из сильной коэрцитивности формы (0.3) на $H^1(\Omega)$. В случае оператора A^{-1} достаточно иметь сильную коэрцитивность формы вида (0.3) на $H^1(\mathbb{T}^n)$, а в случае оператора H — на $H^1(\Omega^\pm)$. См. [3], [7] и приведенные там ссылки. Снова не требуется отдельное рассмотрение этих ситуаций, применимы результаты из п. 3.

Эти результаты можно перенести и на рассмотренные в [4], [5], [7] операторы на части липшицевой границы с липшицевым краем. Можно охватить и фредгольмовы ситуации.

4.3. Задачи для систем высших порядков. Пусть $m_1, \dots, m_d$ — заданные целые положительные числа. Сильную эллиптичность можно определить для матричного оператора $L = (L_{r,s})_{r,s=1}^d$, где $\text{ord } L_{r,s} = m_r + m_s$. См. [50], где рассмотрена задача Дирихле с решениями из $\tilde{H}^m(\Omega)$, [49] и [2], где рассмотрена и задача Неймана. Как и раньше, Ω — ограниченная липшицева область. Здесь

$$H^m(\Omega) = \prod_{i=1}^d H^{m_i}(\Omega), \quad \tilde{H}^m(\Omega) = \prod_{i=1}^d \tilde{H}^{m_i}(\Omega).$$

Например, в задаче Неймана $H_1 = H^m(\Omega)$ и $H_{-1} = \prod_{i=1}^d \tilde{H}^{-m_i}(\Omega)$. Форма $\Phi(u, v)$ имеет вид

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^d \sum_{|\alpha|=m_j, |\beta|=m_k} a_{\alpha,\beta}^{j,k} \partial^\beta u_k(x) \cdot \partial^\alpha \overline{v_j(x)} dx + \dots$$

Как и для систем 2-го порядка, в случае задачи Дирихле коэрцитивность следует из сильной эллиптичности, а в случае задачи Неймана является добавочным условием; достаточные условия см., например, в [49] и [2]. По крайней мере, эти задачи не требуют дополнительных рассмотрений, применимы теоремы из п. 3. Ср. [26].

5. Сравнение нашего подхода с известными. Как мы уже упоминали, исследованию проблемы Като посвящена обширная литература. Давно были получены полные результаты для задач Дирихле и Неймана в липшицевых областях, см., например, [47], [24], [36] и приведенные там ссылки. Важнейшие результаты принадлежат Аушеру–Чамитчану, Макинтошу и другим математикам. См. наш список литературы, но он далеко не полон; см. также ссылки в работах этого списка. Терминология в этих работах, как правило, не совпадает с нашей, но объясняется, так что эти расхождения не затруднят читателя.

В этих работах главным образом рассматривается оператор A_2 , хотя оператор A_1 и упомянутые в п. 3 эквивалентности были известны. В нашем же подходе очень существенно используются возможность одновременного рассмотрения этих двух операторов и некоторые специфические свойства оператора A_1 . При помощи оператора A_1 решается проблема Като для оператора A_2 , что, в свою очередь, влечет нужные результаты для оператора A_1 . По-видимому, наш подход заслуживает внимания благодаря простоте и единообразию рассуждений.

В частности, нам удалось избежать рассмотрений сначала в $\mathbb{R}^n$, полупространстве и неограниченных «специальных» липшицевых областях. Этот путь используется в [27], [28], см. также ссылки в этих работах.

Мы могли включить в рассмотрение случай операторов в $\mathbb{R}^n$, отказавшись от предположения о компактности вложений (1.1). Можно было бы рассмотреть и задачи в неограниченных (строго) липшицевых областях. Но в таких областях интересны различные предположения о поведении решений на бесконечности, влияющие на выбор пространств, и мы сочли, что кратко останавливаться на этом нецелесообразно.

Как в [45] и [32], нам нужна небольшая гладкость старших коэффициентов в (0.1). Достаточно предполагать, что это мультипликаторы в пространствах $H^s(\Omega)$ с малыми $|s|$. Младшие коэффициенты можно считать ограниченными и измеримыми в Ω . «Средние» коэффициенты можно было бы предположить липшицевыми, чтобы иметь возможность дифференцировать их при переходе к формально сопряженной системе. Но экономнее рассматривать наш оператор как слабое возмущение оператора без средних и младших членов, как, например, в [32]. Тогда и средние коэффициенты можно считать ограниченными и измеримыми. Аналогично обстоит дело с задачами для систем высших порядков. В некоторых работах (см., например, [30], [23]) положительное решение проблемы Като в рассмотренных там ситуациях получено в предположении ограниченности и измеримости старших коэффициентов.

Далее, случай системы (0.1) для нас не сложнее случая скалярного уравнения. Нам не пришлось имитировать структуру скалярного уравнения в дивергентной форме $\operatorname{div}(a(x)\nabla)u = f$ или строить сложную факторизацию в матричном случае: по существу нам хватило факторизации (3.6). Работа [32] подсказала нам идею доказывать включения (3.8), но ее предположения обременительны в случае матричных L .

Мы не упоминали H^∞ -ограниченное функциональное исчисление (см., в частности, [46], [25]); на самом деле его наличие для A_1 эквивалентно справедливости теорем 3.2 и 3.5, см. [22], и это содержательный факт.

Мы не останавливались на обобщениях предположений о сомножителях в (3.6), при которых можно провести наше доказательство теоремы 3.2.

Мы не затрагивали обобщения на случай пространства L_p вместо L_2 . Глубокие результаты в этом направлении получены, в частности, в [27], [29], [23], [37].

По-видимому, в конкретных ситуациях можно рассчитывать на экстраполяцию результатов на p , близкие к 2 (ср. [31]).

Вопросы разрешимости упомянутых выше задач и уравнений с оператором A_1 , гладкости решений и спектральные свойства соответствующих операторов A_1 в липшицевых областях и на липшицевых поверхностях рассмотрены первым из авторов в работах [1]–[6]. Этот материал вошел в книгу [7]. В нее удалось успеть включить основные результаты настоящей статьи, они были получены совместно. Второй автор вслед за [16], [53], [19] доказал равенство (3.3) для дифференциально-разностных операторов при существенных ограничениях на геометрию области (см. [14], [15]); его доказательство в случае липшицевой границы, использующее метод, изложенный в данной работе, готовится к публикации.

Авторы искренне благодарны А. Л. Скубачевскому и Т. А. Суслиной: они прочитали рукопись и сделали очень ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. С. Агранович, *Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **40**:4 (2006), 83–103.
- [2] М. С. Агранович, *К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., **41**:4 (2007), 1–21.
- [3] М. С. Агранович, *Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в областях с липшицевой границей*, Функц. анализ и его прил., **43**:3 (2009), 3–25.
- [4] М. С. Агранович, *Сильно эллиптические системы 2-го порядка с граничными условиями на незамкнутой липшицевой поверхности*, Функц. анализ и его прил., **45**:1 (2011), 1–15.
- [5] М. С. Агранович, *Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка*, Функц. анализ и его прил., **45**:2 (2011), 1–22.
- [6] M. S. Agranovich, *Remarks on strongly elliptic second-order systems in Lipschitz domains*, Russian J. Math. Phys., **20**:4 (2012), 405–416.
- [7] М. С. Агранович, *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей*, Изд. МЦНМО, М., 2013.
- [8] М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида*, УМН, **19**:3 (1964), 53–161.
- [9] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства*, Мир, М., 1980.
- [10] М. И. Вишик, *О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений*, Матем. сб., **29(71)**:3 (1951), 615–676.
- [11] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [12] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльный, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
- [13] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.
- [14] А. М. Селицкий, *Пространство начальных данных 3-й краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения в одномерном случае*, Матем. заметки, **92**:4 (2012), 636–640.
- [15] А. М. Селицкий, *Моделирование некоторых оптических систем на основе параболического дифференциально-разностного уравнения*, Матем. моделирование, **24**:12 (2012), 38–42.

- [16] А. Л. Скубачевский, Р. В. Шамин, *Параболические дифференциально-разностные уравнения второго порядка*, Докл. РАН, **379**:5 (2001), 595–598.
- [17] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986.
- [18] Л. Хёрмандер, *Линейные дифференциальные операторы с частными производными*, Мир, М., 1965.
- [19] Р. В. Шамин, *О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве*, Матем. сб., **194**:9 (2003), 141–156.
- [20] И. Я. Шнейберг, *Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств*, Матем. исслед., **9**:2 (1974), 214–229.
- [21] Sh. Agmon, *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math., **15**:2 (1962), 119–147.
- [22] W. Arendt, *Semigroups and evolution equations: functional calculus, regularity and kernel estimates*, in: Handbook of Differential Equations, Evolutionary Differential Equations, vol. 1, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2004, 1–85.
- [23] P. Auscher, N. Badr, R. Haller-Dintelmann, J. Rehberg, *The square root problem for second order, divergence form operators with mixed boundary conditions on L^p* , <http://arxiv.org/abs/1210.0780v1>.
- [24] P. Auscher, S. Hofmann, M. Lacey, J. Lewis, A. McIntosh, P. Tchamitchian, *The solution of Kato's conjectures*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1, **332**:7 (2001), 601–606.
- [25] P. Auscher, A. McIntosh, A. Nahmod, *Holomorphic functional calculi of operators, quadratic estimates and interpolation*, Indiana Univ. Math. J., **46**:2 (1997), 375–403.
- [26] P. Auscher, S. Hofmann, A. McIntosh, P. Tchamitchian, *The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$* , J. Evol. Equ., **1**:4 (2001), 361–385.
- [27] P. Auscher, P. Tchamitchian, *Square root problem for divergence operators and related topics*, Astérisque, **249** (1998), 1–171.
- [28] P. Auscher, P. Tchamitchian, *Square roots of elliptic second order divergence operators on strongly Lipschitz domains: L^2 theory*, J. Anal. Math., **90** (2003), 1–12.
- [29] P. Auscher, P. Tchamitchian, *Square roots of elliptic second order divergence operators on strongly Lipschitz domains: L^p theory*, Math. Ann., **320**:3 (2001), 577–623.
- [30] A. Axelsson, S. Keith, A. McIntosh, *The Kato square root problem for mixed boundary value problems*, J. London Math. Soc., **74**:1 (2006), 113–130.
- [31] S. Blunck, P. Kunstmann, *Calderón–Zygmund theory for non-integral operators and the H^∞ functional calculus*, Rev. Mat. Iberoamericana, **19**:3 (2003), 919–942.
- [32] A. F. M. ter Elst, D. W. Robinson, *On Kato's square root problem*, Hokkaido Math. J., **26**:2 (1997), 365–376.
- [33] J. Griepentrog, K. Gröger, H.-Ch. Kaiser, J. Rehberg, *Interpolation for function spaces related to mixed boundary value problems*, Math. Nachr., **241** (2002), 110–120.
- [34] D. Grisvard, *Caractérisation de quelques espaces d'interpolation*, Arc. Rational Mech. Anal., **25** (1967), 40–63.
- [35] M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Birkhäuser, Basel, 2006.
- [36] S. Hoffmann, *A short course on the Kato problem*, Contemp. Math., **289** (2001), 61–67.
- [37] T. Hytönen, A. McIntosh, P. Portal, *Kato's square root problem in Banach spaces*, J. Funct. Anal., **254**:3 (2008), 675–726.
- [38] S. Janson, P. Nilsson, J. Peetre, *Notes on Wolff's note on interpolation spaces*, Proc. London Math. Soc. (3), **48**:2 (1984), 283–299.
- [39] T. Kato, *Fractional powers of dissipative operators*, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), 246–274.
- [40] T. Kato, *Fractional powers of dissipative operators, II*, J. Math. Soc. Japan, **14** (1962), 242–248.
- [41] H. Komatsu, *Fractional powers of operators*, Pacif. J. Math., **19** (1966), 285–346.

- [42] J. L. Lions, *Équations différentielles operationelles et problèmes aux limites*, Springer-Verlag, Berlin etc., 1961.
- [43] J. L. Lions, *Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs*, J. Math. Soc. Japan, **14** (1962), 233–241.
- [44] A. McIntosh, *On the compatibility of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$* , Proc. Amer. Math. Soc., **32**:2 (1972), 430–434.
- [45] A. McIntosh, *Square roots of elliptic operators*, J. Funct. Anal., **61**:3 (1985), 307–327.
- [46] A. McIntosh, *Operators which have an H^∞ functional calculus*, in: Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., vol. 14, Austral. Nat. Univ., Canberra, 1986, 210–231.
- [47] A. McIntosh, *The Square Root Problem for Elliptic Operators: a Survey*, Lecture Notes in Math., vol. 1450, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [48] W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2000.
- [49] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967; *Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2012.
- [50] L. Nirenberg, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1965), 649–675.
- [51] R. T. Seeley, *Norms and domains of the complex powers A_B^z* , Amer. J. Math., **93**:2 (1971), 299–309.
- [52] R. T. Seeley, *Interpolation in L_p with boundary conditions*, Studia Math., **44** (1972), 47–60.
- [53] A. L. Skubachevskii, R. V. Shamin, *The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation*, Funct. Differ. Eq., **8**:3–4 (2001), 407–424.
- [54] T. W. Wolff, *A note on interpolation spaces*, in: Lecture Notes in Math., vol. 918, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, 199–204.
- [55] A. Yagi, *Coincidence entre des espaces d'interpolation et des domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1, **299**:6 (1984), 173–176.

Московский институт электроники и математики
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: magran@orc.ru

Поступило в редакцию
17 января 2013 г.

Вычислительный центр РАН им. А. А. Дородницына
e-mail: selitsky@mail.ru