Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, О разделении спектров в анализе ядер Березина, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 49–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa311>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:18:46

УДК 512.81

О разделении спектров в анализе ядер Березина*

© 2000. Ю. А. НЕРЕТИН

Пусть G — классическая вещественная группа Ли, а K — ее максимальная компактная подгруппа. Существует каноническое вложение симметрического пространства G/K в некоторое некомпактное эрмитово симметрическое пространство G^*/K^* , такое, что $\dim_{\mathbb{R}} G/K = \dim_{\mathbb{C}} G^*/K^*$ (список таких вложений симметрических пространств содержится, например, в [16, добавление A]). Рассмотрим задачу об ограничении представления группы G^* со старшим весом на подгруппу G . Мы используем для подобных ограничений термин «кern-представления» (по аналогии с kern-функцией).

Первая серьезная работа о kern-представлениях была опубликована Березиным [2] в 1978 г. незадолго до гибели (доказательства были опубликованы лишь в 1994 г. в [25]). В последние несколько лет интерес к этому объекту возобновился, отчасти в связи с продолжением работы Березина, отчасти по независимым причинам [25, 20, 21, 23, 3, 17, 4, 19]. Оказалось, в частности, что спектры kern-представлений весьма замысловаты (например они строго включают все, что может встретиться в спектрах двойственных пар Хау; см. [18]). В [20] kern-представления были использованы для построения экзотических унитарных представлений групп $O(p, q)$, $U(p, q)$, $Sp(p, q)$.

Отметим, что в случае пространств скалярнозначных функций (см. §1) предел kern-представлений, когда параметр представления α стремится к $+\infty$, есть обычное представление группы G в $L^2(G/K)$, т.е. kern-представления можно рассматривать как естественную деформацию пространств $L^2(G/K)$ (в векторнозначном случае деформируется пространство сечений соответствующего векторного расслоения на G/K).

Цель настоящей статьи — разложение kern-представлений на «блоки» с более или менее однотипными спектрами (фактически мы рассматриваем лишь случай $G = O(p, q)$, группы $G = U(p, q)$, $Sp(p, q)$ разбираются аналогично с помощью интегралов (2.5), (2.6)). Идея построения таких разложений в различных задачах гармонического анализа является довольно старой (см. [8]). В [22] были введены некоммутативные пространства Харди, позволяющие отделить один из таких блоков — голоморфные дискретные серии (эта работа породила довольно обширную литературу; см. обзор [6]). В недавних работах [9, 14] было получено разделение спектров для гиперboloидов. Наш метод основан на теоремах об ограничении разрывных функций на подмногообразия (в [15, 20, 3, 17] этим способом проводилось выделение дискретной части спектра).

В §1 мы определяем kern-представления группы $O(p, q)$ (в пространствах скалярнозначных функций). В §2 вычисляются некоторые интегралы по ортогональной группе, которые кажутся любопытными и сами по себе. В §3

*Исследования поддержаны грантом РФФИ 98-01-00303 и Российской программой поддержки ведущих научных школ (грант 96-01-96249).

мы доказываем существование операторов ограничения. В §4 мы устанавливаем аналогичные утверждения для общих kern-представлений (в пространствах векторнозначных функций).

Я благодарю Г. И. Ольшевского, В. Ф. Молчанова и Б. Орстеда за обсуждение этого предмета.

§1. Kern-представления

1.0. Положительно определенные ядра. Напомним, что положительно определенным ядром на множестве $\mathcal{X}$ называется функция $K(x, y)$ на $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, такая, что для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$ матрица

$$\begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & \dots & K(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, x_1) & \dots & K(x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

неотрицательно определена. Положительно определенное ядро определяет однозначно (с точностью до естественной эквивалентности) гильбертово пространство H и систему векторов θ_x (переполненный базис), нумеруемую точками $x \in \mathcal{X}$, такие, что

- 1) $\langle \theta_x, \theta_y \rangle_H = K(x, y)$ для всех $y, x \in \mathcal{X}$;
- 2) линейная оболочка векторов θ_x плотна в H .

Далее каждому вектору $v \in H$ ставится в соответствие функция $f_v(x)$ на $\mathcal{X}$ по правилу

$$f_v(x) = \langle v, \theta_x \rangle_H.$$

Пространство всех таких функций мы обозначим через H° .

1.1. Матричные шары. Пусть $p \leq q$. Через $B_{p,q}$ мы обозначим пространство вещественных матриц размера $p \times q$ с нормой < 1 (под нормой матрицы подразумевается норма оператора в евклидовом пространстве), а через $\bar{B}_{p,q}$ — замыкание множества $B_{p,q}$ в $\mathbb{R}^{pq}$, т. е. множество матриц с нормой ≤ 1 .

Обозначим через $O(p, q)$ группу вещественных матриц $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ размера $(p+q) \times (p+q)$, сохраняющих симметрическую билинейную форму с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Группа $O(p, q)$ действует на матричном шаре $B_{p,q}$ (а также на $\bar{B}_{p,q}$) дробно-линейными преобразованиями вида

$$z \mapsto z^{[g]} := (a + zc)^{-1}(b + zd).$$

Легко проверяется, что это действие транзитивно на $B_{p,q}$, а стабилизатор точки $z = 0$ состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где $a \in O(p)$, $d \in O(q)$. Поэтому

$$B_{p,q} \simeq O(p, q) / O(p) \times O(q).$$

Через M_h мы обозначим множество матриц $z \in \bar{B}_{p,q}$, таких, что ранг матрицы $1 - zz^t$ равен h . Легко видеть, что множества M_h — это в точности орбиты группы $O(p, q)$ на границе замкнутого матричного шара $\bar{B}_{p,q}$. Пусть

$\overline{M}_h$ обозначает замыкание орбиты M_h :

$$\overline{M}_h = \bigcup_{r \leq h} M_r.$$

1.2. Пространства Березина. Пусть $\alpha = 0, 1, \dots, p-1$ или $\alpha > p-1$. Ядро Березина $K_\alpha = K_\alpha(z, u)$ — это функция на $V_{p,q} \times V_{p,q}$, заданная формулой

$$K_\alpha(z, u) = \det(1 - zu^t)^{-\alpha} = \det(1 - uz^t)^{-\alpha}.$$

Согласно известной теореме Березина [1], при указанных значениях параметра α это ядро положительно определено и поэтому определяет некоторое гильбертово пространство. Сейчас мы это пространство опишем.

Обозначим через $\mathscr{D}'(V_{p,q})$ пространство обобщенных функций с носителем, содержащимся в открытом матричном шаре $V_{p,q}$. Введем в $\mathscr{D}'(V_{p,q})$ скалярное произведение по формуле

$$\langle \phi, \psi \rangle_\alpha := \{ \phi(z) \psi(u), \det(1 - zu^t)^{-\alpha} \}.$$

Пространство Березина $H_\alpha = H_\alpha(V_{p,q})$ есть пополнение предгильбертова пространства $\mathscr{D}'(V_{p,q})$ по этому скалярному произведению (переполненный базис θ_x состоит из δ -функций).

1.3. Двойственная реализация пространств Березина и kern-представления. Обозначим через δ_a дельта-функцию, сосредоточенную в точке $a \in V_{p,q}$. Поставим в соответствие каждому элементу $v \in H_\alpha(V_{p,q})$ функцию f_v на $V_{p,q}$, заданную формулой

$$f_v(z) = \langle v, \delta_z \rangle_{H_\alpha}.$$

Таким образом мы получили некоторое пространство $H_\alpha^\circ(V_{p,q}) \simeq H_\alpha(V_{p,q})$, состоящее уже из настоящих функций на $V_{p,q}$.

Легко проверяется, что элементы пространства $H_\alpha^\circ(V_{p,q})$ являются вещественно-аналитическими функциями на $V_{p,q}$. Далее мы определим унитарное представление T_α группы $O(p, q)$ в $H_\alpha^\circ(V_{p,q})$ по формуле

$$T_\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(z) = \det(a + zc)^{-\alpha} f((a + zc)^{-1}(b + zd)). \quad (1.1)$$

Представления T_α мы будем называть kern-представлениями.

ЗАМЕЧАНИЕ. Березин [2] в случае эрмитовых симметрических пространств использовал термин «каноническое представление», заимствовав его из [26]. Этот термин может иметь разный смысл; фактически в работе Вершика, Гельфанда и Граева [26] и последующих работах тех же авторов термин «каноническое представление» используется для конструкций типа мультипликативного интеграла и для безгранично делимых представлений.

1.4. Голоморфное продолжение. Обозначим через $V_{p,q}(\mathbb{C})$ множество всех комплексных матриц размера $p \times q$ с нормой < 1 . Ядро K_α продолжается до функции $\det(1 - zu^*)^{-\alpha}$ на $V_{p,q}(\mathbb{C}) \times V_{p,q}(\mathbb{C})$, голоморфной по аргументу z и антиголоморфной по аргументу u , причем она остается положительно определенной [1]. Отсюда легко выводится, что функции $f \in H_\alpha^\circ(V_{p,q})$ продолжаются до голоморфных функций в $V_{p,q}(\mathbb{C})$.

§2. Некоторые интегралы по ортогональной группе

Цель этого параграфа — вычисление интеграла (2.3), который в дальнейшем используется в доказательстве теоремы 3.2.

Через $[A]_p$ мы будем обозначать левый верхний угол матрицы A размера $p \times p$. Мету Хаара на группе $\mathrm{SO}(n)$ мы будем обозначать через $d\sigma_n(g)$.

2.1. Отображения Υ^m . Запишем матрицу $g \in \mathrm{SO}(n)$ в виде блочной матрицы $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix}$ размера $(m + (n - m)) \times (m + (n - m))$. Рассмотрим определенное почти всюду отображение

$$\Upsilon^m: \begin{pmatrix} P & Q \\ R & T \end{pmatrix} \mapsto T - R(1 + P)^{-1}Q.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (а) Υ^m есть отображение группы $\mathrm{SO}(n)$ в $\mathrm{SO}(n - m)$;
 (б) $\Upsilon^k \circ \Upsilon^m = \Upsilon^{k+m}$;
 (с) если $S = (g - 1)/(g + 1)$, то $\{S\}_p = (\Upsilon^{n-p}(g) - 1)/(\Upsilon^{n-p}(g) + 1)$, где через $\{S\}_p$ обозначен правый нижний угол матрицы S размера $p \times p$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отображение Υ является значением характеристической функции Лифшица $\chi(z) = T + zR(1 - zP)^{-1}Q$ при $z = -1$ (см. [13]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.1. Утверждение (с) проверяется прямым вычислением с помощью следующей формулы Фробениуса [7, §II.4] для обращения блочной матрицы:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Утверждения (а), (б) следуют из (с).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $A, B \in \mathrm{SO}(n - m)$. Тогда

$$\Upsilon^m \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right] = A\Upsilon^m(g)B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Объясним теперь смысл отображения Υ . Обозначим через Mat_n пространство матриц размера $n \times n$. Обобщенно дробно-линейными отображениями $\mathrm{Mat}_n \rightarrow \mathrm{Mat}_k$ называются (определенные почти всюду) отображения вида

$$Z \mapsto K + LZ(1 - NZ)^{-1}M, \quad (2.1)$$

где N — матрица размера $n \times n$, K — матрица размера $k \times k$, L имеет размеры $k \times n$, а M — размеры $n \times k$. Обычные дробно-линейные отображения $Z \mapsto (A + ZC)^{-1}(B + ZD)$ из Mat_n в себя имеют вид (2.1), но обратное неверно. Более важное для нас обстоятельство — то, что отображения вида (2.1) могут связывать разные матричные пространства (такие отображения вполне естественны с геометрической точки зрения; см. [16, §VI.3]). Отображение $\Upsilon^m: \mathrm{SO}(n) \mapsto \mathrm{SO}(n - m)$ имеет вид (2.1), а именно $K = 0$, матрица N — блочная матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ размера $(m + (n - m)) \times (m + (n - m))$, L — блочная матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ размера $(n - m) \times (m + (n - m))$, а $M = L^t$.

Отображение Υ^m — это единственное обобщенно дробно-линейное отображение $\Xi: \mathrm{SO}(n) \rightarrow \mathrm{SO}(n-m)$, удовлетворяющее двум условиям:

- 1) Ξ перестановочно с действием группы $\mathrm{SO}(n-m) \times \mathrm{SO}(n-m)$;
- 2) пусть $h \in \mathrm{SO}(m)$; тогда $\Xi \left[\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \Xi(g)$.

Отметим, что при $m = 1$ достаточно лишь первого условия.

2.2. Другое доказательство предложения 2.1. Рассмотрим теперь пространство $V_n := \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, снабженное знаконеопределенной билинейной формой

$$L_n((x, y), (x', y')) := \sum_{k=1}^n x_k x'_k - \sum_{k=1}^n y_k y'_k.$$

Тогда графики ортогональных операторов $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ становятся максимальными L_n -изотропными подпространствами в $V_n = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$.

Далее, для любого линейного отношения $M: V_n \rightrightarrows V_{n-m}$ (т.е. подпространства $M \subset V_n \oplus V_{n-m}$; подробнее см. [16]) и любого подпространства $H \subset V_n$ стандартным образом определено подпространство $MH \subset V_{n-m}$. Оно состоит из векторов $y \in V_{n-m}$, для которых существует $x \in H$, такой, что $(x, y) \in M$.

Определим линейное отношение $\mathcal{L}_n^{n-m}: V_n \rightrightarrows V_{n-m}$, состоящее из векторов вида

$$(\{(v, h), (w, -h)\}, \{v, w\}) \in \{\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n\} \oplus \{\mathbb{R}^{n-m} \oplus \mathbb{R}^{n-m}\}.$$

Условие $(u, v), (u', v') \in \mathcal{L}_n^{n-m}$ влечет за собой равенство $L_n(u, u') = L_{n-m}(v, v')$. Поэтому отображение $H \mapsto \mathcal{L}_n^{n-m} H$ переводит изотропные подпространства в изотропные.

Легко проверить, что отображение Υ^m на этом языке в точности совпадает с отображением изотропных грассманианов, заданным формулой $H \mapsto \mathcal{L}_n^{n-m} H$. После этого предложение 2.1 становится очевидным.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обобщенно дробно-линейные отображения, переводящие группу $O(n)$ в $O(n-m)$, находятся во взаимно однозначном соответствии с максимальными изотропными подпространствами в $V_n \oplus V_{n-m}$.

2.3. Проекция меры Хаара. Обозначим через I отрезок $[-1, 1]$. Рассмотрим отображение

$$\Xi: \mathrm{SO}(n) \rightarrow \mathrm{SO}(n-1) \times I,$$

заданное формулой (см. обозначение в начале параграфа)

$$\Xi(g) = (\Upsilon^1(g), [g]_1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Образ меры Хаара $d\sigma_n$ при отображении Ξ равен

$$\mathrm{const} \cdot (1 - x^2)^{(n-3)/2} dx d\sigma_{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу $\mathrm{SO}(n-1)$ -эквивариантности отображения Υ^1 (предложение 2.2) образ меры Хаара имеет вид $\phi(x) dx d\sigma_{n-1}$. С другой стороны, проекция меры Хаара на I равна $\mathrm{const} \cdot (1 - x^2)^{(n-3)/2}$, и это дает явный вид функции $\phi(x)$.

2.4. Отображение ортогональной группы на куб. Рассмотрим отображения

$$\mathrm{SO}(n) \rightarrow \mathrm{SO}(n-1) \times [-1, 1] \rightarrow \mathrm{SO}(n-2) \times [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \dots$$

В итоге мы получим отображение $\mathrm{SO}(n)$ на множество $[-1, 1]^{n-1}$, заданное формулой

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = ([\Upsilon^{n-2}(g)]_1, \dots, [\Upsilon^1(g)]_1, [g]_1).$$

В силу предложения 2.3 образ меры Хаара при этом отображении равен

$$d\mu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \text{const} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} (1 - x_j^2)^{(j-2)/2} \prod_{j=1}^{n-1} dx_j.$$

Поэтому для любой функции f от $n-1$ переменных $x_1, \dots, x_{n-1} \in [-1, 1]$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathrm{SO}(n)} f([\Upsilon^{n-2}(g)]_1, \dots, [\Upsilon^1(g)]_1, [g]_1) d\sigma_n(g) \\ = \int_{[-1, 1]^{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) d\mu(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.5. Мультипликативность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $g \in \mathrm{SO}(n)$. Пусть $m < p \leq n$. Тогда

$$\det(1 + [g]_p) = \det(1 + [g]_m) \det(1 + [\Upsilon^m(g)]_{p-m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем g в виде блочной матрицы размера $(m + (p - m) + (n - p)) \times (m + (p - m) + (n - p))$:

$$g = \begin{pmatrix} P & Q_1 & Q_2 \\ R_1 & T_{11} & T_{12} \\ R_2 & T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда по обычной формуле для определителя блочной матрицы

$$\det \left[1 + \begin{pmatrix} P & Q_1 \\ R_1 & T_{11} \end{pmatrix} \right] = \det(1 + P) \det(1 + T_{11} - R_1(1 + P)^{-1}Q_1).$$

С другой стороны,

$$\Upsilon^m(g) = \begin{pmatrix} T_{11} - R_1(1 + P)^{-1}Q_1 & T_{12} - R_1(1 + P)^{-1}Q_2 \\ T_{21} - R_2(1 + P)^{-1}Q_1 & T_{22} - R_2(1 + P)^{-1}Q_2 \end{pmatrix},$$

и теперь утверждение становится очевидным.

2.6. Некоторые интегралы.

ТЕОРЕМА 2.5. Нормируем меру Хаара на $\mathrm{SO}(n)$ так, что мера всей группы равна 1. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$, $\lambda_n = 0$, причем $\operatorname{Re} \lambda_k > -(n - k)/2$ для всех $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда

$$\int_{\mathrm{SO}(n)} \prod_{k=1}^{n-1} \det(1 + [g]_k)^{\lambda_k - \lambda_{k+1}} d\sigma_n(g) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\Gamma(n - k) \Gamma(\lambda_k + (n - k)/2)}{\Gamma((n - k)/2) \Gamma(\lambda_k + n - k)}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу (2.2) и предложение 2.4. Тогда наш интеграл распадется в произведение интегралов вида

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-k-2)/2} (1+x)^{\lambda_k} dx &= 2^{\lambda_k+n-3} B\left(\lambda_k + \frac{n-k}{2}, \frac{n-k}{2}\right) \\ &= 2^{\lambda_k+n-k-3} \frac{\Gamma(\lambda_k + (n-k)/2) \Gamma((n-k)/2)}{\Gamma(\lambda_k + n-k)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.7. Некоторые интегралы по унитарной и симплектической группам. Следующие интегралы вычисляются тем же способом, только очевидный интеграл (2.4) заменяется на более замысловатые интегралы по кругу (шару) $|z| \leq 1$ в $\mathbb{C}$ или в $\mathbb{H}$:

$$\begin{aligned} \int_{U(n)} \prod_{k=1}^n \det(1 + [g]_k)^{\lambda_k - \lambda_{k+1}} \overline{\det(1 + [g]_k)^{\mu_k - \mu_{k+1}}} d\sigma_n(g) \\ = \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(n-k+1) \Gamma(n-k+1 + \lambda_k + \mu_k)}{\Gamma(n-k+1 + \lambda_k) \Gamma(n-k+1 + \mu_k)}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{Sp(n)} \prod_{k=1}^n |\det(1 + [g]_k)|^{\lambda_k - \lambda_{k+1}} d\sigma_n(g) \\ = \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(2(n-k+1)) \Gamma(2(n-k+1) + \lambda_k + 1)}{\Gamma(2(n-k+1) + \lambda_k/2) \Gamma(2(n-k+1) + \lambda_k/2 + 1)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

(компактную симплектическую группу $Sp(n)$ мы реализуем как группу унитарных операторов в n -мерном кватернионном пространстве $\mathbb{H}^n$; любой кватернионный оператор A может рассматриваться как оператор $A_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^{4n} \rightarrow \mathbb{R}^{4n}$; под определителем кватернионного оператора A мы подразумеваем $\sqrt[4]{\det A_{\mathbb{R}}}$).

2.8. Другие способы вычисления интегралов (2.3), (2.5), (2.6). После преобразования Кэли $g = (1-T)/(1+T)$ подынтегральные выражения в (2.3) и (2.6) приводятся к виду $\prod \det(1 + [T]_k)^{\nu_k}$, а подынтегральное выражение в (2.5) приводится к виду $\prod \det(1 + [T]_k)^{\nu_k} \det(1 - [T]_k)^{\tau_k}$. Во всех трех случаях может быть применен метод разделения переменных, описанный в [19]. В случае унитарной группы возможны также два других пути: вычисление по методу Гиндикина, т. е. переход к интегрированию по треугольной подгруппе (см. образцы подобных вычислений в [5, Ch. 7]), и применение преобразования Лапласа (интеграл в этом случае имеет вид L^2 -скалярного произведения); образец такого вычисления см. в [5, p. 142].

При $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ интеграл (2.2) превращается в один из интегралов Хуа Ло Кена [11, гл. 2].

§3. Операторы ограничения на границу

В этом параграфе мы полагаем $p < q$.

3.1. Операторы ограничения на M_r . Обозначим через $\mathcal{H}_{\alpha}^{\circ}$ подпространство в $H_{\alpha}^{\circ}(B_{p,q})$, состоящее из функций, продолжимых по аналитичности в некоторую окрестность замкнутого матричного шара $\bar{B}_{p,q}$.

ЛЕММА 3.1. *Подпространство $\mathcal{H}_\alpha^\circ$ плотно в H_α° .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве H_α° существует ортогональный базис, состоящий из однородных многочленов (см. [20, § 1]). Оператор $A_\varepsilon f(z) = f((1-\varepsilon)z)$ в этом базисе диагонален и имеет собственные числа $(1-\varepsilon)^k$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ оператор A_ε является непрерывным оператором $H_\alpha^\circ \rightarrow H_\alpha^\circ$. Очевидно, что образ оператора A_ε плотен в H_α° и содержится в $\mathcal{H}_\alpha^\circ$. $\square$

Через $L_{\text{loc}}^1(M_r)$ мы обозначим пространство локально интегрируемых функций на (вообще говоря некомпактном) многообразии M_r (см. разд. 1.1). Отметим, что группа $O(p, q)$ действует в $L_{\text{loc}}^1(M_r)$ по той же формуле (1.1), что и в $H_\alpha^\circ(B_{p,q})$ (нужно лишь считать, что в (1.1) матрица z лежит в M_r).

Через J_r мы обозначим оператор ограничения функции $f \in \mathcal{H}_\alpha^\circ$ на многообразии M_r .

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $\alpha < (q - p + 2r)/2$. Тогда оператор J_r продолжается до непрерывного оператора $H_\alpha^\circ \rightarrow L_{\text{loc}}^1(M_r)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. За исключением случая $\alpha = 0$, когда пространство H_α° состоит лишь из констант, функции $f \in H_\alpha^\circ$, вообще говоря, разрывны в точках границы матричного шара. Иными словами, если a — точка границы, то линейный функционал $f \mapsto f(a)$ на H_α° не определен. Поэтому существование оператора ограничения на подмногообразии не является само собой разумеющимся фактом.

Очевидно, что оператор $J_r: H_\alpha^\circ \rightarrow L_{\text{loc}}^1(M_r)$ является $O(p, q)$ -сплетающим. Следовательно, его ядро $\ker J_r$ является подпредставлением. Поэтому подпредставлением является и ортогональное дополнение $(\ker J_r)^\perp$ к $\ker J_r$. Оператор J_r осуществляет биекцию между $(\ker J_r)^\perp$ и образом $\text{im } J_r$ оператора J_r . Значит, мы получили в H_α° некоторое подпредставление, которое естественным образом реализуется в пространстве функций на M_r .

3.2. Доказательство теоремы 3.2. В [20] было доказано одно общее утверждение о граничных значениях голоморфных функций (теоремы 2.1, 2.2), которое в нашем случае означает следующее.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть M — некоторое компактное подмножество в границе матричного шара $B_{p,q}$. Пусть μ — некоторая мера с носителем в M . Допустим, что*

(i) *для почти всех $(z, u) \in M \times M$ в смысле меры $\mu \times \mu$ существует предел при ε , стремящемся к нулю справа,*

$$L(z, u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \det(1 - (1 - \varepsilon)zu^t)^{-\alpha};$$

(ii) *этот предел является мажорируемым, т. е. существует функция h , интегрируемая по мере $\mu \times \mu$, такая, что*

$$\det(1 - (1 - \varepsilon)zu^t)^{-\alpha} \leq h(z, u).$$

Тогда оператор ограничения функции $f \in H_\alpha^\circ$ на множество M является непрерывным оператором из H_α° в $L^1(M)$.

Мы хотим применить эту теорему к орбите M_r . Существование предела в нашем случае очевидно, и фактически в проверке нуждается лишь сходимость интеграла от $L(z, u) = \det(1 - zu^*)^{-\alpha}$. Однако на M_r нет разумной канонической меры. Поэтому надежды явно вычислить интеграл нет. Основной шаг

приводимого ниже доказательства — лемма 3.5, сводящая оценку сходимости интеграла по $O(p, q)$ -орбите M_r к сходимости вычисленного выше интеграла (2.3) по группе $SO(q + r)$.

Чтобы формально применить теорему, мы возьмем в качестве M произвольное компактное подмножество в многообразии M_r , являющееся замыканием своей внутренности. В качестве μ возьмем (для определенности) поверхностную меру Лебега на M . Нам достаточно проверить, что интеграл

$$\int_M \int_M \det(1 - zu^t)^{-\alpha} d\mu(z) d\mu(u) \quad (3.1)$$

сходится. Отсюда будет следовать условие (i), а условие (ii) тогда будет вытекать из очевидного неравенства [20, 3.8]

$$\det(1 - c^2 zu^t)^{-\alpha} \leq 2^{p\alpha} \det(1 - zu^t)^{-\alpha}.$$

Достаточно проверить, что интеграл

$$\int_M \det(1 - zu^t)^{-\alpha} d\mu(z) \quad (3.2)$$

сходится при фиксированном u и оценивается сверху константой, не зависящей от u . Как будет показано в дальнейшем, достаточно проверить сходимость интеграла при каком-нибудь одном u . Мы начнем с такой проверки и для этого выберем наиболее удобный для наших целей элемент u .

Пусть $u = u^{(0)}$ задается блочной $((p - r) + r) \times ((p - r) + (q - p + r))$ -матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда интеграл (3.2) переписывается в виде

$$\int_M \det[1 + z]_{p-r}^{-\alpha} d\mu(z). \quad (3.3)$$

ЛЕММА 3.4. *Интеграл (3.3) сходится.*

ЛЕММА 3.5. *Запишем матрицу $g \in SO(q + r)$ в виде блочной матрицы $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ размера $(p + (q + r - p)) \times (q + r)$. Тогда $g_{11} \in \bar{M}_r$. Обратно любая матрица $z \in \bar{M}_r$ встраивается в качестве левого верхнего блока в некоторую матрицу $g \in SO(q + r)$.*

Доказательство леммы 3.5 очевидно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.4. Отображение $\tau: g \mapsto g_{11}$, согласно лемме 3.5, переводит $SO(q + r)$ в $\bar{M}_r$. Очевидно, что образ меры Хаара на $SO(q + r)$ при отображении τ является мерой, эквивалентной поверхностной мере Лебега на M_r . Поэтому нам достаточно проверить сходимость интеграла

$$\int_{SO(q+r)} \det[1 + g]_{p-r}^{-\alpha} d\sigma_{q+r}(g).$$

Но этот интеграл нами уже был вычислен (нужно подставить $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p-r-1} = -\alpha$, $\lambda_{p-r} = \dots = 0$ в формулу (2.3)). $\square$

ЛЕММА 3.6. *Ядро $\det(1 - zu^t)^{-\alpha}$ удовлетворяет тождеству*

$$\det(1 - z^{[g]}(u^{[g]})^t)^{-\alpha} = \det(1 - zu^t)^{-\alpha} \det(a + zc)^\alpha \det(a + zu)^\alpha. \quad (3.4)$$

Доказательство очевидно.

Рассмотрим какое-нибудь компактное подмножество $L \subset O(p, q)$, такое, что для любого $v \in M$ существует $g_v \in L$, такой, что $v^{[g_v]} = u^{(0)}$. Через K мы обозначим множество всех точек в M_r вида $u^{[g]}$, где $u \in M$, а $g \in L$. Очевидно, что K компактно.

Замена переменной $w = z^{[g]}$ в интеграле (3.2) в силу формулы (3.4) приводит его к виду

$$\int_{M^{[g_u]}} \det(1 - u^{(0)} w^t)^{-\alpha} H(w, u) d\mu(w), \quad (3.5)$$

где через $M^{[g_u]}$ обозначен образ множества M при отображении g_u , а $H(w, u)$ — некоторая функция (произведение якобиана на дополнительный множитель, возникающий из (3.4)). Легко видеть, что функция $H(w, u)$ ограничена некоторой постоянной C . Поэтому интеграл (3.5) оценивается сверху величиной

$$C \int_K \det(1 - u^{[0]} w^t)^{-\alpha} d\mu(w),$$

а эта величина не зависит от u и в силу леммы 3.4 конечна. Теорема доказана.

3.3. Ограничение частных производных на границу. Мы можем ограничивать на многообразия M_r не только функции $f \in H_\alpha^\circ$, но и их частные производные. Существование оператора ограничения для частной производной $\partial/\partial z_{ij}$ зависит от сходимости интеграла

$$\int_M \int_M \left| \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \frac{\partial}{\partial u_{ij}} \det(1 - zu^t)^{-\alpha} \right| dz du,$$

где $M \subset M_r$ — произвольное компактное подмножество. Подынтегральное выражение имеет вид $|P(z, u)| \det(1 - zu^t)^{-\alpha-2}$, где $P(z, u)$ — многочлен. Поэтому все наши рассуждения применимы и в этом случае. Мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $\alpha + 2k < (q - p + 2r)/2$. Пусть ∂^ν — какая-нибудь частная производная порядка k . Тогда оператор ограничения функции $\partial^\nu f(z)$ на M_r является непрерывным оператором из H_α° в $L_{\text{loc}}^1(M_r)$.

Сейчас мы слегка формализуем получающуюся картину¹.

Обозначим через $\mathcal{N}(M_r)$ конормальное расслоение к M_r в $\mathbb{R}^{pq}$. Через $S^k \mathcal{N}(M_r)$ мы обозначим k -ю симметрическую степень конормального расслоения, а через $\mathcal{F}_r^k$ — множество всех $f \in \mathcal{H}_\alpha^\circ$, у которых ограничение всех частных производных порядка $\leq k+1$ на M_r равно 0. Тогда элементы факторпространства $\mathcal{F}_r^{k-1}/\mathcal{F}_r^k$ отождествляются с сечениями расслоения $S^k \mathcal{N}(M_r)$.

Теорема 3.7 тогда влечет за собой следующее высказывание: Пусть $\alpha + 2k < (q - p + 2r)/2$. Тогда корректно определен непрерывный «оператор ограничения частных производных k -го порядка» из H_α° в пространство локально интегрируемых сечений расслоения $S^k \mathcal{N}(M_r)$.

3.4. Некоторые комментарии. Итак, нами построен сплетающий оператор $J_{r,k}$ из H_α° в пространство сечений расслоения $S^k \mathcal{N}(M_r)$. Образ $\text{im } J_{r,k}$

¹Комбинаторная версия этой конструкции восходит к [12].

оператора $J_{r,k}$ является факторпространством гильбертова пространства и поэтому сам является гильбертовым пространством (отметим, что гильбертова топология в $\text{im } J_{r,k}$ сильнее, чем топология, индуцированная с пространства L^1_{loc}). Представление группы $O(p, q)$ в $\text{im } J_{r,k}$ мы обозначим через

$$\Xi_{r,k}^\alpha = \Xi_{r,k}^\alpha(p, q). \quad (3.6)$$

Факторпространство произвольного гильбертова пространства H по замкнутому подпространству L канонически отождествляется с ортогональным дополнением $L^\perp$ к L . Поэтому представление $\Xi_{r,k}^\alpha$ может рассматриваться как подпредставление в kern-представлении T_α .

Итак, мы выделили в пространстве $H^\alpha_\alpha(B_{p,q})$ некоторый естественный набор подпространств (3.6), и эти подпространства мы будем называть *блоками*.

Если α достаточно велико, а именно $\alpha > (p+q)/2 - 1$, то ни один оператор ограничения на M_r не определен, т. е. в этом случае блоки $\Xi_{r,k}^\alpha(p, q)$ отсутствуют. Известно, что при указанных ограничениях ($\alpha > (p+q)/2 - 1$) представление группы $O(p, q)$ в $H^\alpha_\alpha(B_{p,q})$ эквивалентно ее представлению в L^2 на симметрическом пространстве $B_{p,q}$ (это утверждение доказано в [21]; ранее такого рода утверждения для kern-представлений разных групп в разной степени общности доказывались в [2, 24, 10]).

При $\alpha < (p+q)/2 - 1$ дополнительно к подпредставлению (блоку), эквивалентному $L^2(B_{p,q})$, появляется блок $\Xi_{p-1,0}^\alpha$, соответствующий максимальной орбите M_{p-1} и $k = 0$.

При $\alpha < (p+q)/2 - 2$ появляется блок $\Xi_{p-2,0}^\alpha$.

При $\alpha < (p+q)/2 - 3$ появляются два блока: $\Xi_{p-1,1}^\alpha$ и $\Xi_{p-3,0}^\alpha$, и т. д.

В точке $\alpha = p - 1$ (это конец непрерывной серии; см. разд. 1.2) исчезает «самый большой» из блоков, а именно блок, эквивалентный $L^2(B_{p,q})$. В этот же момент исчезают блоки $\Xi_{p-1,k}^\alpha$ при $k > 0$. Блок $\Xi_{p-1,0}^\alpha$ при $\alpha = p - 1$ еще остается.

При дальнейшем уменьшении α (проходящем уже дискретно; см. разд. 1.2) продолжают появляться новые блоки, но при этом происходит постепенное исчезновение старых. Наконец при $\alpha = 0$ остается лишь блок $\Xi_{0,0}^0$, который в данном случае сводится к одномерному представлению.

Теперь мы вкратце обсудим спектр представлений $\Xi_{r,k}^\alpha$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Любое подпредставление в kern-представлении T_α содержит ненулевой $O(p) \times O(q)$ -инвариантный вектор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f(z) = 1$ является $O(p, q)$ -циклическим вектором в H^α_α (так как ее орбита в точности состоит из всех векторов переполненного базиса). Поэтому проекция функции $f(z) = 1$ на любое инвариантное подпространство является циклическим вектором, а следовательно, отлична от нуля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. (а) *Представление группы $O(p, q)$ в $\Xi_{0,0}^\alpha$ неприводимо.*

(б) *Представление группы $O(p, q)$ в $\Xi_{0,k}^\alpha$ есть конечная сумма неприводимых представлений.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Действительно на M_0 есть ровно одна $O(p) \times O(q)$ -инвариантная функция, а именно константа.

(b) Достаточно убедиться в том, что пространство $O(p) \times O(q)$ -инвариантных сечений расслоения $S^k \mathcal{N}(M_0)$ конечномерно. Но размерность этого пространства заведомо не превосходит размерности слоя.

ЗАМЕЧАНИЕ. Блок $\Xi_{0,0}^\alpha$, соответствующий оператору ограничения на компактную орбиту M_0 , был обнаружен в работе Г. И. Олшанского и автора [20, §3] при более жестких ограничениях на параметры представления ($\alpha < (q - 2p + 1)/2$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что спектр, соответствующий блокам $\Xi_{r,k}^\alpha$ при $0 < r < p$, является чисто непрерывным. Можно также показать, что он состоит из представлений, которые получаются унитарным индуцированием с представлений группы $O(p - r, q - r)$, лежащих в спектре представления $\Xi_{0,k}^{\alpha+2k}(p - r, q - r)$. Эти утверждения доказываются с помощью формулы Планшереля, полученной в [19]. Работа [27] содержит полное описание спектра обобщаемого представления.

ЗАМЕЧАНИЕ. «Добавочный» кусок непрерывного спектра в kern-представлениях ранее был обнаружен лишь в случае группы $U(2, 2)$ в работе [23]. В [18] была высказана гипотеза о том, что спектр kern-представления при малых значениях параметра α распадается на большое число разнотипных кусков (собственно, эта гипотеза и доказывается в настоящей статье).

§4. Общие kern-представления

4.1. Определение. Через ρ_Λ мы обозначим конечномерное голоморфное представление группы $GL(n, \mathbb{C})$, определяемое сигнатурой $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, а через V_Λ — его пространство представления. Напомним, что в V_Λ есть каноническое $U(n)$ -инвариантное скалярное произведение.

Рассмотрим представления $\rho_{\Lambda'}, \rho_{\Lambda''}$ групп $GL(p, \mathbb{C}), GL(q, \mathbb{C})$, определяемые сигнатурами $\Lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_p)$, $\Lambda'' = (\lambda''_1, \dots, \lambda''_q)$ соответственно. Введем обозначение $\tilde{\Lambda} = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_p; \lambda''_1, \dots, \lambda''_q)$, а также $V_{\tilde{\Lambda}} = V_{\Lambda'} \otimes V_{\Lambda''}$.

Далее, рассмотрим функцию

$$K_{\tilde{\Lambda}}(z, u) = \rho_{\Lambda'}(1 - zu^t) \otimes \rho_{\Lambda''}(1 - uz^t), \quad z, u \in B_{p,q},$$

принимавшую значения в пространстве $\text{End}(V_{\tilde{\Lambda}})$ операторов в $V_{\tilde{\Lambda}}$.

Допустим, что $K_{\tilde{\Lambda}}(z, u)$ является матричнозначным положительно определенным ядром. Напомним, что это означает положительную определенность ядра

$$L((z, \xi); (u, \eta)) = \langle K_{\tilde{\Lambda}}(z, u)\xi, \eta \rangle_{V_{\tilde{\Lambda}}}, \quad x, y \in B_{p,q}, \quad \xi, \eta \in V_{\tilde{\Lambda}},$$

на пространстве $\mathcal{X} = B_{p,q} \times V_{\tilde{\Lambda}}$ (условие положительной определенности ядра $K_{\tilde{\Lambda}}(z, u)$ см., например, в [20]).

Ядро $L((z, \xi); (u, \eta))$ определяет некоторое гильбертово пространство, состоящее из функций на $\mathcal{X} = B_{p,q} \times V_{\tilde{\Lambda}}$. Но эти функции линейны по переменной $\xi \in V_{\tilde{\Lambda}}$; поэтому их можно рассматривать как $V_{\tilde{\Lambda}}$ -значные функции на $B_{p,q}$.

В итоге мы получаем некоторое пространство $H_{\tilde{\Lambda}}^\circ$, состоящее из $V_{\tilde{\Lambda}}$ -значных функций на $B_{p,q}$. Группа $O(p, q)$ действует в $H_{\tilde{\Lambda}}^\circ$ унитарными операторами по формуле

$$T_{\tilde{\Lambda}}(g)f(z) = [\rho_{\Lambda'}(a + zc) \otimes \rho_{\Lambda''}(-d + cz^{[g]})]f(z^{[g]}).$$

4.2. Операторы ограничения на границу.

ТЕОРЕМА 4.1. (а) Пусть $\lambda_1'' - \lambda_p' < (q - p + 2r)/2$. Тогда в H_Λ° корректно определен оператор ограничения функции на M_r .

(б) Пусть $2k + \lambda_1' - \lambda_p' < (q - p + 2r)/2$. Тогда в H_Λ° корректно определен оператор ограничения k -х частных производных функции на M_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 3.2, но нужно дополнительно использовать несложные соображения из [20, 4.5].

4.3. Комментарии. Так же, как и в предыдущем параграфе, мы получаем разбиение kern-представления на блоки $\Xi_{r,k}^\Lambda$, где r — номер орбиты, а k — порядок производной.

Существование оператора ограничения на M_0 было обнаружено в [20, §4] (при более жестких ограничениях на сигнатуру Λ). Это, в частности, дает простой способ строить некоторые «экзотические» унитарные представления групп $O(p, q)$ (см. [20, §§4–5]). Отметим также, что эти представления выдерживают предельный переход при $q \rightarrow \infty$ [20, §6].

Представления группы $O(p, q)$ в $\Xi_{0,0}^\Lambda$ являются приводимыми, их разложение обсуждается в [20, §5]. По-прежнему представление группы $O(p, q)$ во всех пространствах $\Xi_{0,k}^\Lambda$ имеет чисто дискретный спектр. Однако спектр представления группы $O(p, q)$ в блоках $\Xi_{r,k}^\Lambda$ при $r > 0$ сам по себе устроен весьма замысловато и распадается на разнотипные куски. У меня нет правдоподобных предположений о его структуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ф. А. Квантование в комплексных симметрических областях. Изв. АН СССР, сер. матем., **39**, № 2, 1362–1402 (1975).
2. Березин Ф. А. О связи между ко- и контравариантными символами операторов в классических комплексных областях. ДАН СССР, **241**, № 1, 15–17 (1978).
3. van Dijk H., Hille S. C. Canonical representations related to hyperbolic spaces. J. Funct. Anal., **147**, 109–139 (1997).
4. van Dijk G., Molchanov V. F. The Berezin form for rank 1 para-hermitian symmetric spaces. J. Math. Pure Appl., **77**, 747–799 (1998).
5. Faraut J., Koranyi A. Analysis in symmetric cones. Oxford Univ. Press, 1994.
6. Faraut J., Olafsson G. Causal semisimple symmetric spaces, the geometry and harmonic analysis. In: Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis (Hofmann K. H., Lawson J. D., Vinberg E. B., eds.). Walter de Gruyter, Berlin, 1995, pp. 3–32.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 4-е изд., Наука, М., 1988.
8. Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г. Комплексные многообразия, чьи остовы являются полупростыми вещественными группами Ли, и голоморфные дискретные серии представлений. Функци. анализ и его прил., **11**, вып. 4, 19–27 (1977).
9. Gindikin S. Conformal analysis on hyperboloids. J. Geom. Phys., **10**, 175–184 (1993).
10. Gutkin E. Coefficients of Clebsch–Gordan for holomorphic discrete series. Lett. Math. Phys., **3**, 185–192 (1979).
11. Хуа Ло Кен. Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. ИЛ, М., 1959.
12. Jacobsen H., Vergne M. Restrictions and expansions of holomorphic representations. J. Funct. Anal., **34**, 29–53 (1979).
13. Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. Матем. сб., **34**, 145–199 (1954).

14. Молчанов В. Ф. Разделение серий для гиперboloидов. Функц. анализ и его прил., **31**, вып. 3, 35–43 (1997).
15. Неретин Ю. А. О дискретных вхождениях представлений дополнительной серии в тензорные произведения унитарных представлений. Функц. анализ и его прил., **20**, вып. 4, 79–80 (1986).
16. Неретин Ю. А. Категории симметрий и конечномерные группы. УРСС, М., 1998.
17. Неретин Ю. А. Ограничение функции, голоморфной в области, на кривую, лежащую в границе, и дискретные $SL_2(\mathbb{R})$ -спектры. Изв. РАН, сер. матем., **62**, № 3, 67–86 (1998).
18. Neretin Yu. A. Boundary values of holomorphic functions and some spectral problems for unitary representations. In: Positivity in Lie Groups: Open Problems (Hilgert J., Lawson J. D., Need K.-H., Vinberg E. B., eds.), Walter de Gruyter, Berlin, 1998.
19. Neretin Yu. A. Matrix analogues of B -function and Plancherel formula for Berezin kernel-representations. Preprint, <http://xxx.itep.ru/abs/math/9905045>.
20. Неретин Ю. А., Ольшанский Г. И. Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп $O(p, q)$ и их пределы при $q \rightarrow \infty$. Зап. научн. семин. ПОМИ РАН, **223**, 9–91 (1995); English transl.: J. Math. Sci., **87**, No. 6, 3983–4035 (1997).
21. Ólafsson G., Ørsted B. Bargmann transform for symmetric spaces. In: Lie Theory and Its Applications in Physics (Doebner H., Dobrev V. K., Hilgert J., eds.), World Scientific, 1996, pp. 3–15.
22. Ольшанский Г. И. Комплексные полугруппы Ли, пространства Харди и программа Гельфанда–Гиндикина. В сб.: Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Изд-во Ярославского гос. университета, 1982, с. 85–98; English transl.: Differential Geometry and Its Applications, **1**, No. 1, 297–308 (1991).
23. Ørsted B., Zhang G. Tensor products of analytic continuations of discrete series. Can. J. Math., **49**, No. 6, 1224–1241 (1997).
24. Repka J. On tensor products of holomorphic discrete series. Can. J. Math., **31**, 638–844 (1979).
25. Unterberger A., Upmeyer H. The Berezin transform and invariant differential operators. Comm. Math. Phys., **164**, 563–597 (1994).
26. Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. Представления $SL_2(R)$, где R — кольцо функций. УМН, **28**, вып. 3, 3–41 (1973).
27. Neretin Yu. A. Plancherel formula for Berezin deformations of L^2 on Riemannian symmetric space. Preprint, <http://xxx.itep.ru/math/9911020>.