Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лобода, Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 2, 38–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3111>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:23:50

УДК 517.765+514.765+512.816

Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^2$

© 2013. А. В. ЛОБОДА*

В статье приводится полная аффинная классификация ростков аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$. Двумя основными моментами при построении классификации являются использование локальных канонических уравнений изучаемых многообразий и применение методов теории алгебр Ли. Показано отличие полученной классификации от известного результата Э. Картана 1932 г., содержащего описание голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей двумерных комплексных пространств.

Введение

В задаче описания голоморфно-однородных вещественных подмногообразий многомерных комплексных пространств важное место занимают аффинно-однородные гиперповерхности (см. [1]–[3]). При этом полный список голоморфно-однородных гиперповерхностей, например, в случае двумерных комплексных пространств оказывается весьма кратким. Но уже в трехмерном случае количество голоморфно-различных вещественных однородных гиперповерхностей существенно возрастает (см. [3]–[5]).

В работах [2], [6], [7] была получена серия результатов, имеющих целью полное описание аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$. При этом выяснилось, что даже в двумерном случае такая классификация отсутствует, несмотря на почти 80-летний срок, прошедший после опубликования работы Картана [1] о голоморфной однородности в двумерных комплексных пространствах.

Во многом аналогичная ситуация сложилась и в вещественной геометрии, где лишь в 90-е годы прошлого века было получено окончательное полное описание аффинно-однородных гиперповерхностей пространства $\mathbb{R}^3$ (см. [8]). Видимо, главная причина такого положения состоит в том, что однородных гиперповерхностей оказывается достаточно много и описание их всех с какой-либо одной точки зрения, в рамках единой технической идеи, представляется затруднительным (см. для сравнения [9]).

Цель настоящей работы — заполнить образовавшийся пробел в кажущейся достаточно простой задаче комплексной геометрии. Ниже приводится полное (подобно авторам работы [10], автор настоящей статьи надеется на это) описание аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$.

Описание получено в рамках коэффициентного подхода к задаче об однородности, опирающегося, в первую очередь, на (локальные) канонические уравнения изучаемых многообразий. Используется также техника матричных алгебр

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00743-а) и Билефельдского университета (ФРГ, грант SFB-701).

Ли. Такой подход является достаточно эффективным (см. [2], [4]–[7], [11]) в изучаемых задачах об однородности. В то же время автор не исключает возможности получения основных классификационных результатов статьи чисто геометрическими методами. Видимо, более геометричными могут быть и формулировки многих промежуточных утверждений.

Коэффициентный подход учитывает разделение всех изучаемых многообразий на два геометрически естественных класса: вырожденных и невырожденных в смысле Леви поверхностей. Основной результат статьи составляет следующее утверждение.

Теорема 1. *Аффинно-однородными вырожденными по Леви гиперповерхностями пространства $\mathbb{C}_{(z,w)}^2$ являются с точностью до (локальной) аффинной эквивалентности лишь поверхности из следующего списка:*

$$\text{трехпараметрическое семейство } |z|^{A_1}|w|^{A_2} = e^{\arg(z^{B_1}w^{B_2})}, \quad (A_1, A_2, B_1, B_2) \in \mathbb{RP}^3; \quad (0.1)$$

$$\text{цилиндр над гиперboloидом } \operatorname{Im}(w - z^2) = 0; \quad (0.2)$$

$$\text{«воронежские вееры» } |w - z^2| = e^{B \arg(w - z^2)}, \quad B \in \mathbb{R}; \quad (0.3)$$

$$\operatorname{Im} w = e^{-2i\theta} \ln(1 + z) + e^{2i\theta} \ln(1 + \bar{z}), \quad \theta \in (-\pi/4, \pi/4]; \quad (0.4)$$

$$\operatorname{Re}(\bar{w}e^{i\theta}(z - e^{i\theta}w \ln w)) = 0, \quad \theta \in (-\pi/4, \pi/4]. \quad (0.5)$$

Приведем здесь также описание однородных Леви-невырожденных поверхностей.

Теорема 2 [12]. *Всякая невырожденная по Леви аффинно-однородная вещественная гиперповерхность пространства $\mathbb{C}_{(z,w)}^2$ аффинно эквивалентна (вблизи любой своей точки) одной из однородных поверхностей следующего списка:*

$$(1) \quad |z|^2 \pm |w|^2 = 1, \quad (2) \quad \operatorname{Im} w = |z|^2 + \varepsilon(z^2 + \bar{z}^2), \quad 0 < \varepsilon \neq 1/2,$$

$$(3) \quad \operatorname{Im} w = |z|^A e^{B \arg z}, \quad (4) \quad \operatorname{Im}(z\bar{w}) = |z|^A e^{B \arg z}, \quad A, B \in \mathbb{R}, \quad z \neq 0,$$

$$(5) \quad \operatorname{Re} w = (\operatorname{Re} z)^s, \quad -1 \leq s < 1, \quad s \neq 0$$

$$(6) \quad \operatorname{Re} w = \ln(\operatorname{Re} z), \quad (7) \quad \operatorname{Re} w = (\operatorname{Re} z) \ln(\operatorname{Re} z),$$

$$(8) \quad \ln((\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Re} w)^2) = B \cdot \arctg\left(\frac{\operatorname{Re} w}{\operatorname{Re} z}\right), \quad B \geq 0.$$

Объем данной статьи не дает возможностей для развернутых обсуждений деталей классификации, связанных, в частности, с коэффициентной структурой семейства аффинно-однородных поверхностей в пространствах степенных рядов. Такие детали можно найти в [13], [14], а здесь мы остановимся лишь на некоторых свойствах построенных поверхностей.

Отметим, например, что в картановскую классификацию голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей двумерных комплексных пространств входят, помимо вещественной гиперплоскости

$$\operatorname{Im} w = 0, \quad (0.6)$$

все трубчатые поверхности над аффинно-однородными плоскими кривыми (пп. (5)–(8) из теоремы 2) и проективно-однородные многообразия

$$1 + |z|^2 + |w|^2 = a|1 + z^2 + w^2|, \quad 1 + |z|^2 - |w|^2 = a|1 + z^2 - w^2| \quad (a > 1),$$

$$|z|^2 + |w|^2 - 1 = a|z^2 + w^2 - 1| \quad (0 < |a| < 1).$$

Гиперплоскость (0.6) является при этом единственной (с точностью до локальной голоморфной эквивалентности) вырожденной по Леви однородной вещественной гиперповерхностью.

Это означает, что все (!) поверхности из теоремы 1 сводятся (локальными) голоморфными преобразованиями к вещественной гиперплоскости (0.6). Рассмотрим, например, поверхность (0.1), у которой пары (A_1, A_2) и (B_1, B_2) не являются вещественно пропорциональными. Замена (при $zw \neq 0$) $z^{A_1} w^{A_2} \rightarrow w$, $z^{B_1} w^{B_2} \rightarrow z$ превращает уравнение (0.1) в $|w| = e^{\arg z}$ или в $\operatorname{Re}(\ln w + i \ln z) = 0$; последнее сводится к (0.6).

Особый интерес в голоморфной геометрии представляют так называемые сферические поверхности, сводимые локальными голоморфными преобразованиями к сфере. Известно, что сферическими трубками являются лишь поверхности из п. (6) и при $s = 1/2$ из п. (5) теоремы 2. К сферическим относятся также все (не являющиеся трубчатыми) поверхности пп. (1)–(4) из этой теоремы. В аффинной классификации эти (голоморфно эквивалентные друг другу) поверхности различны.

Из Леви-невырожденных аффинно-однородных поверхностей «самой симметричной» в аффинной геометрии является «сфера Мозера» $\operatorname{Im} w = |z|^2$ (п. (3) при $A = 2$, $B = 0$). На этой поверхности транзитивно действует пятимерная группа аффинных преобразований. Аналогичные группы для поверхностей из пп. (1) и (2) являются четырехмерными. Для остальных поверхностей из теоремы 2 размерность такой группы равна 3.

В вырожденном случае (теорема 1 настоящей статьи) также имеется аффинно-однородная поверхность, а именно конус, с богатой, пятимерной, группой аффинных преобразований. Транзитивные группы аффинных преобразований всех остальных поверхностей, как это следует из приводимых ниже обсуждений, имеют меньшие размерности.

Приведенные результаты показывают существенное отличие изученной Картаном голоморфной однородности в двумерных комплексных пространствах от аффинной однородности и подтверждают необходимость отдельного описания последней. Естественные обобщения этих результатов должны помочь решению задач классификации однородных подмногообразий в комплексных пространствах более высоких размерностей.

§1. Метод канонических уравнений в задаче об однородности

Все обсуждения статьи носят локальный характер. Аффинная однородность произвольной изучаемой вещественной гиперповерхности M пространства $\mathbb{C}^2$ (вблизи некоторой точки) понимается как существование в группе $\operatorname{Aff}(2, \mathbb{C})$ аффинных преобразований пространства $\mathbb{C}^2$ подгруппы Ли, действующей транзитивно на поверхности M вблизи этой точки.

В одной из эквивалентных формулировок (обсуждения по этому поводу см. в [15]) это означает, что на пространстве $\mathbb{C}^2$ имеется алгебра Ли линейных

(аффинных) векторных полей вида

$$Z = (A_1 z + A_2 w + p) \frac{\partial}{\partial z} + (B_1 z + B_2 w + q) \frac{\partial}{\partial w}, \quad (1.1)$$

касательных к поверхности M . Значения полей (в заданной точке) заполняют всю касательную плоскость к M . Такую алгебру будем обозначать через $g(M)$.

В формуле (1.1) z, w — комплексные координаты пространства $\mathbb{C}^2$; ниже мы будем также использовать их вещественные и мнимые части

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad u = \operatorname{Re} w, \quad v = \operatorname{Im} w.$$

Все изучаемые поверхности предполагаются в статье аналитическими, т.е. заданными посредством уравнений

$$\Phi(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = 0 \quad (1.2)$$

с вещественнозначными аналитическими функциями Φ . Фиксированная (неособая) точка поверхности M совпадает с началом координат пространства $\mathbb{C}^2$.

Уравнение (1.2) в этом случае можно локально разрешить относительно одной из вещественных координат пространства $\mathbb{C}^2$ и переписать в виде

$$v = F(z, \bar{z}, u) = \sum_{k,l,m} f_{klm} z^k \bar{z}^l u^m \quad (1.3)$$

с некоторой аналитической функцией F .

Мы будем использовать весовые разложения аналитических функций помимо стандартных степенных разложений. При этом веса переменных $z, \bar{z}$ считаем равными единице, а переменной u припишем вес 2.

Удаляя за счет аффинного преобразования линейные слагаемые из (1.3), мы можем записать это уравнение в весовой форме как

$$v = \sum_{k \geq 2} F_k(z, \bar{z}, u). \quad (1.4)$$

В разложении произвольного многочлена $F_k = F_k(z, \bar{z}, u)$ веса k из уравнения (1.4) мы будем выделять слагаемые, не содержащие переменной u . Их совокупность мы обозначим через $F_k^{(0)}$, а остальные слагаемые, входящие в F_k , сгруппируем в дополнительную сумму $\hat{F}_k(z, \bar{z}, u)$, так что

$$F_k = F_k^{(0)}(z, \bar{z}) + \hat{F}_k(z, \bar{z}, u).$$

Отметим, что каждый из одночленов, составляющих $\hat{F}_k$, содержит в виде множителя переменную u в некоторой ненулевой степени.

Факт касания полем (1.1) поверхности M записывается в виде *основного тождества*

$$\operatorname{Re}\{Z(\Phi)\}_{|M} \equiv 0, \quad (1.5)$$

где Φ — определяющая функция поверхности. Если $\Phi = -v + F(z, \bar{z}, u)$, то (1.5) превращается в

$$\operatorname{Re} \left\{ (A_1 z + A_2(u + iF) + p) \frac{\partial F}{\partial z} + (B_1 z + B_2(u + iF) + q) \frac{1}{2} \left(i + \frac{\partial F}{\partial u} \right) \right\} \equiv 0. \quad (1.6)$$

В компонентах младших весов в (1.6) имеем, например, следующие уравнения:

$$\text{вес } 0 : \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2} q \right\} = 0, \quad (1.7)$$

$$\text{вес } 1 : \quad \operatorname{Re} \left\{ p \frac{\partial F_2}{\partial z} + \frac{1}{2} q \frac{\partial F_3}{\partial u} + \frac{i}{2} B_1 z \right\} = 0. \quad (1.8)$$

В них (и в других аналогичных уравнениях) связаны коэффициенты векторных полей (1.1) и слагаемые уравнения (1.4) изучаемой поверхности. Рассмотрение этих уравнений позволяет получать интересные нас выводы об однородности.

Например, из тождества веса 0 (уравнение (1.7)) следует вещественность параметра q при любых допущениях относительно коэффициентов уравнения (1.4). Это означает, что в случае однородной поверхности M параметр p может принимать любые комплексные, а параметр q — любые вещественные значения.

Иллюстрацией возможностей коэффициентного подхода, опирающегося на использование векторных полей, является следующее утверждение.

Предложение 1. *Если в уравнении (1.4) аффинно-однородной поверхности M наборы $(F_2^{(0)}, \hat{F}_3)$ и $(F_3^{(0)}, \hat{F}_4)$ нулевые, то M — плоскость с уравнением $v = 0$.*

Для доказательства учтем, что подстановка заданных условий в (1.6) дает равенство нулю параметра B_1 для произвольного векторного поля на M . Компонента веса 2 основного тождества превращается в равенство $\operatorname{Re}(iB_2 u) = 0$, означающее обращение в нуль мнимой части $\operatorname{Im} B_2$ параметра B_2 такого поля.

Компонента веса 3 в этой ситуации содержит всего два слагаемых и имеет вид тождества

$$\operatorname{Re} \left\{ p \frac{\partial F_{k+1}^{(0)}}{\partial z} + \frac{1}{2} q \frac{\partial \hat{F}_{k+2}}{\partial u} \right\} \equiv 0 \quad (1.9)$$

при $k = 3$ и свободных параметрах p, q .

Остается заметить, что из тождества (1.9), выполняющегося при произвольных $p \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{R}$, следует, что $F_{k+1}^{(0)} = 0$, $\hat{F}_{k+2} = 0$. Индуктивное применение этого замечания приводит к утверждению о тождественно нулевых весовых компонентах F_k ($k \geq 3$) уравнения обсуждаемой однородной поверхности. Тем самым предложение 1 доказано.

Замечание. Из совокупности частных случаев, рассматриваемых в статье, можно получить (см. также [5]) универсальную оценку порядка струи, определяющей произвольную аффинно-однородную гиперповерхность в $\mathbb{C}^2$. Однако роль такой оценки становится второстепенной при построении явного полного описания изучаемых многообразий, а потому эта задача и связанные с ней вопросы не обсуждаются в статье.

С точки зрения комплексной геометрии основными в разложении (1.3) естественно считать вещественный коэффициент f_{110} и форму Леви $f_{110}|z|^2$ обсуждаемой поверхности. При условии $f_{110} = 0$ поверхность называется *Леви-вырожденной* или *вырожденной по Леви* (а также *Леви-плоской*) в начале координат, в противном случае — *Леви-невырожденной* или *невырожденной по Леви*.

Учитывая возможность несложных упрощений уравнений типа (1.3) за счет растяжений координат, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 2. *Имеется 5 типов аффинно-различных уравнений вида (1.3) для семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$:*

$$v = |z|^2 + (f_{200}z^2 + f_{020}\bar{z}^2) + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \bar{z}, u), \quad (1.10)$$

$$v = (z^2 + \bar{z}^2) + \sum_{k \geq 3} F_k(z, \bar{z}, u), \quad (1.11)$$

$$v = (z + \bar{z})u + F_3(z, \bar{z}) + \sum_{k \geq 4} F_k(z, \bar{z}, u), \quad (1.12)$$

$$v = u^2 + \sum_{k \geq 5} F_k(z, \bar{z}, u), \quad (1.13)$$

$$v = 0. \quad (1.14)$$

Первый тип соответствует невырожденным поверхностям, однородность которых описывается теоремой 2. Пятый, тривиальный, тип можно назвать типом *бесконечного веса*. Уравнения (1.11)–(1.13) будем называть *каноническими уравнениями* Леви-плоских аффинно-однородных поверхностей соответственно весов 2, 3 и 4. Заметим, впрочем, что за счет аффинных преобразований возможны дополнительные упрощения некоторых коэффициентов этих уравнений.

Интегрирование матричных алгебр. При получении списка всех аффинно-однородных поверхностей мы сначала строим соответствующие этим поверхностям алгебры Ли линейных (аффинных) векторных полей. Каждая однородная поверхность является интегральным многообразием своей алгебры Ли, или, что то же самое, орбитой соответствующей группы Ли.

При этом от обсуждаемых алгебр удобно перейти к их представлениям в $gl(3, \mathbb{C})$, сопоставляя каждому аффинному векторному полю Z вида (1.1) матрицу

$$Z = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & p \\ B_1 & B_2 & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

(с тем же обозначением). Коммутатор полей Z_1, Z_2 переходит в таком представлении в коммутатор (скобку) матриц $[Z_1, Z_2] = Z_1 \cdot Z_2 - Z_2 \cdot Z_1$.

Перейти от алгебры Ли к однородной поверхности (проинтегрировать соответствующую алгебру) можно разными способами, например, за счет непосредственного решения системы уравнений в частных производных или рассмотрения экспонент от базисных матриц алгебры. Оба названных способа являются достаточно трудоемкими, а количество алгебр, которые приходится интегрировать, весьма велико. Поэтому ниже мы, как правило, ограничиваемся лишь краткими комментариями о результатах подобного интегрирования.

Здесь же мы обсудим один прием, позволяющий в некоторых случаях облегчить процедуру интегрирования.

Предложение 3. *Пусть $g \subset h$ — две алгебры Ли линейных векторных полей на пространстве $\mathbb{C}^2$, такие, что*

(а) *вблизи фиксированной точки ξ этого пространства меньшая из алгебр, т.е. g , является регулярным распределением ранга 3;*

(б) *большая алгебра, т.е. h , имеет в качестве интегрального многообразия некоторую вещественно-аналитическую гиперповерхность M , проходящую через точку ξ ;*

(в) *точка ξ является регулярной (неособой) точкой поверхности M .*

Тогда эта же поверхность M является интегральной и для меньшей алгебры g .

Геометрический смысл этого утверждения достаточно прозрачен. Интегральное многообразие алгебры g , проходящее через точку ξ (существующее по известной теореме Фробениуса [16, с. 92]), является в силу аналитичности линейных полей трехмерной вещественно-аналитической гиперповерхностью. Такое многообразие единственно, что следует как из самой теоремы Фробениуса, так и из аналитичности определяющей многообразие системы уравнений. Имеющаяся интегральная поверхность M для большей алгебры h касается всех полей из меньшей алгебры. В силу отмеченной единственности M является интегральным многообразием для g .

Замечание. Построение интегрального многообразия часто оказывается более легкой задачей для большей алгебры, содержащей исходную.

§ 2. Трехпараметрическое семейство однородных поверхностей

Свяжем с ненулевым набором вещественных чисел

$$(A_1, A_2; B_1, B_2) \quad (2.1)$$

вещественную гиперповерхность M , задавая ее вблизи (неособой) точки $Q(1, 1)$ уравнением

$$|z|^{A_1}|w|^{A_2} - e^{\arg(z^{B_1}w^{B_2})} = 0. \quad (2.2)$$

Замечание. Эта поверхность не изменяется при умножении каждого из чисел четверки $(A_1, A_2; B_1, B_2)$ на ненулевую вещественную константу. Замена переменных $z \leftrightarrow w$ позволяет не различать поверхности (2.2), отвечающие наборам с одновременно переставленными элементами в парах (A_1, A_2) и (B_1, B_2) .

Предложение 4. *Для любого ненулевого набора (2.1) поверхность (2.2) однородна (вблизи точки $Q(1, 1)$) относительно линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^2$.*

Для доказательства заметим, что на поверхности (2.2) с набором $(A, 1; B_1, B_2)$ транзитивно действует трехмерная (локальная) группа «комплексных растяжений»

$$z^* = te^{i\varphi_1}z, \quad w^* = t^{-A}e^{B_1\varphi_1+B_2\varphi_2+i\varphi_2}w, \quad (2.3)$$

где t, φ_1, φ_2 — вещественные параметры (t изменяется вблизи единицы, а φ_1, φ_2 — вблизи нуля). Для набора $(0, 0; B, 1)$ группа (2.3) заменяется на

$$z^* = t_1e^{i\varphi}z, \quad w^* = t_2e^{-iB\varphi}w, \quad (2.4)$$

где $t_1, t_2 \in U(1)$, $\varphi \in U(0)$ — вещественные параметры.

Точку $Q(1, 1)$ можно заменить в этом предложении произвольной точкой $Q_0(z_0, w_0)$ с координатами $z_0 \neq 0, w_0 \neq 0$, удовлетворяющими уравнению (2.2) для фиксированного набора $(A_1, A_2; B_1, B_2)$.

Ясно, что из линейной однородности поверхностей (2.2) следует и их аффинная однородность относительно более широкой аффинной группы $\text{Aff}(2, \mathbb{C})$. При этом матричные алгебры Ли, отвечающие группам (2.3) и (2.4), имеют базисы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 + i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

и

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -iB & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

соответственно.

Замечание 1. В трехпараметрическом семействе (2.2) имеется много интересных частных случаев. Это, например:

(а) вещественная гиперплоскость $v = 0$, представленная уравнением $\arg w = 0$;

(б) степенные поверхности Рейнхарта ($B_1 = B_2 = 0$, $A_2 \neq 0$)

$$|w| = |z|^\alpha, \quad \alpha = -A_1/A_2 \in \mathbb{R};$$

(с) декартовы произведения логарифмических спиралей ($A_1 = B_1 = 0$, $A_2 \neq 0$)

$$|w| = e^{B \arg w}, \quad B = B_2/A_2 \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

лежащих в плоскости $\mathbb{C}_w$, на плоскость $\mathbb{C}_z$;

(д) «билефельдские вееры» ($A_2 = -A_1 \neq 0$, $B_2 = -B_1$)

$$|w/z| = e^{B \arg(w/z)}, \quad B = B_2/A_2 \in \mathbb{R}; \quad (2.8)$$

(е) частным случаем семейства (2.8) является (при $B_1 = B_2 = 0$) конус

$$|z|^2 - |w|^2 = 0 \quad (\text{или } |w/z| = 1). \quad (2.9)$$

Замечание 2. Семейство (0.1), играющее важную роль в последующих рассмотрениях, содержит однородные поверхности всех весов, введенных в предыдущем параграфе. В самом деле, поверхность бесконечного веса $v = 0$ является элементом этого семейства. Его элементами являются также поверхности (2.7), имеющие вес 4. Вес 3 имеют, например, билефельдские вееры (2.8) и, в частности, конус $|z|^2 - |w|^2 = 0$. Поверхности $|w| = e^{B \arg z}$ из этого семейства имеют вес 2.

§3. Однородные поверхности веса 2

Основным результатом данного параграфа является следующее утверждение.

Теорема 3. *Аффинно-однородными вырожденными по Леви гиперповерхностями веса 2 в пространстве $\mathbb{C}^2$ являются все поверхности из семейств (0.2)–(0.5), а также (некоторые) поверхности из трехпараметрического семейства (0.1).*

Для доказательства теоремы рассмотрим уравнение (1.11) Леви-плоской поверхности M , имеющей вес 2. За счет аффинного преобразования $z \rightarrow z - \frac{1}{2}f_{101}w$

можно получить дополнительные ограничения $f_{101} = f_{011} = 0$ на коэффициенты этого уравнения. Кроме того, согласованным растяжением координат $z \rightarrow tz$, $w \rightarrow t^2 w$ ($t > 0$) любой ненулевой коэффициент суммы

$$F_3^{(0)}(z, \bar{z}) + \sum_{k \geq 4} F_k(z, \bar{z}, u)$$

можно перевести на единичную окружность S^1 .

Далее рассмотрим основное тождество (1.5) для произвольного линейного векторного поля Z на однородной поверхности M вида

$$v = (z^2 + \bar{z}^2) + F_3^{(0)}(z, \bar{z}) + \sum_{k \geq 4} F_k(z, \bar{z}, u). \quad (3.1)$$

Из компонент (1.7) и (1.8) этого тождества, выписанных в §1, легко получить следующие ограничения на параметры поля Z :

$$q \in \mathbb{R}, \quad B_1 = 4ip. \quad (3.2)$$

Предложение 5. *Из компонент весов 2 и 3 основного тождества для аффинно-однородной поверхности M вида (3.1) вытекают следующие ограничения на коэффициенты самого уравнения (3.1) и на параметры любого касательного к M поля:*

$$f_{210} = 0, \quad f_{111} = 0; \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} B_2 &= 2f_{002}q, \quad A_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} B_2 - \left(\frac{3}{2}f_{300}p + \frac{1}{2}f_{201}q\right), \\ A_2 &= -(f_{201} + 2if_{002})p - f_{102}q. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Следствие. *В рассматриваемом случае для размерности алгебры $g(M)$ выполняется оценка*

$$\dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 4. \quad (3.5)$$

В самом деле, с учетом (3.2) и (3.4) все параметры матрицы (1.9), представляющей поле Z , выражаются в этом случае через ее последний столбец (параметры p, q) и, возможно, через еще один вещественный параметр $\operatorname{Re} B_2$.

В силу (3.5) для описания всех однородных Леви-вырожденных поверхностей веса 2 остается разобрать два случая возможных размерностей алгебры $g(M)$: 3 и 4.

Случай четырехмерной алгебры $g(M)$ для поверхностей веса 2. В случае свободного параметра $\operatorname{Re} B_2$ можно считать, что базис изучаемой алгебры $g(M)$ имеет вид

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} M_1 & N_1 & 1 \\ 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} M_2 & N_2 & i \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_3 &= \begin{pmatrix} M_3 & N_3 & 0 \\ 0 & 2i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

с некоторыми коэффициентами $M_1, M_2, N_1, N_2, M_3, N_3, \lambda = f_{002}$.

Рассмотрение шести попарных матричных скобок $[E_k, E_l]$ при $1 \leq k < l \leq 4$ и учет требования их принадлежности (вещественной) линейной оболочке $\langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle$ приводит к следующему утверждению.

Предложение 6. *Существует единственная алгебра с базисом вида (3.6), а именно, алгебра, для которой*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Проходящее через начало координат пространства $\mathbb{C}^2$ интегральное многообразие, соответствующее алгебре с базисом (3.7), является квадрикой

$$v = z^2 + \bar{z}^2. \quad (3.8)$$

В качестве комментария к доказательству предложения 6 заметим, что наличие поля E_3 в обсуждаемой алгебре означает жесткость соответствующей интегральной поверхности. Она имеет (в рассматриваемых координатах) уравнение вида $v = F(z, \bar{z})$, не зависящее от переменной $u = \operatorname{Re} w$.

С учетом этого два первых вещественных поля алгебры, отличающиеся друг от друга множителем i , позволяют получить одно комплексное уравнение $\partial F / \partial z = 2z$ на определяющую функцию $F(z, \bar{z})$ искомой поверхности. Так мы приходим к уравнению поверхности (3.8). Касание этой поверхности четвертым полем $E_4 = \partial / \partial z + 2 \partial / \partial w$, очевидно, имеет место, так как этому полю соответствует однопараметрическая группа согласованных растяжений $z \rightarrow tz$, $w \rightarrow t^2 w$, $t > 0$, пространства $\mathbb{C}^2$, сохраняющая уравнение (3.8).

Замечание. В теореме 1 эта поверхность представлена в форме (0.2).

Поверхности веса 2 с трехмерными алгебрами. Отметим, что трехмерных алгебр, отвечающих этому же случаю, имеется достаточно много. При подготовке статьи необходимые многочисленные выкладки проведены с помощью пакета символьных вычислений MAPLE.

Считая, что в обсуждаемом случае параметр $\operatorname{Re} B_2$ тоже выражается через основную тройку $(p, \bar{p}, q)$, а не является свободным, положим

$$\operatorname{Re} B_2 = (m + in)p + (m - in)\bar{p} + \alpha_3 q, \quad (3.9)$$

где m, n, α_3 — некоторые вещественные числа. Как и ранее, предлагается рассмотреть скобки «базисных» матриц вида

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}f_{300} + m & -(f_{201} + 2if_{002}) & 1 \\ 4i & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}if_{300} - n & -i(f_{201} + 2if_{002}) & i \\ -4 & -2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-f_{201} + \alpha_3) & -f_{102} & 0 \\ 0 & \alpha_3 + 2i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

и проверить замкнутость линейной оболочки $\langle E_1, E_2, E_3 \rangle$ относительно скобки.

Предложение 7. Матрицы (3.10) образуют базис трехмерной алгебры Ли лишь в следующих случаях:

(1) при $m = 0$, $n = 0$, $f_{300} \neq 0$ существует семейство (коммукативных) матричных алгебр требуемого вида, зависящее от трех вещественных параметров $\arg(f_{300})$, r , λ ; базисы этих алгебр имеют вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}f_{300} & -(r - 2i\lambda) & 1 \\ 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}if_{300} & -i(r - 2i\lambda) & i \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} -(r - 2i\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -(r - 2i\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(2) если $m = 0$, $n = 0$, $f_{300} = 0$, $r = \operatorname{Re} f_{201} = \pm 1$, то базис (3.10) любой из обсуждаемых алгебр имеет вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -r + 2i\lambda & 1 \\ 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & i - r + 2i\lambda & i \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} -r + 2i\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -r + 2i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(3) при $m = 0$, $n = 0$, $f_{300} = 0$, $r = \operatorname{Re} f_{201} = 0$ имеется еще два типа алгебр. Базис алгебр первого типа имеет вид $(\alpha_3, \lambda \in \mathbb{R})$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} (\alpha_3 + 2i\lambda)/2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 + 2i\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

а второго совпадает с (3.12), где

$$r = \operatorname{Re} f_{201} = 0; \quad (3.14)$$

(4) при $f_{300} = 0$, $m^2 + n^2 \neq 0$ базис (3.10) обязан иметь вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 4i & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -n & 0 & i \\ -4 & -2n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Интегрирование трехмерных алгебр. Теперь необходимо найти интегральные поверхности полученных алгебр, проходящие через начало координат пространства $\mathbb{C}^2$. При этом, разумеется, интерес представляют лишь новые поверхности, не упоминавшиеся выше.

Например, семейство (3.15) не дает новых однородных поверхностей: каждая из алгебр с базисом из этого семейства является подалгеброй четырехмерной алгебры с базисом (3.7), и потому всем им соответствует известная уже квадрика (3.8), т. е. $v = z^2 + \bar{z}^2$.

Аналогично, при нулевом значении параметра λ алгебры с базисом из двупараметрического семейства (3.13) являются подалгебрами четырехмерной алгебры с базисом (3.7) и потому также не представляют интереса. Остальная часть этого семейства алгебр описывается следующим предложением.

Предложение 8. *При условии $\lambda \neq 0$ интегральными многообразиями алгебр с базисом (3.13) являются воронезжские вееры из семейства (0.3).*

Обсудим теперь трехпараметрическое семейство алгебр с базисом (3.11). Здесь наиболее важным моментом является наличие у матрицы E_1 из этого базиса кратных собственных значений. В упрощенных обозначениях

$$E_1 = \begin{pmatrix} A & B & 1 \\ 4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} iA & iB & i \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Для обсуждаемого базиса это возможно в двух случаях:

(1) при $B = 0$ или (2) при условиях $A^2 + 16iB = 0$, $B \neq 0$.

Предложение 9. *Случаи кратных корней у матрицы E_1 из базиса (3.11) соответствуют поверхностям семейств (0.4) ($B = 0$) и (0.5) ($A^2 + 16iB = 0$, $B \neq 0$).*

В случае простого спектра у матрицы E_1 из базиса (3.16) любая алгебра с таким базисом оказывается диагонализируемой. Следствием этого является такое утверждение:

Предложение 10. *В случае простого спектра у матрицы E_1 любая алгебра с базисом (3.11) подобна одной из алгебр с базисом (2.5) или (2.6), отвечающих поверхностям трехпараметрического семейства.*

Завершая этот параграф, нам остается заметить, что три семейства алгебр с базисом (3.12), отвечающие случаям $r = -1, 0, 1$, имеют базисы вида (3.16). При этом условие $r = \pm 1$ означает, что матрица E_1 имеет простой спектр. Тогда в силу предложения 10 любая алгебра с базисом из семейств (3.12) подобна алгебре с базисом вида (2.5) или (2.6).

Матрица E_1 из семейства (3.13) также имеет простой спектр при $\lambda \neq 0$. Следовательно, в этих случаях мы также имеем алгебры, подобные алгебрам с базисом (2.5) или (2.6).

Наконец, при $r = 0$, $\lambda = 0$ формулы (3.12) задают тот же базис, что и формулы (3.13) при дополнительном условии $\alpha_3 = 0$. В этом случае алгебра с базисом (3.13) является подалгеброй алгебры с базисом (3.7), а потому ей соответствует аффинно-однородная квадрика (0.2).

Теорема 3 доказана.

§ 4. Однородные поверхности веса 3

Теорема 4. *Любая аффинно-однородная вырожденная по Леви гиперповерхность пространства $\mathbb{C}^2$, имеющая вес 3, аффинно-эквивалентна вблизи любой своей неособой точки одной из поверхностей трехпараметрического семейства (0.1).*

Для доказательства этого утверждения, как и в предыдущих случаях, предлагается рассмотреть младшие (до веса 4) компоненты основного тождества.

Так получаются следующие формулы для поверхностей веса 3:

$$B_1 = 2iq, \quad A_1 = 2ip - 2(f_{102} + if_{002})q, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{Im} B_2 = p + \bar{p} + 2f_{002}q, \quad \operatorname{Re} A_2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} B_2 f_{002} = -\operatorname{Re}(f_{102}p + \frac{3}{2}f_{003}q). \quad (4.2)$$

В силу этих формул свободными параметрами в алгебре $g(M)$ на однородной поверхности M могут быть помимо сдвиговых компонент (p, q) лишь коэффициенты $\operatorname{Im} A_2$ и $\operatorname{Re} B_2$ матрицы (1.15). Следовательно, в этом случае для однородных поверхностей имеется оценка

$$3 \leq \dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 5.$$

Предложение 11. *С точностью до аффинных преобразований существует единственная Леви-плоская гиперповерхность веса 3, имеющая пятимерную алгебру $g(M)$ в любой своей неособой точке. Эта поверхность — конус*

$$|z|^2 - |w|^2 = 0,$$

а базис соответствующей алгебры можно задать следующими матрицами вида (1.15):

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 2i & 0 & 1 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & I \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Схема доказательства этого предложения аналогична предыдущим рассуждениям. Условие замкнутости линейной оболочки матриц $E_1, \dots, E_5$ относительно скобки позволяет практически однозначно определить элементы всех пяти матриц (4.3).

Система уравнений в частных производных, отвечающих полям (4.3), имеет вид

$$\begin{aligned} (1 - 2y) \frac{\partial F}{\partial x} + 2x \frac{\partial F}{\partial y} - 2F \frac{\partial F}{\partial u} - 2u &= 0, \quad -2x \frac{\partial F}{\partial x} + (1 - 2y) \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \\ (1 - 2y) \frac{\partial F}{\partial u} - 2x &= 0, \quad -F \frac{\partial F}{\partial x} + u \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad -F + u \frac{\partial F}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Последовательное решение ее отдельных уравнений приводит к уравнению поверхности

$$v = \frac{2xu}{1 - 2y},$$

аффинно эквивалентной конусу (2.9). Предложение 11 доказано.

Рассмотрим теперь возможные меньшие размерности для алгебр в этом случае. Произвольную матрицу из обсуждаемой алгебры (любой размерности) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 2ip - 2(f_{102} + If_{012})q & -\frac{1}{2}(f_{002} \operatorname{Re} B_2 + (f_{102}p + f_{012}\bar{p}) + 3f_{003}q) + i \operatorname{Im} A_2 & p \\ 2iq & \operatorname{Re} B_2 + i(p + \bar{p} + 2f_{002}q) & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Однородные поверхности веса 3 с четырехмерными алгебрами $g(M)$. В случае четырехмерной алгебры три первых ее базисных матрицы можно связать со стандартной тройкой наборов (p, q) , т.е. $(1, 0)$, $(i, 0)$, $(0, 1)$. А последний столбец четвертой матрицы можно считать нулевым. Учитывая возможность вещественного масштабирования, базисную матрицу E_4 этой алгебры можно привести к одному из двух видов в зависимости от значений пары $(\text{Im } A_2, \text{Re } B_2)$:

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\mu + iN & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mu, N \in \mathbb{R}) \quad \text{или} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая по 6 скобок базисных матриц в каждом из этих двух случаев, после достаточно трудоемких выкладок получаем следующее утверждение.

Предложение 12. *Всякая четырехмерная алгебра Ли $g = \langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle$, состоящая из матриц вида (4.5), имеет (с точностью до матричного подобия) базис одного из двух видов:*

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

или

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2i + b & 0 & 0 \\ 0 & 2i + b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Завершает описание однородных поверхностей требуемого типа с четырехмерными алгебрами $g(M)$ следующий достаточно простой факт.

Предложение 13. *Однородной поверхностью, отвечающей любой из четырехмерных алгебр с базисами (4.6), (4.7), является (с точностью до аффинной эквивалентности) конус*

$$\text{Re}(z\bar{w}) = 0.$$

Однородные поверхности веса 3 с трехмерными алгебрами $g(M)$. Предположим теперь, что тройка матриц вида (4.5) со стандартными сдвигowymi векторами $(1, 0)$, $(i, 0)$ и $(0, 1)$ порождает трехмерную алгебру Ли. При этом параметры $\text{Re } B_2$, $\text{Im } A_2$ таких полей принимают в базисных матрицах E_1 , E_2 , E_3 обсуждаемой алгебры некоторые числовые значения.

Предложение 14. *Если тройка матриц E_1 , E_2 , E_3 вида (4.5) является базисом трехмерной матричной алгебры Ли g , то с точностью до матричного*

подобия алгебра g совпадает с одной из алгебр $\langle E_1, E_2, E_3 \rangle$ следующего списка:

$$\begin{aligned}
 g_\theta^{(1)}: \quad E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, \pi); \\
 g^{(2)}: \quad E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\
 g_\alpha^{(3)}: \quad E_1 &= \begin{pmatrix} I - \alpha & 0 & 0 \\ 0 & I + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \\
 g_s^{(4)}: \quad E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}; \\
 g_{(s,\alpha)}^{(5)}: \quad E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} i + \alpha & 0 & 0 \\ 0 & i + \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s, \alpha \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Предложение 15. Все трехмерные интегральные многообразия для алгебр из предложения 14 являются поверхностями из трехпараметрического семейства (0.1).

Для доказательства заметим, во-первых, что алгебры $g_\theta^{(1)}$ соответствуют при $\theta \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ билефельдским веерам

$$|w/z| = \exp(B \arg(w/z)) \quad (B = \operatorname{ctg} \theta).$$

При $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ получаем в качестве интегральных поверхностей конусы вида $|w/z| = 1$ или $\operatorname{Im}(z\bar{w}) = 0$ соответственно. Каждая из остальных алгебр из предложения 14 подобна одной из трехмерных подалгебр алгебры конуса (4.3). Следовательно, их интегральные поверхности являются конусами.

Доказательство теоремы 4 завершено.

5. Однородные поверхности веса 4

Теперь нам остается рассмотреть последний случай, в рамках которого обсуждаемая аффинно-однородная поверхность M веса 4 задается уравнением (1.13). Из младших компонент основного тождества в этом случае вытекают следующие факты.

Предложение 16. Если вещественная гиперповерхность (1.13) аффинно-однородна, то ее уравнение имеет еще более специальный вид

$$v = u^2 + f_{003}u^3 + \sum_{k \geq 7} F_k(z, \bar{z}, u), \quad (5.1)$$

а параметры любого линейного векторного поля Z , касательного к поверхности M , удовлетворяют ограничениям

$$B_1 = 0, \quad \operatorname{Im} B_2 = 2q, \quad \operatorname{Re} B_2 = -3f_{003}q. \quad (5.2)$$

Следствие. Для алгебры $g(M)$, соответствующей аффинно-однородной вырожденной гиперповерхности веса 4, справедлива следующая оценка размерности: $\dim_{\mathbb{R}} g(M) \leq 7$.

В самом деле, в дополнение к основной тройке (p, q) свободными в алгебре $g(M)$ в силу предложения 16 могут быть лишь два комплексных параметра A_1 и A_2 .

Теорема 5. Любая аффинно-однородная вырожденная гиперповерхность M веса 4 в пространстве $\mathbb{C}_{(z,w)}^2$ аффинно-эквивалентна декартову произведению логарифмической спирали, лежащей в плоскости $\mathbb{C}_w$, на плоскость $\mathbb{C}_z$. Размерность группы аффинных преобразований, транзитивно действующей на любой такой поверхности, равна 7.

Для доказательства заметим, прежде всего, что все слагаемые канонического уравнения (5.1) однородной поверхности веса 4 свободны от переменных $z, \bar{z}$ и однозначно определяются вещественным коэффициентом $\mu = f_{003}$. Это легко устанавливается из индуктивного рассмотрения компонент веса k основного тождества.

Следовательно, существует не более чем однопараметрическое семейство аффинно-однородных поверхностей обсуждаемого вида. Все такие поверхности имеют семимерные группы аффинных преобразований, свободно действующие в направлении переменной z . Это означает, что все они являются произведением некоторых кривых в плоскости $\mathbb{C}_w$ на плоскость $\mathbb{C}_z$.

В силу аффинной однородности любой такой поверхности «опорная» кривая для нее является аффинно-однородной кривой относительно комплексных аффинных преобразований плоскости одной комплексной переменной w .

Теперь для завершения доказательства достаточно учесть существование логарифмических спиралей

$$\rho = e^{B\varphi}, \quad B \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

являющихся аффинно-однородными (как в вещественном, так и в комплексном смысле) кривыми в плоскости $\mathbb{C}_w$. Это означает, что декартово (прямое) произведение любой такой спирали на второй экземпляр комплексной плоскости $\mathbb{C}_z$ является аффинно-однородной вещественной трехмерной гиперповерхностью в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$. Эта поверхность вырождена по Леви в силу своей расслоенной структуры, и ее уравнение (в любой точке) после аффинного преобразования переменной w несложно записать в виде

$$v = u^2 + \sum_{k \geq 3} D_k u^k, \quad (5.4)$$

являющемся частным случаем уравнения (5.1). Коэффициенты D_k из этого уравнения определяются параметром B уравнения (5.3).

Никаких других однородных поверхностей веса 4 не существует, поскольку помимо логарифмических спиралей (и прямой линии) не существует других плоских кривых, являющихся однородными относительно комплексных аффинных преобразований. Этот факт просто выводится из рассмотрения полного списка плоских аффинно-однородных кривых (см., например, [17], [11]).

Напомним, что (помимо спиралей) в этот список входят графики степенных функций $v = u^\alpha$, $\alpha \in [-1, 1)$, и еще две кривые $v = \ln u$ и $v = u \ln u$. Аффинные преобразования, реализующие однородность любой из этих кривых, являются

вещественными (но не комплексными) аффинными преобразованиями. Теорема 5, завершающая нашу классификацию, доказана.

Примечание. Автор выражает благодарность Р. Шафикову, указавшему на имевшиеся (в мае 2010 г.) пробелы в классификации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] E. Cartan, *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*, Ann. Math. Pura Appl. (4), **11**:1 (1932), 17–90 (Oeuvres II, 2, 1231–1304).
- [2] А. Лобода, А. Ходарев, *Об одном семействе аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей 3-мерного комплексного пространства*, Изв. ВУЗов. Сер. Матем., **10** (2003), 38–50.
- [3] G. Fels, W. Kaup, *Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5*, Acta Math., **201**:1 (2008), 1–82.
- [4] А. В. Лобода, *Однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ с двумерными группами изотропии*, Труды МИАН, т. 235, Наука, М., 2001, 114–142.
- [5] А. В. Лобода, *Об определении однородной строго псевдо-выпуклой гиперповерхности по коэффициентам ее нормального уравнения*, Матем. заметки, **73**:3 (2003), 453–456.
- [6] А. М. Демин, А. В. Лобода, *Пример 2-параметрического семейства аффинно-однородных вещественных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$* , Матем. заметки, **84**:5 (2008), 791–794.
- [7] М. С. Данилов, А. В. Лобода, *Об аффинной однородности индефинитных вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^3$* , Матем. заметки, **88**:6 (2010), 867–884.
- [8] B. Doubrov, B. Komrakov, M. Rabinovich, *Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry*, in: Geometry and Topology of Submanifold, VIII, World Scientific Publ., River Edge, NJ, 1996, 168–178.
- [9] Н. Можей, *Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной и проективной геометрии*, Изв. ВУЗов. Математика, **7** (2000), 41–52.
- [10] K. Nomizu, T. Sasaki, *A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces*, Manuscr. Math., **73**:1 (1991), 39–44.
- [11] А. Лобода, *О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в $\mathbb{C}^2$* , Матем. заметки, **59**:2 (1996), 211–223.
- [12] A. Loboda, *On homogeneity of embedded manifolds*, <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/sfb701/files/preprints/sfb10091.pdf>.
- [13] А. Лобода, *Классификация аффинно-однородных невырожденных по Леви вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$* , в кн.: Современные проблемы математики и механики. Т. VI, Математика, вып. 3, Изд-во МГУ, М., 2011, 56–68.
- [14] А. Лобода, *Однородность вложенных многообразий. Аффинная геометрия вещественных гиперповерхностей пространства $\mathbb{C}^2$* , Изд-во ВГАСУ, Воронеж, 2012.
- [15] D. Zaitsev, *On different notions of homogeneity for CR-manifolds*, Asian J. Math., **11**:2 (2007), 331–340.
- [16] Р. Бишоп, Р. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1963.
- [17] А. П. Широков, П. А. Широков, *Аффинная дифференциальная геометрия*, Физматгиз, М., 1959.