Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Нессонов, КМШ-состояния на $\mathfrak{S}_\infty$, инвариантные относительно подгрупп Юнга, *Функци. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 2, 55–67

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3112>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 03:47:08

УДК 517.986.4

КМШ-состояния на $\mathfrak{S}_\infty$, инвариантные относительно подгрупп Юнга

© 2013. Н. И. Нессонов

Пусть $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ — группа всех конечных подстановок счетного множества $\mathbb{X}$, а $\Pi = ({}^1\mathbb{X}, \dots, {}^n\mathbb{X})$ — разбиение множества $\mathbb{X}$ на дизъюнктные подмножества, где $|{}^i\mathbb{X}| = \infty$ для всех i . Положим $\mathfrak{S}_\Pi = \{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X} \mid s({}^i\mathbb{X}) = {}^i\mathbb{X} \text{ для всех } i\}$. Положительно определенная функция φ на $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ называется КМШ-состоянием, если соответствующий ей вектор в пространстве ГНС-представления является циклическим для коммутанта представления. Получено полное описание факторных КМШ-состояний, инвариантных (центральных) относительно подгруппы $\mathfrak{S}_\Pi$.

§1. Введение

Для счетного множества $\mathbb{X}$ обозначим через $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ группу всех конечных¹⁾ перестановок его элементов. Рассмотрим разбиение $\Pi = ({}^1\mathbb{X}, \dots, {}^n\mathbb{X})$ множества $\mathbb{X}$ на дизъюнктные подмножества, где $|{}^i\mathbb{X}| = \infty$ для всех i , и положим $\mathfrak{S}_\Pi = \{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X} \mid s({}^i\mathbb{X}) = {}^i\mathbb{X} \text{ для всех } i\}$. Для $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ положим $\mathfrak{S}_\mathbb{Y} = \{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X} : s(x) = x \text{ при всех } x \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}\}$. Обозначим через $\mathfrak{F}_\Pi^+$ класс положительно определенных функций φ на $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$, удовлетворяющих условиям $\varphi(gh) = \varphi(hg)$ для всех $g \in \mathfrak{S}_\mathbb{X}$, $h \in \mathfrak{S}_\Pi$, и $\varphi(\mathbf{e}) = 1$, где $\mathbf{e}$ — единица в $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$. Для удобства элементы из $\mathfrak{F}_\Pi^+$ будем называть *Π -центральными состояниями*. Пусть $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ есть ГНС-представление группы $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ (т.е. представление, получаемое конструкцией Гельфанда–Найма–Сигала); оно действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$ с циклическим вектором ξ_φ , таким, что $\varphi(s) = (\pi_\varphi(s)\xi_\varphi, \xi_\varphi)$ для всех $s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X}$. Пусть $\pi_\varphi(\mathfrak{S}_\mathbb{X})'$ и $\pi_\varphi(\mathfrak{S}_\mathbb{X})''$ — коммутант и бикоммутант соответственно множества $\pi_\varphi(\mathfrak{S}_\mathbb{X})$. Назовем φ КМШ-состоянием (КМШ — Кубо–Мартин–Швингер), если вектор ξ_φ является также циклическим для $\pi_\varphi(\mathfrak{S}_\mathbb{X})'$ (т.е. *бициклическим*) [7].

Заметим, что $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ -центральные функции на $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ ($\Pi = (\mathbb{X})$) — это обычные характеры [8], которые всегда являются КМШ-состояниями. Если ГНС-представление $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi, \xi_\varphi)$ неприводимо, то φ не является КМШ-состоянием.

Скажем, что $\varphi \in \mathfrak{F}_\Pi^+$ является *факторным* или *неразложимым*, если соответствующее ГНС-представление π_φ есть факторпредставление. КМШ-условие позволяет канонически построить, следуя подходу Ольшанского [4], по факторному состоянию $\varphi \in \mathfrak{F}_\Pi^+$ неприводимое представление группы $\mathfrak{S}_\mathbb{X} \times \mathfrak{S}_\mathbb{X}$, которое содержит однократно единичное представление подгруппы $\text{diag } \mathfrak{S}_\Pi = \{(s, s) : s \in \mathfrak{S}_\Pi\}$. Сужение соответствующей сферической функции на компоненту $\mathfrak{S}_\mathbb{X} \times \mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единица в $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$, дает исходное состояние φ .

Серии примеров КМШ-состояний на группе $U(\infty)$ были построены в [6]. В [10] была предложена классификация $U(\infty)$ -инвариантных состояний на $GL(\infty)$.

¹⁾ $s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X}$, если множество $\text{supp } s = \{x \in \mathbb{X} : s(x) \neq x\}$ конечно.

В предлагаемой работе описаны факторные Π -центральные КМШ-состояния на $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$. Эти результаты можно рассматривать как расширение классификации Тома конечных характеров на случай Π -центральных состояний. Заметим, что, обобщая понятие полуконечного следа на групповой алгебре $C^*[\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}]$ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, можно дать определение Π -центрального КМШ-веса на $C^*[\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}]$. По-видимому, для таких весов существует аналог классификации Вершика и Керова [9].

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания, позволившие сформулировать результаты работы ясно и просто.

§2. Основные определения

Представления π_1 и π_2 группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ называются квазиэквивалентными, если существует изоморфизм $\theta: \pi_1(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})'' \rightarrow \pi_2(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$, для которого $\theta(\pi_1(g)) = \pi_2(g)$ при всех $g \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$. Имеет место следующее

Предложение 1. Пусть φ и ψ — факторные состояния из $\mathfrak{F}_{\Pi}^+$. Если ГНС-представления π_{φ} и π_{ψ} квазиэквивалентны, то $\varphi = \psi$.

Доказательство. Зафиксируем цепочку $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2 \subset \dots$ конечных подмножеств в $\mathbb{X}$, такую, что $\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$. Отображение θ , определяемое условием $\theta(\pi_{\varphi}(g)) = \pi_{\psi}(g)$, $g \in \mathfrak{S}_{\infty}$, продолжается до изоморфизма $\theta: \pi_{\varphi}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})'' \rightarrow \pi_{\psi}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$. Для любого $g \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ найдется последовательность $\{s_l^g\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathfrak{S}_{\Pi}$, для которой $s_l^g g (s_l^g)^{-1} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{F}_l}$ и $s_{l+1}^g (s_l^g)^{-1} \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X} \setminus \mathbb{F}_l}$. Отсюда и из Π -центральности состояния φ , используя его неразложимость и цикличность вектора ξ_{φ} , можно вывести существование слабого предела $w\text{-}\lim_{l \rightarrow \infty} \pi_{\varphi}(s_l^g g (s_l^g)^{-1}) = \varphi(g)I$, где I — единичный оператор в H_{φ} . Теперь, опираясь на слабую непрерывность отображения θ и $\mathfrak{S}_{\Pi}$ -инвариантность состояния ψ , получаем

$$\psi(g) = \langle \theta(\pi_{\varphi}(g))\xi_{\psi}, \xi_{\psi} \rangle = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle \theta(\pi_{\varphi}(s_l^g g (s_l^g)^{-1}))\xi_{\psi}, \xi_{\psi} \rangle = \langle \theta(\varphi(g)I)\xi_{\psi}, \xi_{\psi} \rangle = \varphi(g).$$

□

Замечание 1. Пусть $\varphi \in \mathfrak{F}_{\Pi}^+$, а $\mathbb{F}_l$ и s_l^g , $g \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, определяются так же, как в доказательстве предложения 1. Обозначим через $\mathcal{C}$ центр алгебры $\pi_{\varphi}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$. Опираясь на Π -центральность состояния φ , можно показать, что при каждом $g \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ существует слабый предел $w\text{-}\lim_{l \rightarrow \infty} \pi_{\varphi}(s_l^g g (s_l^g)^{-1}) = E_{\varphi}(\pi_{\varphi}(g))$, где $E_{\varphi}(\pi_{\varphi}(g))$ лежит в $\mathcal{C}$. Отображение $\pi_{\varphi}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})'' \ni \pi_{\varphi}(g) \mapsto E_{\varphi}(\pi_{\varphi}(g)) \in \mathcal{C}$ продолжается по линейности и непрерывности до слабо непрерывного условного ожидания алгебры $\pi_{\varphi}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$ на ее центр и однозначно определяется условиями

- (i) $E_{\varphi}(I) = I$;
- (ii) $E_{\varphi}(a) \geq 0$ для всех неотрицательных $a \in \pi_{\varphi}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$;
- (iii) $E_{\varphi}(c_1 a c_2) = c_1 E_{\varphi}(a) c_2$ для всех $a \in \pi_{\varphi}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$ и $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$.

Следствие 2. Состояние $\varphi \in \mathfrak{F}_{\Pi}^+$ тогда и только тогда является факторным, когда оно — крайняя точка множества $\mathfrak{F}_{\Pi}^+$.

Пусть $\mathfrak{E}_{\Pi}$ обозначает множество всех крайних точек множества $\mathfrak{F}_{\Pi}^+$. Состояния из $\mathfrak{E}_{\Pi}$ характеризуются свойством мультипликативности. Множество $\mathfrak{E}_{\Pi}$ унаследовало важное свойство неразложимых характеров. А именно, в силу предложения 1 по факторпредставлению однозначно восстанавливается неразложимое Π -центральное состояние.

Предложение 3. Пусть $s, t \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ и $\text{supp } s = \{x \in \mathbb{X} : s(x) \neq x\}$. Состояние $\varphi \in \mathfrak{F}_{\Pi}^+$ тогда и только тогда неразложимо, когда для любых s и t , таких, что $\text{supp } s \cap \text{supp } t = \emptyset$, имеет место равенство $\varphi(st) = \varphi(s)\varphi(t)$.

Ниже приводится полное описание КМШ-состояний из $\mathfrak{E}_\Pi$. В §5 рассмотрены проводящиеся для случая, когда Π — разбиение на два множества. Излагаемые там результаты без труда обобщаются на случай общих разбиений с бесконечными частями. С помощью предлагаемого здесь подхода можно получить описание Π -центральных состояний, которые не удовлетворяют КМШ-условию. Но это связано с определенными техническими трудностями, которые привели бы к существенному увеличению объема статьи. Также можно показать, что представления, соответствующие Π -центральных КМШ-состояниям, могут иметь только тип Π_1 (хорошо известные представления Тома [8]) или Π_λ ($0 < \lambda \leq 1$) по классификации фон Неймана–Конна.

В следующем параграфе дан список Π -центральных неразложимых состояний. А именно, построены реализации соответствующих унитарных представлений. В §5 доказана полнота этого списка (теорема 6). Доказывается этот результат с помощью приведения общего факторпредставления к явной реализации (см. разд. 5.6). Метод основан на том, что операторы, параметризующие представления из следующего параграфа, можно истолковать как асимптотические операторы из леммы 9.

§3. Результаты

Пусть H — комплексное гильбертово пространство, $\mathcal{B}$ — множество всех ограниченных операторов в H , I — единичный оператор из $\mathcal{B}$ и Tr — обычный след на $\mathcal{B}$.

Каждой части $^i\mathbb{X}$ разбиения $\Pi = ({}^1\mathbb{X}, \dots, {}^n\mathbb{X})$ поставим в соответствие неотрицательный оператор $^iA \in \mathcal{B}$, такой, что $\text{Tr}(^iA) \leq 1$. Предположим, что имеет место следующее свойство: если $h \in H$ удовлетворяет соотношению ${}^1Ah = \dots = {}^nAh = 0$, то $h = 0$. Зафиксируем самосопряженный оператор $J \in \mathcal{B}$ со свойствами $J^2 = I$ и $^iA \cdot J = J \cdot ^iA$, где $i = 1, \dots, n$.

Положим $i(x) = k$, если $x \in {}^k\mathbb{X}$.

Теперь из этих данных вытекает корректность определяемой ниже комплекснозначной функции φ на $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$.

Определение 1. Положим $\varphi(e) = 1$ и

$$\varphi(c) = \text{Tr}(i(x_1)A \cdot J \cdot i(x_2)A \dots J \cdot i(x_l)A) \quad (3.1)$$

для цикла $c = (x_1 x_2 \dots x_l)$ длины $l > 1$. Если $s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X}$ является произведением независимых циклов $c_1, \dots, c_k$, то $\varphi(s) = \varphi(c_1) \dots \varphi(c_k)$.

Так как $i(x) = i(s(x))$ для всех $s \in \mathfrak{S}_\Pi$, то функция φ является Π -центральной. Понятно, что замене состояния φ на состояние $\hat{\varphi}$, определяемое формулой $\hat{\varphi}(s) = \text{sign } s \cdot \varphi(s)$, $s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X}$, соответствует преобразование $J \rightarrow -J$.

В §4 через реализацию соответствующего представления будет установлена положительная определенность функции φ . Следовательно, опираясь на предложение 3, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. Функция φ из определения 1 принадлежит $\mathfrak{F}_\Pi^+$ и является факторной.

Теорема 5. Пусть операторы iA ($1 \leq i \leq n$) и J удовлетворяют приведенным выше условиям. Функция φ из определения 1 тогда и только тогда является КМШ-состоянием, когда выполняется одно из следующих условий:

(а) ${}^1A = \dots = {}^nA = 0$, т.е. в этом случае $H = 0$;

- (b) ядра операторов ${}^1A, \dots, {}^nA$ нулевые и $\text{Tr}({}^iA) = 1$ при всех $i = 1, \dots, n$;
 (c) ядра операторов ${}^1A, \dots, {}^nA$ нулевые и $\text{Tr}({}^iA) < 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

В §5 будет доказана основная

Теорема 6. Любое факторное КМШ-состояние φ из $\mathfrak{F}_\Pi^+$ задается согласно определению 1.

§4. Реализации

Излагаемые в этом параграфе построения являются обобщением реализаций из [4]. В нашем подходе пространства представлений являются одновременно алгебрами.

4.1. Вложения группы $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ в бесконечное тензорное произведение.

Пусть $\mathbb{X} = \{x_1, \dots, x_l, \dots\}$. Далее для упрощения обозначений в некоторых местах удобно отождествлять x_k с $k \in \mathbb{N}$. Каждому $x \in \mathbb{X}$ поставим в соответствие копию $\tilde{\mathcal{B}}_x$ алгебры $\mathcal{B}$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$. Пусть $\tilde{I}$ — единичный оператор из $\tilde{\mathcal{B}}$. Для конечного подмножества $\mathbb{F} \subset \mathbb{X}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{F}}$ алгебру, порожденную элементами вида $a_{f_1} \otimes \dots \otimes a_{f_{|\mathbb{F}|}}$, где $f_1 < \dots < f_{|\mathbb{F}|}$, $a_j \in \mathcal{B}$, а $\{x_{f_1}, \dots, x_{f_{|\mathbb{F}|}}\} = \mathbb{F}$. Если $\mathbb{F} \subset \mathbb{K} = \{x_{k_1}, \dots, x_{k_{|\mathbb{K}|}}\}$, то существует естественное вложение $\mathfrak{I}_{\mathbb{F}\mathbb{K}}: \tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{F}} \mapsto \tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{K}}$. А именно, $\mathfrak{I}_{\mathbb{F}\mathbb{K}}(a_{f_1} \otimes \dots \otimes a_{f_{|\mathbb{F}|}}) = a_{k_1} \otimes \dots \otimes a_{k_{|\mathbb{K}|}}$, где $a_{k_i} = \tilde{I}$ при $x_{k_i} \notin \mathbb{F}$. Отождествляя $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{F}}$ с $\mathfrak{I}_{\mathbb{F}\mathbb{K}}(\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{F}})$, будем считать $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{F}}$ подалгеброй в $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{K}}$. Зафиксируем возрастающую цепочку $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2 \subset \dots$ конечных подмножеств в $\mathbb{X}$, для которой $\bigcup_{l=1}^\infty \mathbb{F}_l = \mathbb{X}$, и положим $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}} = \bigcup_{l=1}^\infty \tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{F}_l}$. Обозначим через $a^{(x_k)}$, $x_k \in \mathbb{X}$, элемент $\dots \otimes \tilde{I} \otimes \dots \otimes \tilde{I} \otimes a \otimes \tilde{I} \otimes \dots \in \tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$, где $a \in \tilde{\mathcal{B}}$.

Для построения вложения группы $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ в $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$ зафиксируем в $\tilde{\mathcal{B}}$ систему матричных единиц $\{\tilde{e}_{pq}\}_{p,q=1}^{\dim \tilde{H}}$. Пусть $\tilde{P}$ — ортогональный проектор из $\tilde{B}$. Поставим в соответствие транспозиции $s_k = (x_k \ x_{k+1}) \in \mathfrak{S}_\mathbb{X}$ унитарный элемент

$$U_{\tilde{P}}^{(s_k)} = (\tilde{I} - \tilde{P})^{(x_k)} \cdot (\tilde{I} - \tilde{P})^{(x_{k+1})} + (\tilde{I} - \tilde{P})^{(x_k)} \cdot \tilde{P}^{(x_{k+1})} + \tilde{P}^{(x_k)} \cdot (\tilde{I} - \tilde{P})^{(x_{k+1})} - \tilde{P}^{(x_k)} \cdot \tilde{P}^{(x_{k+1})} \in \tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}.$$

Для понимания сути происходящего удобно рассматривать $\tilde{H}$ как суперпространство (см. [1]), в котором $\tilde{P}\tilde{H}$ является подпространством нечетных элементов.

Тогда $T_{\tilde{P}}(s_k) = U_{\tilde{P}}^{(s_k)} \sum_{p,q=1}^{\dim \tilde{H}} \tilde{e}_{pq}^{(x_k)} \cdot \tilde{e}_{qp}^{(x_{k+1})} \in \mathfrak{S}_\mathbb{X}$ интерпретируется как оператор перестановки компонент в тензорном произведении суперпространств. С помощью прямой проверки соответствующих соотношений между образующими убеждаемся, что отображение $\mathfrak{S}_\mathbb{X} \ni s_k \mapsto T_{\tilde{P}}(s_k) \in \tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$ продолжается до изоморфизма группы $\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ в унитарную подгруппу алгебры $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$. Легко проверить, что при $\tilde{P} = 0$

$$T_0(s) = \sum_{i_{x_1}, \dots, i_{x_k}, \dots = 1}^{\dim \tilde{H}} \tilde{e}_{i_{x_1} i_{s(x_1)}}^{(x_1)} \cdots \tilde{e}_{i_{x_k} i_{s(x_k)}}^{(x_k)} \cdots \quad (4.1)$$

Далее нам потребуется явное выражение для $T_{\tilde{P}}((x_k \ x_l))$ в случае, когда $l > k + 1$. По индукции доказывается следующая формула:

$$T_{\tilde{P}}((x_k \ x_l)) = \sum_{p,q=1}^{\dim \tilde{H}} U_{\tilde{P}}^{(x_k x_l)} \tilde{e}_{pq}^{(x_k)} \cdot \tilde{e}_{qp}^{(x_l)},$$

$$\begin{aligned} \text{где } U_{\tilde{P}}^{(x_k x_l)} &= (\tilde{I} - \tilde{P})^{(x_k)} (\tilde{I} - \tilde{P})^{(x_l)} + (\tilde{I} - \tilde{P})^{(x_k)} \prod_{j=k+1}^{l-1} (\tilde{I} - 2\tilde{P})^{(x_j)} \tilde{P}^{(x_l)} \\ &+ \tilde{P}^{(x_k)} \prod_{j=k+1}^{l-1} (\tilde{I} - 2\tilde{P})^{(x_j)} (\tilde{I} - \tilde{P})^{(x_l)} - \tilde{P}^{(x_k)} \tilde{P}^{(x_l)}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.2. Скалярное произведение на $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$. Предположим, что H , $\mathcal{B}$ и операторы ${}^1A, \dots, {}^nA$ удовлетворяют условиям из §3.

Если $\text{Tr}({}^1A) = \dots = \text{Tr}({}^nA) = 1$, то положим $\tilde{H} = H$, $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ и определим состояние ψ_x на $\mathcal{B}$ согласно формуле

$$\psi_k(b) = \text{Tr}({}^i(x_k)A \cdot b), \quad b \in \tilde{\mathcal{B}}. \quad (4.3)$$

Продакт-состояние $\psi = \bigotimes_{k \in \mathbb{N}} \psi_x$ задает на $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$ структуру предгильбертова пространства со скалярным произведением $\langle a, b \rangle = \psi(b^*a)$. Обозначим через $\mathcal{H}$ соответствующее пополнение.

Если существует i , для которого $\text{Tr}({}^iA) < 1$, то положим $\tilde{H} = H \oplus H_{\text{reg}}$, где H_{reg} — бесконечномерное гильбертово пространство. Для дальнейшего зафиксируем в H_{reg} ортонормированный базис $\{e_x\}_{x \in \mathbb{X}}$; он занумерован элементами множества $\mathbb{X}$. Дополним множество $\{e_x\}_{x \in \mathbb{X}}$ до ортонормированного базиса $\{e_{\tilde{x}}\}_{\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{X}}}$ в $\tilde{H}$, где $\tilde{\mathbb{X}} = \{1, \dots, \dim H\} \sqcup \mathbb{X}$. Для того чтобы использовать в дальнейшем объекты, введенные в разд. 4.1, перенумеруем элементы этого базиса натуральными числами. А именно, зафиксировав биекцию $\mathbf{b}: \tilde{\mathbb{X}} \mapsto \mathbb{N}$, вектору $e_{\tilde{x}}$ припишем номер $\mathbf{b}(\tilde{x})$ ($e_{\tilde{x}} = e_{\mathbf{b}(\tilde{x})}$). Пусть $\mathbf{b}(x_k) = n_k$. Обозначим через $\mathbb{N}_{\text{reg}}$ множество $\mathbf{b}(\mathbb{X}) = \{n_1, \dots, n_l, \dots\} \subset \mathbb{N}$. Предположим, что матричные единицы $\{\tilde{e}_{pq}\}_{p,q=1}^{\dim \tilde{H}}$, введенные в разд. 4.1, удовлетворяют соотношениям $\tilde{e}_{pq} e_r = \delta_{qr} e_p$. Состояние ψ и соответствующее скалярное произведение на $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$ определяются так же, как и выше, но $\psi_k(b)$ из (4.3) вычисляется по формуле

$$\psi_k(b) = \text{Tr}({}^i(x_k)A \cdot b) + (1 - \text{Tr}({}^i(x_k)A)) \text{Tr}(b \cdot \tilde{e}_{\mathbf{b}(x_k)\mathbf{b}(x_k)}). \quad (4.4)$$

Замечание 2. Если $H = 0$ или, эквивалентно, ${}^1A = \dots = {}^nA = 0$, то $\tilde{H} = H_{\text{reg}}$ и $\tilde{\mathbb{X}} = \mathbb{X}$. отождествим $\mathbb{X}$ с $\mathbb{N}$. В этом случае пространство $\mathcal{H}$ естественно отождествляется с бесконечным тензорным произведением $H_{\text{reg}}^{\otimes \mathbb{N}}$, определяемым стабилизирующим вектором $e_1 \otimes \dots \otimes e_k \otimes \dots$.

4.3. Представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ $\star$ -представление алгебры $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$ в $\mathcal{H}$, определяемое левым умножением: $\mathcal{L}(A)u = Au$, где $A \in \tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$, $u \in \tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}} \subset \mathcal{H}$. Проектор $P = \frac{I-J}{2} \in \mathcal{B}$ (см. §3) расширим до оператора $\tilde{P} \in \tilde{\mathcal{B}}$, положив $\tilde{P} = P \oplus 0$ на $\tilde{H} = H \oplus H_{\text{reg}}$. Тогда операторы $\mathcal{L}(T_{\tilde{P}}(s))$, $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$ (см. разд. 4.1), задают в $\mathcal{H}$ унитарное представление группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$, которое мы обозначим через $\mathfrak{L}$. Пусть ξ_0 — вектор из $\mathcal{H}$, соответствующий единичному элементу алгебры $\tilde{\mathcal{B}}^{\otimes \mathbb{X}}$. Из следующего утверждения, которое проверяется простым вычислением, вытекает теорема 4.

Предложение 7. Пусть φ — функция из определения 1 и $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$. Тогда $\varphi(s) = \langle \mathfrak{L}(s)\xi_0, \xi_0 \rangle$.

4.4. Вспомогательное представление U_0^∞ группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$. Пусть $s \in \mathfrak{S}_{\mathbb{X}}$. Определим унитарный оператор $U_0(s) \in \tilde{\mathcal{B}}$ формулой

$$U_0(s)e_p = \begin{cases} e_{\mathbf{b}(s(x))}, & \text{если } p = \mathbf{b}(x) \in \mathbb{N}_{\text{reg}}, \\ e_p, & \text{если } p \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{reg}}. \end{cases}$$

Из определения пространства $\mathcal{H}$ (см. разд. 4.2 и (4.4)) вытекает, что отображение

$$\mathcal{H} \ni b_{x_1} \otimes \cdots \otimes b_{x_k} \otimes \cdots \mapsto U_0(s)b_{x_1} \otimes \cdots \otimes U_0(s)b_{x_k} \otimes \cdots$$

продолжается по линейности и непрерывности до унитарного оператора в $\mathcal{H}$, который будет обозначаться далее через $U_0^\infty(s)$.

Предложение 8. По построению $U_0^\infty(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})$ принадлежит коммутанту множества $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})$, т. е. $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})'$.

4.5. Доказательство теоремы 5. Для множества $\mathcal{S} = \{B_1, B_2, \dots\}$ операторов, действующих в $\mathcal{H}$, и вектора $\xi \in \mathcal{H}$ обозначим через $[\mathcal{S}\xi]$ подпространство, порожденное векторами $B_1\xi, B_2\xi, \dots$. Положим $\mathcal{H}_0 = [\mathfrak{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})\xi_0]$.

Докажем, что из условий теоремы 5 вытекает включение

$$\mathcal{H}_0 \subset [\mathfrak{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})'\xi_0]. \quad (4.5)$$

В случае (а) функция φ из определения 1 является характером регулярного представления. Поэтому (4.5) вытекает из предложения 7. Так же просто проверяется, что $\mathcal{H}_0 = [U_0^\infty(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})\xi_0]$. Теперь (4.5) вытекает из предложения 8.

В случае (б) потребуем, чтобы $\|(iA)^{-1}\| < \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$. При этом условии правое умножение на любой элемент из $\tilde{B}^{\otimes \mathbb{X}}$ определяет ограниченный оператор из $\mathfrak{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})'$. Отсюда вытекает (4.5). В общем случае в каждой $\tilde{\mathcal{B}}_x$ рассмотрим подалгебру $\tilde{\mathcal{B}}_{x,\epsilon} = {}^{i(x)}E_{[\epsilon,1]} \cdot \tilde{\mathcal{B}}_x \cdot {}^{i(x)}E_{[\epsilon,1]}$, где $\epsilon > 0$, а ${}^{i(x)}E_{[\epsilon,1]}$ — спектральный проектор оператора ${}^{i(x)}A$. Тогда правое умножение на $b_{x_1} \otimes \cdots \otimes b_{x_k} \otimes \cdots \in \tilde{B}^{\otimes \mathbb{X}}$, где $b_x \in \tilde{\mathcal{B}}_{x,\epsilon}$, также определяет ограниченный оператор в $\mathcal{H}$. Теперь доказательство включения (4.5) завершается с помощью естественной аппроксимации.

Для обоснования (4.5) при условии (с) достаточно доказать, что $\mathfrak{L}(s_k)\xi_0 \in [\mathfrak{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})'\xi_0]$ для любой транспозиции $s_k = (x_k \ x_{k+1})$ (см. разд. 4.1). Из определения представления $\mathfrak{L}$ получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(s_k)\xi_0 &= U_{\tilde{P}}^{(s_k)} \left(\tilde{e}_{n_{k+1}n_k}^{(x_k)} \tilde{e}_{n_k n_{k+1}}^{(x_{k+1})} + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{reg}}} \tilde{e}_{n_{k+1}i}^{(x_k)} \tilde{e}_{in_{k+1}}^{(x_{k+1})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{reg}}} \tilde{e}_{in_k}^{(x_k)} \tilde{e}_{n_k i}^{(x_{k+1})} + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{reg}}} \tilde{e}_{ij}^{(x_k)} \tilde{e}_{ji}^{(x_{k+1})} \right), \\ U_0^\infty(s_k) \cdot \mathfrak{L}(s_k)\xi_0 &= U_{\tilde{P}}^{(s_k)} \left(\tilde{e}_{n_k n_k}^{(x_k)} \tilde{e}_{n_{k+1}n_{k+1}}^{(x_{k+1})} + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{reg}}} \tilde{e}_{n_k i}^{(x_k)} \tilde{e}_{in_{k+1}}^{(x_{k+1})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{reg}}} \tilde{e}_{i n_k}^{(x_k)} \tilde{e}_{n_{k+1} i}^{(x_{k+1})} + \sum_{i \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{\text{reg}}} \tilde{e}_{ij}^{(x_k)} \tilde{e}_{ji}^{(x_{k+1})} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из условия (с), используя определение пространства $\mathcal{H}$, можно вывести существование последовательности ограниченных операторов $\mathcal{R}_j$, каждый из которых задается правым умножением на элемент из $\tilde{\mathcal{B}}$, со свойством $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{R}_j \xi_0 = U_0^\infty(s_k) \cdot \mathcal{L}(s_k) \xi_0$. Теперь (4.5) вытекает из предложения 8. Следовательно, вектор ξ_0 является бициклическим для представления $\mathcal{L}$.

Перейдем к доказательству обратного утверждения.

По J и $\{^i A\}_{i=1}^n$ из §3 определим операторы $\tilde{J}$ и $\{^i \tilde{A}\}_{i=1}^n \subset \tilde{\mathcal{B}}$, полагая $\tilde{J} = \tilde{I} - 2\tilde{P}$, где $\tilde{I}$ — единица из $\tilde{\mathcal{B}}$, $^i \tilde{A} = ^i A \oplus 0$ на $\tilde{H} = H \oplus H_{\text{reg}}$. Опираясь на (4.2), прямым вычислением можно убедиться, что

$$\text{w-lim}_{k \rightarrow \infty, x_k \in {}^i \mathbb{X}} \mathcal{L}((x \ x_k)) = \mathcal{L}({}^i \tilde{A}^{(x)} \tilde{J}^{(x)}) \quad (4.6)$$

(см. разд. 4.3). Так как при $H = 0$ мы получаем условие (а), то далее предполагается, что $H \neq 0$.

Положим ${}^i \tilde{E} = {}^i E \oplus I_{\text{reg}}$, где ${}^i E$ — спектральный проектор на ядро оператора ${}^i A$, а I_{reg} — единичный оператор в H_{reg} . Так как ${}^i \tilde{E}$ — проектор на ядро оператора ${}^i \tilde{A}$, то ввиду (4.6) имеем $\mathcal{L}({}^i \tilde{E}^{(x)}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$ для всех i и x . Следовательно, $\mathcal{L}(((I - {}^i \tilde{E}) \oplus 0)^{(x)}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$. Отсюда, учитывая свойства операторов ${}^i A$ (см. §3), получаем, что $\mathcal{L}((I \oplus 0)^{(x)}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$. Следовательно,

$$\mathcal{L}({}^i \tilde{E}^{(x)}) \cdot \mathcal{L}((I \oplus 0)^{(x)}) = \mathcal{L}(({}^i E \oplus 0)^{(x)}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''. \quad (4.7)$$

Так как $\langle \mathcal{L}(({}^i E \oplus 0)^{(x)}) \xi_0, \xi_0 \rangle = \text{Tr}({}^{i(x)} A \cdot {}^i E)$, то из свойств операторов ${}^i A$, $i = 1, \dots, n$, получаем

$${}^i E \neq 0 \iff \mathcal{L}(({}^i E \oplus 0)^{(x)}) \neq 0 \text{ для всех } x. \quad (4.8)$$

Но при $i(x) = i$ имеем $\langle \mathcal{L}(({}^i E \oplus 0)^{(x)}) \xi_0, \xi_0 \rangle = \text{Tr}({}^i A \cdot {}^i E) = 0$. Это противоречит бицикличности вектора ξ_0 . Следовательно, ${}^i E = 0$ для всех i . Отсюда, используя (4.6), получаем, что $\mathcal{L}((0 \oplus I_{\text{reg}})^{(x)}) \in \mathcal{L}(\mathfrak{S}_{\mathbb{X}})''$. Если $H_{\text{reg}} \neq 0$, то существует $x' \in \mathbb{X}$, для которого $\langle \mathcal{L}((0 \oplus I_{\text{reg}})^{(x')}) \xi_0, \xi_0 \rangle \neq 0$. Поэтому $\mathcal{L}((0 \oplus I_{\text{reg}})^{(x)}) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Если $\text{Tr}({}^j A) = 1$, то при $\mathbf{b}(x) = j$ имеем $\langle \mathcal{L}((0 \oplus I_{\text{reg}})^{(x)}) \xi_0, \xi_0 \rangle = 0$. Последнее опять противоречит бицикличности вектора ξ_0 . $\square$

§5. Классификация

В этом параграфе мы докажем теорему 6.

Пусть φ — произвольное КМШ-состояние из $\mathfrak{E}_{\Pi}$. В последующих разделах мы даем конструкцию параметров ${}^1 A, \dots, {}^n A$ и J , соответствующих π_φ . Ниже мы предполагаем, что φ удовлетворяет условиям теоремы 6. Для упрощения обозначений предположим, что $\Pi = ({}^1 \mathbb{X}, {}^2 \mathbb{X})$.

5.1. Асимптотические операторы ${}^1 \mathcal{O}_k$ и ${}^2 \mathcal{O}_k$. Следующее утверждение легко вывести из π -центральности состояния φ , даже без предположений о его факторности и КМШ-условии.

Лемма 9. В слабой операторной топологии существуют пределы ${}^1\mathcal{O}_k = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty, n \in {}^1\mathbb{X}} \pi_\varphi((k \ n))$ и ${}^2\mathcal{O}_k = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty, n \in {}^2\mathbb{X}} \pi_\varphi((k \ n))$, для которых справедливы соотношения

$$\begin{aligned} {}^l\mathcal{O}_k \cdot {}^l\mathcal{O}_j &= {}^l\mathcal{O}_j \cdot {}^l\mathcal{O}_k \text{ для всех } j, k \in \mathbb{X} \text{ и } l = 1, 2, \\ {}^1\mathcal{O}_k \cdot {}^2\mathcal{O}_j &= {}^2\mathcal{O}_j \cdot {}^1\mathcal{O}_k \\ &\text{для всех } j \neq k \text{ и } \pi_\varphi(s) {}^l\mathcal{O}_k \pi_\varphi(s^{-1}) = {}^l\mathcal{O}_{s(k)}, \quad s \in \mathfrak{S}_\infty, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Замечание 3. Из определения оператора ${}^l\mathcal{O}_k$ вытекает его самосопряженность.

В силу леммы 9 $\text{Spec } {}^l\mathcal{O}_k = {}^lS \subset [-1 \ 1]$, где множество lS не зависит от $k \in \mathbb{X}$.

Лемма 10. Спектр оператора ${}^l\mathcal{O}_k$, $l = 1, 2$, удовлетворяет следующим условиям:

- (1) lS — не более чем счетное множество, единственной точкой сгущения которого может быть нуль;
- (2) если $0 \neq \lambda \in {}^lS$ и ${}^lE_k(\lambda)$ — соответствующий спектральный проектор оператора ${}^l\mathcal{O}_k$, то $\langle {}^lE_k(\lambda)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = {}^lm(\lambda)|\lambda|$, где ${}^lm(\lambda) \in \mathbb{N} \cup 0$;
- (3) $\sum_{\lambda \in {}^lS \setminus 0} {}^lm^-(\lambda)|\lambda| = 1 \iff {}^lE_k(0) = 0$.

Доказательство. Положим ${}^1\mathfrak{S}_\mathbb{X} = \{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X} : s(i) = i \text{ при всех } i \in {}^2\mathbb{X}\}$ и ${}^2\mathfrak{S}_\mathbb{X} = \{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{X} : s(i) = i \text{ при всех } i \in {}^1\mathbb{X}\}$. Обозначим через lP ортогональный проектор пространства $\mathcal{H}_\varphi$ на ${}^l\mathcal{H} = [\pi_\varphi({}^l\mathfrak{S}_\mathbb{X})\xi_\varphi]$, $l = 1, 2$. Так как φ есть КМШ-состояние, то отображение

$$\pi_\varphi({}^l\mathfrak{S}_\mathbb{X})'' \ni a \mapsto {}^lP \cdot a \cdot {}^lP^+ \in {}^lP\pi_\varphi({}^l\mathfrak{S}_\mathbb{X})''{}^lP$$

является изоморфизмом. Поэтому условия (1)–(3) выполняются одновременно для операторов ${}^l\mathcal{O}_j$ и ${}^lP {}^l\mathcal{O}_j {}^lP$.

Но сужение состояния φ на подгруппу ${}^l\mathfrak{S}_\mathbb{X}$ является характером Тома [8]. Следовательно, ${}^lP\pi_\varphi({}^l\mathfrak{S}_\mathbb{X})''{}^lP$ — фактор типа II_1 . А это означает, что мы можем воспользоваться результатами из [2], [3], где выполнение условий (1)–(3) доказано для оператора ${}^lP {}^l\mathcal{O}_j {}^lP$. Теперь доказательство вытекает из леммы 9. $\square$

5.2. Формула для φ . В силу предложения 3 функция φ однозначно определяется значениями на циклах. В свою очередь, если $c = (n_1 \ n_2 \ \dots \ n_k) = (n_1 \ n_k)(n_1 \ n_{k-1}) \dots (n_1 \ n_2)$, то

$$\varphi(c) = \langle {}^{i(n_k)}\mathcal{O}_{n_1} \cdot {}^{i(n_{k-1})}\mathcal{O}_{n_1} \dots {}^{i(n_2)}\mathcal{O}_{n_1} \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle.$$

Для доказательства этой формулы следует заметить, что в силу II -центральности состояния φ

$$\begin{aligned} \varphi(c) &= \varphi((n_1 \ n_k)(n_1 \ n_{k-1}) \dots (n_1 \ n_2)) \\ &= \langle \pi_\varphi(n_1 \ n_k) \pi_\varphi(n_1 \ n_{k-1}) \dots \pi_\varphi(n_1 \ n_2) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда, предполагая для определенности, что $n_k \in {}^2\mathbb{X}$, и принимая во внимание П-центральность состояния φ , имеем

$$\begin{aligned}\varphi(c) &= \lim_{N \rightarrow \infty, N \in {}^2\mathbb{X}} \langle \pi_\varphi(N \ n_k) \pi_\varphi(n_1 \ n_k) \pi_\varphi(n_1 \ n_{k-1}) \cdots \pi_\varphi(n_1 \ n_2) \pi_\varphi(N \ n_k) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty, N \in {}^2\mathbb{X}} \langle \pi_\varphi(N \ n_1) \pi_\varphi(n_1 \ n_{k-1}) \cdots \pi_\varphi(n_1 \ n_2) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ &= \langle {}^2\mathcal{O}_{n_1} \pi_\varphi(n_1 \ n_{k-1}) \cdots \pi_\varphi(n_1 \ n_2) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle.\end{aligned}$$

Повторяя эти соображения, приходим к нашей формуле.

5.3. Соотношения между спектральными проекторами операторов ${}^1\mathcal{O}_k$ и ${}^2\mathcal{O}_k$. Свойство П-центральности состояния φ накладывает на ${}^1\mathcal{O}_k$ и ${}^2\mathcal{O}_k$ условия, которые сформулированы в следующем утверждении.

Лемма 11. *Спектральные проекторы ${}^lE_k(\lambda)$, $l = 1, 2$, удовлетворяют следующим соотношениям:*

- (a) ${}^1E_k(0) = {}^2E_k(0)$,
- (b) $\sum_{\lambda \in {}^1S: \lambda < 0} {}^1E_k(\lambda) = \sum_{\lambda \in {}^2S: \lambda < 0} {}^2E_k(\lambda)$ при всех $k \in \mathbb{X}$.

Доказательство. Для доказательства п. (a) достаточно проверить, что

$${}^1E_k(0) \cdot {}^2E_k(\lambda) = 0 \quad \text{при } \lambda \neq 0. \quad (5.2)$$

Учитывая лемму 9, предположим, не ограничивая общности, что $\mathbb{X} \ni k = 1 \in {}^1\mathbb{X}$. Теперь заметим, что

$$\langle {}^1E_1(0) \cdot {}^2E_1(\lambda) \cdot {}^1E_1(0) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle {}^1E_1(0) \cdot {}^2\mathcal{O}_1 \cdot {}^2E_1(\lambda) \cdot {}^1E_1(0) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle.$$

Выберем последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset {}^2\mathbb{X}$, для которой $x_k \neq x_l$ при $k \neq l$. Теперь, принимая во внимание определение оператора ${}^1\mathcal{O}_1$ и П-центральность состояния φ , получаем

$$\begin{aligned}& \langle {}^1E_1(0) \cdot {}^2E_1(\lambda) \cdot {}^1E_1(0) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ & \stackrel{\text{лемма 9}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty, n \in {}^2\mathbb{X}} \frac{1}{\lambda} \langle {}^1E_1(0) \cdot \pi_\varphi((n \ 1)) \cdot {}^2E_1(\lambda) \cdot {}^1E_1(0) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ & = \frac{1}{\lambda} \langle {}^1E_1(0) \cdot \pi_\varphi((x_1 \ 1)) \cdot {}^2E_1(\lambda) \cdot {}^1E_1(0) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ & \stackrel{(5.1)}{=} \frac{1}{\lambda} \langle {}^1E_1(0) \cdot {}^2E_{x_1}(\lambda) \cdot {}^1E_{x_1}(0) \cdot \pi_\varphi((x_1 \ 1)) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ & = \frac{1}{\lambda} \langle {}^2E_{x_1}(\lambda) \cdot {}^1E_{x_1}(0) \cdot {}^1E_1(0) \cdot \pi_\varphi((x_1 \ 1)) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ & = \frac{1}{\lambda} \langle {}^2E_{x_1}(\lambda) \cdot {}^1E_{x_1}(0) \cdot \pi_\varphi((x_1 \ 1)) \cdot {}^1E_{x_1}(0) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \langle {}^2E_{x_k}(\lambda) \cdot {}^1E_{x_k}(0) \cdot \pi_\varphi((x_k \ 1)) \cdot {}^1E_{x_k}(0) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ & = \frac{1}{\lambda} \langle {}^2E_{x_k}(\lambda) \cdot {}^1E_{x_k}(0) \cdot {}^1\mathcal{O}_{x_k} \cdot {}^1E_{x_k}(0) \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = 0.\end{aligned}$$

Отсюда и из КМШ-условия вытекает (5.2).

Для доказательства п. (b) зафиксируем $\alpha \in {}^1S$ и $\beta \in {}^2S$, такие, что $\alpha\beta < 0$. По тем же причинам, что и выше, имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
\alpha\beta\langle {}^1E_1(\beta) \cdot {}^2E_1(\alpha) \cdot {}^1E_1(\beta)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle &= \beta\langle {}^1E_1(\beta) \cdot \pi_\varphi((x_1 \ 1)) \cdot {}^2E_1(\alpha) \cdot {}^1E_1(\beta)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \beta\langle {}^1E_1(\beta) \cdot {}^2E_{x_1}(\alpha) \cdot {}^1E_{x_1}(\beta) \cdot \pi_\varphi((x_1 \ 1))\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \beta\langle {}^2E_{x_1}(\alpha) \cdot {}^1E_{x_1}(\beta) \cdot {}^1E_1(\beta) \cdot \pi_\varphi((x_1 \ 1))\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \beta\langle {}^2E_{x_1}(\alpha) \cdot {}^1E_{x_1}(\beta) \cdot \pi_\varphi((x_1 \ 1)) \cdot {}^1E_{x_1}(\beta)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \beta\langle {}^2E_{x_1}(\alpha) \cdot {}^1E_{x_1}(\beta) \cdot {}^1\mathcal{O}_{x_1} \cdot {}^1E_{x_1}(\beta)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \beta^2\langle {}^2E_{x_1}(\alpha) \cdot {}^1E_{x_1}(\beta)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \beta^2\langle {}^2E_{x_1}(\alpha) \cdot {}^1E_{x_1}(\beta) \cdot {}^2E_{x_1}(\alpha)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Отсюда, так как $\alpha\beta < 0$, получаем, что $\langle {}^1E_1(\beta) \cdot {}^2E_1(\alpha) \cdot {}^1E_1(\beta)\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = 0$. Теперь, используя КМШ-условие, имеем ${}^1E_1(\beta) \cdot {}^2E_1(\alpha) = 0$. $\square$

Пусть W^* -алгебра $\mathfrak{A}_k$ порождена операторами ${}^1\mathcal{O}_k$ и ${}^2\mathcal{O}_k$.

5.4. Свойства W^* -алгебр $\mathfrak{A}_k$. В этом разделе мы докажем, что при каждом k алгебра $\mathfrak{A}_k$ изоморфна не более чем счетной прямой сумме конечномерных полных матричных алгебр.

Лемма 12. Пусть $U \in \mathfrak{A}_k$ удовлетворяет условию ${}^lE_k(\zeta) \cdot U \cdot {}^lE_k(\lambda) = U$, где $\zeta\lambda \neq 0$, а $k \in {}^l\mathbb{X}$. Тогда $\lambda\langle UU^*\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \zeta\langle U^*U\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle$.

Доказательство. Действительно, $\lambda\langle UU^*\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \langle U \cdot {}^l\mathcal{O}_k \cdot U^*\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle$. Отсюда и из определения оператора ${}^l\mathcal{O}_k$ (лемма 9), учитывая Π -центральность состояния φ , получаем при любом $n \in {}^l\mathbb{X}$, что

$$\begin{aligned}
\lambda\langle UU^*\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle &= \langle U \cdot \pi_\varphi((k \ n)) \cdot U^*\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \langle U \cdot \pi_\varphi((k \ n)) \cdot U^* \cdot \pi_\varphi((k \ n)) \cdot \pi_\varphi((k \ n))\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \langle \pi_\varphi((k \ n)) \cdot U^* \cdot \pi_\varphi((k \ n))U \cdot \pi_\varphi((k \ n))\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\
&= \langle U^* \pi_\varphi((k \ n))U\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \langle U^* \cdot {}^l\mathcal{O}_k \cdot U\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \zeta\langle U^*U\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

Повторяя аргументы, изложенные в доказательстве теоремы 2 из [3], получаем следующее усиление леммы 10:

Лемма 13. Пусть $\lambda \neq 0$, $k \in {}^l\mathbb{X}$, а проектор E лежит в ${}^lE_k(\lambda) \cdot \mathfrak{A}_k \cdot {}^lE_k(\lambda)$. Тогда $\langle E\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = {}^l\nu(E)|\lambda|$ при некотором ${}^l\nu(E) \in \mathbb{N}$.

Из лемм 9, 10, 11 и 13 вытекает

Предложение 14. Положим $\mathcal{P}_n^- = \sum_{\lambda \in {}^lS: \lambda < 0} {}^lE_n(\lambda)$, $\mathcal{P}_n = I - {}^lE_n(0)$. В центре алгебры $\mathcal{P}_n\mathfrak{A}_n\mathcal{P}_n$ существуют два не более чем счетных (возможно, пустых) набора $\mathcal{F}_n^+ = \{Q_n^+(k)\}_{k=1}^{N^+}$, $\mathcal{F}_n^- = \{Q_n^-(k)\}_{k=1}^{N^-}$ минимальных проекторов со следующими свойствами:

(i) $\pi_\varphi(s) \cdot Q_n^-(k) \cdot \pi_\varphi(s^{-1}) = Q_{s(n)}^-(k)$, $\pi_\varphi(s) \cdot Q_n^+(k) \cdot \pi_\varphi(s^{-1}) = Q_{s(n)}^+(k)$ для всех $s \in \mathfrak{S}_\infty$, n, k ;

(ii) $\mathcal{P}_n^- = \sum_{k=1}^{N^-} Q_n^-(k)$, $\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^- = \sum_{k=1}^{N^+} Q_n^+(k)$;

(iii) любой оператор $a \in \mathfrak{A}_n$ имеет вид $a = \mathcal{P}_na\mathcal{P}_n + z(a) \cdot {}^lE_n(0)$, где $z(a) \in \mathbb{C}$;

(iv) если $Q \in \mathcal{F}_n^- \cup \mathcal{F}_n^+$ и ${}^lQ(\lambda) = Q \cdot {}^lE_n(\lambda)$, то ${}^lQ(\lambda) \cdot \mathfrak{A}_n \cdot {}^lQ(\lambda)$ — конечный фактор Неймана типа I.

5.5. Точный нормальный след на $\mathfrak{A}_n$. Напомним понятие веса на алгебре Неймана [7]. Пусть M — алгебра Неймана, M_+ — конус неотрицательных

элементов в M и $\mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$. Отображение $w : M^+ \mapsto \mathbb{R}_+ \cup +\infty$ называется полуконечным весом на M , если оно удовлетворяет условиям

- (a) $w(x+y) = w(x) + w(y)$ для всех $x, y \in M_+$;
- (b) $w(\lambda x) = \lambda w(x)$, где предполагается, что $0 \cdot (+\infty) = 0$;
- (c) замыкание относительно сильной операторной топологии линейной оболочки множества $\{x \in M_+ : w(x) < \infty\}$ совпадает с M .

Если для любой неубывающей ограниченной последовательности $\{x_i\} \subset M_+$ вес w удовлетворяет условию $w(\sup x_i) = \sup w(x_i)$, то он называется нормальным.

Замечание 4. Положим ${}^lD_n = {}^lE_n(0) + \sum_{\lambda \in {}^lS \setminus 0} |\lambda|^{-1} \cdot {}^lE_n(\lambda)$, $l = 1, 2$, и $M = \pi_\varphi(\mathfrak{S}_\infty)''$. Отображение $x \ni M_+ \xrightarrow{{}^lw_n} \langle {}^lD_n x \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle$ определяет полуконечный нормальный вес на M . Если lS — конечное множество, то lw_n расширяется до нормального положительного функционала на M .

Лемма 15. Пусть u — частичная изометрия из $\mathfrak{A}_n$ и $u^2 = 0$. Предположим, что $n \in {}^l\mathbb{X}$ и существуют $\alpha, \beta \in {}^lS \setminus 0$, для которых ${}^lE_n(\alpha) \cdot u \cdot {}^lE_n(\beta) = u$. Тогда ${}^lw_n(u) = 0$.

Доказательство. Положим $e^{(\alpha)} = uu^*$, $u_k = \pi_\varphi((n \ k))u\pi_\varphi((n \ k))$. Так как $e_\alpha \leq {}^lE_n(\alpha)$, а φ есть $\mathfrak{S}_\Pi$ -инвариантное состояние, то при $k \in {}^l\mathbb{X}$ имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \langle u\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle e^{(\alpha)} \cdot {}^l\mathcal{O}_n \cdot u\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \stackrel{k \in {}^l\mathbb{X}}{=} \frac{1}{\alpha} \langle e^{(\alpha)} \cdot \pi_\varphi((k \ n)) \cdot u\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ &= \frac{1}{\alpha} \langle e^{(\alpha)} \cdot u_k \cdot \pi_\varphi((k \ n))\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \stackrel{k \neq n}{=} \frac{1}{\alpha} \langle u_k \cdot e^{(\alpha)} \cdot \pi_\varphi((k \ n))\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ &= \frac{1}{\alpha} \langle u_k \cdot \pi_\varphi((k \ n)) \cdot e_k^{(\alpha)}\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle u_k \cdot {}^l\mathcal{O}_k \cdot e_k^{(\alpha)}\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle \\ &= \langle u_k \cdot e_k^{(\alpha)}\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle = \langle u \cdot e^{(\alpha)}\xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Так как $u^2 = 0$, то $u \cdot e^{(\alpha)} = 0$. Следовательно, $\varphi(u) = 0$. Отсюда, учитывая условия леммы и определение lw_n , получаем, что ${}^lw_n(u) = 0$. $\square$

Из лемм 12, 13 и 15, используя КМШ-условие, получаем

Предложение 16. При $n \in {}^l\mathbb{X}$ сужение веса lw_n на $\mathfrak{A}_n$ является нормальным полуконечным следом¹⁾ τ_n и для любого ненулевого проектора $p \in \mathcal{P}_n \mathfrak{A}_n \mathcal{P}_n$ значение $\tau_n(p)$ принадлежит $\mathbb{N} \cup \infty$.

Замечание 5. Положим $\theta_s(a) = \pi_\varphi(s)a\pi_\varphi(s^{-1})$, $a \in \pi_\varphi(\mathfrak{S}_\infty)$. По весу w определим вес ${}_s w$ согласно формуле ${}_s w(a) = w(\theta_{s^{-1}}(a))$. В силу леммы 9 отображение $a \ni \mathfrak{A}_n \mapsto \theta_s(a) \in \mathfrak{A}_{s(n)}$ является изоморфизмом алгебр $\mathfrak{A}_n$ и $\mathfrak{A}_{s(n)}$, и при условии $s(n) = t(n) = m$ сужения весов ${}_s w$ и ${}_t w$ на $\mathfrak{A}_m$ совпадают. Отсюда, опираясь на предложение 16, получаем, что вес ${}_m \tau_n$ на $\mathfrak{A}_n$, определяемый формулой ${}_m \tau_n(a) = \tau_m(\theta_s(a))$, где $a \in \mathfrak{A}_n$, $s(n) = m$, является полуконечным следом на $\mathfrak{A}_n$. В частности, ${}_n \tau_n = \tau_n$.

Теорема 17. При каждом $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ следы τ_n и ${}_m \tau_n$ совпадают для всех $m \in \mathbb{X}$.

Доказательство. Мы будем использовать технику, развитую в [3] при доказательстве теоремы 2. Если n, m принадлежат одному множеству разбиения $\Pi = ({}^1\mathbb{X}, {}^2\mathbb{X})$, то утверждение теоремы содержится в замечании 5.

¹⁾Вес w на w^* -алгебре M называется следом, если $w(x^*x) = w(xx^*)$ для всех $x \in M$.

Предположим, что $n \in {}^1\mathbb{X}$, а $m \in {}^2\mathbb{X}$.

Из леммы 11(a), используя определение веса ${}_m\tau_n$ (см. замечание 4 и предложение 16), получаем ${}_m\tau_1({}^lE_n(0)) = \tau_1({}^lE_n(0))$. Следовательно, в силу предложения 14(iii) достаточно доказать, что τ_n и ${}_m\tau_n$ совпадают на $\mathcal{P}_n\mathfrak{A}_n\mathcal{P}_n$.

Пусть p — минимальный проектор из $\mathcal{P}_n\mathfrak{A}_n\mathcal{P}_n$. В силу леммы 11 существуют проекторы ${}^1E_n(\alpha)$, ${}^2E_n(\beta)$ со свойствами

$${}^1E_n(\alpha) \cdot p \cdot {}^1E_n(\alpha) = {}^1c \cdot {}^1p \neq 0, \quad {}^2E_n(\beta) \cdot p \cdot {}^2E_n(\beta) = {}^2c \cdot {}^2p \neq 0,$$

где 1p , 2p — минимальные проекторы, ${}^1c, {}^2c \in \mathbb{C}$, а $\alpha\beta > 0$.

Отсюда получаем, что существует частичная изометрия $u \in \mathfrak{A}_n$ со свойствами

$$uu^* = {}^1p, \quad u^*u = {}^2p, \quad \text{в частности, } {}_m\tau_1(p) = {}_m\tau_1({}^1p) = {}_m\tau_1({}^2p) \text{ для всех } m \in \mathbb{X}. \quad (5.3)$$

Для $a \in \mathfrak{A}_n$ положим $a^{(m)} = \pi_\varphi((n \ m))a\pi_\varphi((n \ m))$. Из определения веса ${}_m\tau_n$ и леммы 13 имеем

$$\tau_1({}^1p) = {}^1\nu({}^1p), \quad {}_m\tau_n({}^2p) = {}^2\nu({}^2p^{(m)}). \quad (5.4)$$

Теперь дадим интерпретацию чисел ${}^1\nu({}^1p)$ и ${}^2\nu({}^2p^{(m)})$, из которой будет следовать их равенство. Пусть $\mathbb{S}$ — подмножество в $\mathbb{X}$. Положим $\mathfrak{S}_\mathbb{S} = \{s \in \mathfrak{S}_\infty : \text{supp } s \subset \mathbb{S}\}$, $\text{Alt}(\mathbb{S}) = \frac{1}{|\mathbb{S}|!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{S}} \text{sign } s \cdot \pi_\varphi(s)$, $\text{Sym}(\mathbb{S}) = \frac{1}{|\mathbb{S}|!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_\mathbb{S}} \pi_\varphi(s)$ и $p^{(\mathbb{S})} = \prod_{k \in \mathbb{S}} p^{(k)}$. Так как при $k \neq l$ алгебра $\mathfrak{A}_l$ принадлежит $\mathfrak{A}'_k$, то для любого $a \in \mathfrak{A}_n$ оператор $a^{(\mathbb{S})}$ лежит в $\pi(\mathfrak{S}_\mathbb{S})'$. Следовательно, если a — проектор, то $\text{Alt}(\mathbb{S}) \cdot a^{(\mathbb{S})}$ и $\text{Sym}(\mathbb{S}) \cdot a^{(\mathbb{S})}$ также являются проекторами из $\pi(\mathfrak{S}_\mathbb{S})'$.

Пусть ${}^1\mathbb{S} \subset {}^1\mathbb{X}$, ${}^2\mathbb{S} \subset {}^2\mathbb{X}$, $n \in {}^1\mathbb{S}$, $m \in {}^2\mathbb{S}$. Если $\alpha, \beta > 0$, то в силу формулы (2.3) из [3] имеем

$$\begin{aligned} \langle \text{Alt}({}^1\mathbb{S}) \cdot {}^1p^{({}^1\mathbb{S})} \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle &= \frac{\alpha^{|\mathbb{S}|}}{|{}^1\mathbb{S}|!} {}^1\nu({}^1p)({}^1\nu({}^1p) - 1) \cdots ({}^1\nu({}^1p) - |{}^1\mathbb{S}| + 1) \geq 0, \\ \langle \text{Alt}({}^2\mathbb{S}) \cdot {}^2p^{({}^2\mathbb{S})} \xi_\varphi, \xi_\varphi \rangle &= \frac{\alpha^{|\mathbb{S}|}}{|{}^2\mathbb{S}|!} {}^2\nu({}^2p^{(m)})({}^2\nu({}^2p^{(m)}) - 1) \cdots ({}^2\nu({}^2p^{(m)}) - |{}^2\mathbb{S}| + 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая то, что $\text{Alt}({}^l\mathbb{S}) \cdot {}^lp^{({}^l\mathbb{S})}$ — проектор, а ξ_φ — бициклический вектор, получаем

$${}^l\nu({}^lp) = \min_{l\mathbb{S} \subset l\mathbb{X}} \{ |{}^l\mathbb{S}| - 1 : \text{Alt}({}^l\mathbb{S}) \cdot {}^lp^{({}^l\mathbb{S})} = 0 \}.$$

Это равенство и вытекающая при $|{}^1\mathbb{S}| = |{}^2\mathbb{S}|$ из (5.3) эквивалентность проекторов $\text{Alt}({}^1\mathbb{S}) \cdot {}^1p^{({}^1\mathbb{S})}$ и $\text{Alt}({}^2\mathbb{S}) \cdot {}^2p^{({}^2\mathbb{S})}$ дает равенство ${}^1\nu({}^1p) = {}^2\nu({}^2p)$. Отсюда, опираясь на (5.3) и (5.4), получаем, что $\tau_1(p) = {}_m\tau_1(p)$. При рассмотрении случая $\alpha, \beta < 0$ вместо $\text{Alt}(\mathbb{S})$ используется оператор $\text{Sym}(\mathbb{S})$. $\square$

5.6. Доказательство теоремы 6. В силу предложений 14, 16 и теоремы 17 будем считать, что $\mathfrak{A}_n$ является подалгеброй фактора $\tilde{\mathcal{B}}$ типа I_m с точным нормальным следом Tr , который на минимальных проекторах равен единице, а сужение Tr на $\mathcal{P}_n\mathfrak{A}_n\mathcal{P}_n$ совпадает с τ_n . Учитывая предложение 14(iii) и формулу для φ из разд. 5.2, мы будем также предполагать, что для $n \in {}^l\mathbb{X}$ при условии ${}^lE_n(0) \neq 0$

$$\text{Tr}({}^lE_n(0)) = \infty. \quad (5.5)$$

Положим ${}^l\mathcal{A} = |{}^l\mathcal{O}_n|$, $l = 1, 2$, $\tilde{P} = \mathcal{P}_n^-$ (см. предложение 14) и $E_n(0) = {}^1E_n(0) = {}^2E_n(0)$ (см. лемму 11(a)). Пусть $\mathcal{B} = (I - E_n(0)) \cdot \tilde{\mathcal{B}} \cdot (I - E_n(0))$, ${}^lA = (I - E_n(0)) \cdot {}^l\mathcal{A} \cdot (I - E_n(0))$, $l = 1, 2$, и $P = (I - E_n(0)) \cdot \tilde{P} \cdot (I - E_n(0))$. Теперь, согласно конструкции из §4, по набору данных 1A , 2A , P построим представление $\mathfrak{L}$. Опираясь на предложение 7, получаем, что φ из разд. 5.2 вычисляется согласно определению 1, где $J = I - 2P$. $\square$

§6. КМШ-условие и асимптотическая абелевость

В теории W^* -алгебр хорошо известно свойство асимптотической абелевости фактора M относительно группы G его автоморфизмов. А именно, алгебра M называется G -асимптотически абелевой, если существует последовательность $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset G$, для которой в сильной операторной топологии

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (g_k(a)b - bg_k(a)) = 0 \quad \text{при всех } a, b \in M.$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 18. Пусть $\varphi \in \mathfrak{F}_\Pi^+$ — факторное состояние, $M = \pi_\varphi(\mathfrak{S}_\mathbb{X})''$ и $\text{Ad } s$ — внутренний автоморфизм фактора M , определяемый соотношением

$$\text{Ad } s(\pi_\varphi(t)) = \pi_\varphi(sts^{-1}), \quad t \in \mathfrak{S}_\mathbb{X}.$$

Фактор M тогда и только тогда асимптотически абелев относительно группы $\text{Ad } \mathfrak{S}_\Pi$, когда φ является КМШ-состоянием.

В частности, из [5] вытекает, что представления, отвечающие КМШ-состояниям, не могут быть типа Π_∞ и Π_0 по классификации фон Неймана–Конна.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ф. А. Березин, *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*, Изд-во МГУ, М., 1983.
- [2] А. Ю. Окуньков, *Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы*, Функц. анализ и его прил., **28**:2 (1994), 31–40.
- [3] А. Ю. Окуньков, *О представлениях бесконечной симметрической группы*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **240** (1997), 166–228.
- [4] Г. И. Ольшанский, *Унитарные представления (G, K) -пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$* , Алгебра и анализ, **1**:4 (1989), 178–209.
- [5] В. Я. Голодец, *Модулярные операторы и асимптотическая коммутативность в алгебрах фон Неймана*, УМН, **33**:1(199) (1978), 43–94.
- [6] S. Stratila, D. Voiculescu, *On a class of KMS states for the unitary group $U(\infty)$* , Math. Ann., **235**:1 (1978), 87–110.
- [7] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras*, v. II, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [8] E. Thoma, *Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen symmetrischen Gruppe*, Math. Z., **85**:1 (1964), 40–61.
- [9] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы*, Функц. анализ и его прил., **15**:4 (1981), 15–27.
- [10] Н. И. Нессонов, *КМШ-состояния на группе $GL(\infty)$ и допустимые представления $GL(\infty)^X$* , Труды С.-Петербургского МО, **10** (2004), 109–165.