Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Сова, Кольцо Дирихле и безусловные базисы в $L_2[0, 2\pi]$, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 3, 75–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3113>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 14:19:58

Кольцо Дирихле и безусловные базисы в $L_2[0, 2\pi]$

© 2013. А. СОВА*

Установлено, что кольцо Дирихле допускает представление в бесконечномерной алгебре матриц. Полученные матрицы применяются для построения неортогональных базисов Рисса в сепарабельном гильбертовом пространстве. В таких рамках можно в изобилии строить базисы с интересными свойствами по индивидуальным требованиям. Замечательным образом оказывается, что представление сигналов в любом из этих базисов может быть реализовано численно с помощью быстрых алгоритмов.

В статье обсуждается интересное соответствие между кольцом Дирихле и некоторым классом операторов в гильбертовом пространстве. Устанавливаются также условия, при которых операторы этого специального типа являются линейными гомеоморфизмами. Линейный гомеоморфизм переводит любой ортонормированный базис в базис Рисса, который всегда безусловен¹⁾; см., например, [7] или [15].

Основные результаты таковы: теорема 1 характеризует представление рядов Дирихле бесконечными треугольными матрицами. Матрица, полученная таким образом из ряда Дирихле, определяет оператор в гильбертовом пространстве. Теорема 2 дает достаточные условия (на ряд Дирихле и его обратный), при которых этот оператор является линейным гомеоморфизмом, а также двусторонние оценки для получающихся базисов Рисса. Наконец, теорема 3 в явном виде описывает некоторый класс рядов Дирихле, удовлетворяющих использованному в теореме 2 условию. Отметим редкое отличительное свойство построенных здесь базисов: дискретизированные преобразования замены базиса могут быть численно реализованы с помощью быстрого алгоритма сложности $O(N \log N)$ ([12], [13]).

Множество примеров *безусловных* базисов возникает при рассмотрении собственных функций линейных дифференциальных операторов (см., например, [11], [6]). Напротив, рассматриваемые в данной заметке безусловные базисы в некоторых случаях связаны с дифференциально-алгебраическими задачами на собственные значения, подобными изученной в [14]; мы останавливаемся на этом более подробно в заключительных замечаниях.

Связь между системами «растянутых» функций, аналогичными системе (2), и рядами Дирихле была подмечена еще в 1945 г. Бёрлингом [3]. Позднее обнаружилось, что свойство базисности Рисса для таких систем можно эквивалентным образом сформулировать в терминах подходящим образом определенных

* Автор выражает благодарность за поддержку Канадскому фонду инноваций (грант LOF # 22117).

¹⁾Поскольку все *ограниченные безусловные* базисы суть базисы Рисса, мы отныне будем свободно пользоваться как одним, так и другим термином.

множителей Дирихле [8]. В отличие от представленных здесь результатов, основанных на явных построениях, такой подход использует аналитические свойства заданных рядами Дирихле функций, которые обычно очень нелегко проверить.

1. Представление рядов Дирихле матрицами. Пусть $A(s)$ — формальный ряд Дирихле вида $A(s) = \sum a_n n^{-s}$ (сумма по $n = 1, 2, 3, \dots$), коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \dots$ которого — комплексные числа, а s — комплексная переменная. Хорошо известно, что множество формальных рядов Дирихле образует коммутативное кольцо относительно операций сложения и умножения, заданных формулами $\sum a_n n^{-s} + \sum b_n n^{-s} = \sum (a_n + b_n) n^{-s}$ и $(\sum a_n n^{-s}) \cdot (\sum b_n n^{-s}) = \sum c_n n^{-s}$; здесь $c_n = \sum_{kl=n} a_k b_l$, где k, l пробегает все натуральные числа, произведение которых равно n . Это кольцо мы называем *кольцом Дирихле*.

Построим бесконечную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_2 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_3 & \cdot & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_4 & a_2 & \cdot & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_6 & a_3 & a_2 & \cdot & \cdot & a_1 & \cdot & \cdot & \cdots \\ a_7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & \cdot & \cdots \\ a_8 & a_4 & \cdot & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (1)$$

Здесь точками « $\cdot$ » обозначены нулевые элементы. Первый столбец состоит из последовательных коэффициентов a_n . Во втором столбце элементы той же последовательности расставлены через строку, в третьем — через две и т.д. Для краткости мы используем обозначение

$$A = [(a_1, a_2, \dots)] \text{ или просто } A = [(a_n)].$$

Структура матрицы A напоминает решето Эратосфена. Заметим, что $I = [(1, 0, 0, \dots)]$. Для сравнения, матрица $Z = [(1, 1, 1, \dots)]$ соответствует ряду, задающему дзета-функцию Римана $\zeta(s) = \sum n^{-s}$. Число элементов a_k в n -й строке есть в точности число $d(n)$ делителей числа n . Следующее наблюдение является ключевым для наших рассуждений.

Теорема 1. Если

$$A(s) = \sum a_n n^{-s}, \quad B(s) = \sum b_n n^{-s},$$

то

$$A(s)B(s) = \sum c_n n^{-s} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad [(a_n)] \cdot [(b_n)] = [(c_n)].$$

Если, кроме того, $a_1 \neq 0$, то

$$\frac{1}{A(s)} = \sum d_n n^{-s} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad [(a_n)]^{-1} = [(d_n)].$$

Доказательство. Обе эквивалентности проверяются прямой выкладкой. Коэффициенты произведения $A(s)B(s)$ даются формулой $c_n = \sum_{k|n} a_k b_{n/k}$. Далее, у $A(s)$ имеется обратный тогда и только тогда, когда $a_1 \neq 0$. В таком случае

коэффициенты (d_n) ряда $A(s)^{-1}$ удовлетворяют соотношению $\sum_{k|n} a_k d_{n/k} = \delta_{n,0}$. $\square$

Замечание 1. Предложенное отождествление ряда Дирихле с матрицей — не единственный способ добиться такого результата. В качестве другого варианта можно положить $A = [(a_1, a_2 2^{-s}, a_3 3^{-s}, \dots)]$, где s — переменная или фиксированное число. Выбор $s = 0$ упрощает формулы. Можно также использовать матрицы, транспонированные к указанным выше, чтобы получить альтернативное (двойственное) представление кольца Дирихле.

Замечание 2. Отметим также, что конечные вычисления с матрицами, усеченными до левой верхней подматрицы размера $N \times N$, дают в этом интервале точные результаты. Поскольку в n -й строке имеется $d(n)$ нетривиальных коэффициентов, требуется $d(1) + \dots + d(N) = O(N \log N)$ нетривиальных сложений и умножений, чтобы вычислить значение матрицы на векторе¹⁾. На самом деле это можно сделать, используя алгоритм, исключаящий необходимость хранить тривиальные и избыточные элементы матрицы [13].

Построение базисов в $L_2[0, 2\pi]$. Пусть $e_n = e^{int}/\sqrt{2\pi}$, так что $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2[0, 2\pi]$. Далее, пусть $L^2[0, 2\pi] = H_a \oplus H_h$ — разложение пространства $L^2[0, 2\pi]$ в прямую сумму двух подпространств, отвечающих неположительным и положительным частотам соответственно. В подпространстве H_h рассмотрим семейство функций, определяемых суммируемой с квадратом последовательностью комплексных чисел $(\alpha_l)_{l=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$f_m(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l \frac{e^{imlt}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l e_{ml}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Обратим внимание на масштабирование $f_m(t) = f_1(mt)$. Кроме того, у всех f_m одна и та же норма, $\|f_m\| = (\sum |\alpha_l|^2)^{1/2} < \infty$. На протяжении всей статьи нам будет нужна только сходимости по норме. Заметим, однако, что в силу теоремы Карлесона [4] ряд для f_m сходится почти всюду.

Нам хотелось бы понять основные свойства системы $\{f_m\}_{m=1}^{\infty} \subset H_h$ как возможного базиса. Используя (2), вычислим

$$\phi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m f_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k|n} \alpha_k x_{n/k} e_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n.$$

Таким образом, коэффициенты Фурье y_n связаны с x_m формулой

$$[y_1, y_2, \dots]' = T[x_1, x_2, \dots]', \quad T = [(\alpha_n)], \quad (3)$$

где «штрих» обозначает транспонирование. По теореме 1

$$T^{-1} = [(\gamma_n)] = [(\alpha_n)]^{-1},$$

где (γ_n) — последовательность, обратная по Дирихле к (α_n) .

¹⁾Известны гораздо более точные оценки для суммы числа делителей; см., например, [1] или [5]. Впервые оценки такого типа были получены Дирихле в первой половине XIX века.

Далее, определим $g_n(t)$ как функцию, коэффициенты Фурье которой суть числа, комплексно-сопряженные к элементам n -й строки матрицы T^{-1} , т. е.

$$g_n(t) = \sum_{k|n} \bar{\gamma}_{n/k} e_k,$$

или, что то же самое, $g_n = (T^*)^{-1} e_n$. Сразу ясно, что

$$\langle f_m | g_n \rangle = \delta_{m,n}. \quad (4)$$

Заметим, что $g_n \in H_h$ — тригонометрические многочлены.

Обратимся теперь к анализу и укажем необходимое условие для того, чтобы отображение T было гомеоморфизмом:

Теорема 2. *Если и последовательность (α_l) , и ее обратная по Дирихле (γ_l) абсолютно суммируемы (т. е. лежат в l_1), то справедливы следующие утверждения.*

А. Отображение T , определенное в (3), — линейный гомеоморфизм. В частности, система $\{f_m\}$, заданная формулой (2), является базисом Рисса в H_h . Биортогональная система $\{g_n\}$ — также базис Рисса. Более того, для произвольного элемента $\phi \in H_h$ имеет место представление

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi | g_n \rangle f_n. \quad (5)$$

В. Пусть $A = (\sum_l |\alpha_l|)^{-2}$, $B = (\sum_l |\gamma_l|)^2$. Тогда для произвольного элемента $\phi \in H_h$ выполнена двусторонняя оценка

$$A \|\phi\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \phi | g_n \rangle|^2 \leq B \|\phi\|^2. \quad (6)$$

Доказательство. А. Хорошо известно, что если для действующего в гильбертовом пространстве оператора l_1 -нормы всех столбцов и строк его матрицы в некотором ортонормированном базисе равномерно ограничены, то оператор ограничен (доказательство см. в [9, пример 2.3 гл. III]). Заметим, что l_1 -норма каждого столбца матрицы T равна $M = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$, а l_1 -норма каждой ее строки заведомо ограничена сверху числом M . Таким образом, оператор T непрерывен. Аналогично, из условия $(\gamma_l) \in l_1$ вытекает, что оператор T^{-1} непрерывен. Итак, T — линейный гомеоморфизм. Так как $f_m = T e_m$, то $\{f_m\}$ — базис Рисса. Поэтому любую функцию $\phi \in H_h$ можно единственным образом представить в виде $\phi = \sum_{m=1}^{\infty} x_m f_m$. Из формулы (4) следует, что $x_n = \langle \phi | g_n \rangle$, что доказывает соотношение (5). Хорошо известно также, что базис, биортогональный к базису Рисса, автоматически является базисом Рисса (см., например, [7, гл. VI]).

В. Для краткости положим $x_n = \langle \phi | g_n \rangle$ и $y_k = \langle \phi | e_k \rangle$, так что $\sum |y_k|^2 = \|\phi\|^2$. Тогда

$$\left| \sum_{k|n} \gamma_{n/k} y_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k|n} |\gamma_{n/k}|^{1/2} |\gamma_{n/k}|^{1/2} |y_k| \right)^2 \leq \left(\sum_{k|n} |\gamma_{n/k}| \right) \sum_{k|n} |\gamma_{n/k}| |y_k|^2$$

и, тем более,

$$\left| \sum_{k|n} \gamma_{n/k} y_k \right|^2 \leq \sum_l |\gamma_l| \sum_{k|n} |\gamma_{n/k}| |y_k|^2.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_n |x_n|^2 = \sum_n \left| \sum_{k|n} \gamma_{n/k} y_k \right|^2 \leq \sum_l |\gamma_l| \sum_n \sum_{k|n} |\gamma_{n/k}| |y_k|^2.$$

Перегруппировка слагаемых $\sum_n \sum_{k|n} |\gamma_{n/k}| |y_k|^2 = \sum_l |\gamma_l| \sum_n |y_n|^2$ в последней двойной сумме приводит к соотношению

$$\sum_n |x_n|^2 \leq \left(\sum_l |\gamma_l| \right)^2 \sum_n |y_n|^2,$$

т. е. к правому неравенству в формуле (6). Левое неравенство получается, если в приведенных выше оценках поменять x_n и y_n ролями и заменить γ_n на α_n . $\square$

Замечание 1. Хорошо известны примеры *условных* базисов (см., например, [2], [10]).

Замечание 2. Как отмечено выше, вычисление значения матрицы (1) размера $N \times N$ на векторе требует выполнения $O(N \log N)$ нетривиальных умножений и сложений. В сочетании с быстрым преобразованием Фурье это дает быстрый и эффективный алгоритм сложности $O(N \log N)$ для представления векторов в базисах $\{f_m\}$ типа (2). Одной из областей применения такого алгоритма является анализ электронных сигналов [12].

По-видимому, не известно ни одного универсального критерия, который бы характеризовал последовательности из l_1 , для которых обратная по Дирихле последовательность также лежит в l_1 . Теорема 3 ниже дает некоторое достаточное условие. Она основана на следующем наблюдении.

Лемма. Для любой положительной постоянной $c \leq 1/(2 \cdot 3^{4/3} + 3^{2/3}) \simeq 0,0932$ и любого $n \geq 2$ выполнено неравенство

$$\sum_{d|n, d \geq 2} c^d d^2 \leq \frac{c}{2}.$$

Доказательство. Пусть $a = 3^{3/2} \simeq 2,081$. Легко видеть, что $d^2 \leq a^d$ для всех целых $d \geq 2$. При $0 < c < 1/a$ имеем

$$\sum_{d|n, d \geq 2} c^d d^2 \leq \sum_{d|n, d \geq 2} c^d a^d \leq (ac)^2 [1 + (ac) + (ac)^2 + \dots] = \frac{(ac)^2}{1 - ac}.$$

Заметим, что правая часть не превосходит $c/2$ при $c \leq 1/(2a^2 + a)$. $\square$

Теорема 3. Пусть $|\alpha_1| \geq c/2$ и $|\alpha_n| \leq c^n$ при $n \geq 2$ с некоторой постоянной $c \leq 1/(2 \cdot 3^{4/3} + 3^{2/3})$. Тогда

$$\sum_l |\alpha_l| < \infty, \quad \sum_l |\gamma_l| < \infty,$$

где (γ_n) — последовательность, обратная по Дирихле к последовательности (α_n) .

Доказательство. Поскольку по условию теоремы модули $|\alpha_n|$ экспоненциально убывают, последовательность суммируема. Чтобы доказать, что последовательность (γ_n) также абсолютно суммируема, воспользуемся рекуррентной формулой для обратной по Дирихле последовательности (см., например, [1, теорема 2.8]). А именно, $\gamma_1 = 1/\alpha_1$ и

$$\gamma_n = -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{d|n, d>1} \alpha_d \gamma_{n/d} \quad (n \geq 2). \quad (7)$$

Докажем по индукции, что

$$|\gamma_k| \leq \frac{2}{c} \frac{1}{k^2} \quad \text{для всех } k. \quad (8)$$

Так как $\gamma_1 = 1/|\alpha_1|$, то это неравенство выполнено при $k = 1$. Предполагая, что оно выполнено для всех $k = 1, \dots, n-1$, получим из (7) и леммы 1, что

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq \frac{2}{c} \sum_{d|n, d>1} c^d |\gamma_{n/d}| \leq \frac{2}{c} \sum_{d|n, d>1} c^d \frac{2}{c} \left(\frac{d}{n}\right)^2 \\ &= \frac{4}{c^2} \frac{1}{n^2} \sum_{d|n, d>1} c^d d^2 \leq \frac{4}{c^2} \frac{c}{2} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{c} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Тем самым (8) доказано. Значит, $\sum_l |\gamma_l| < \frac{2}{c} \sum_l \frac{1}{l^2} < \infty$. $\square$

Замечание 3. Интересно было бы выяснить, действительно ли γ_n обязаны убывать экспоненциально. Хотя ответ и неизвестен, численные эксперименты подсказывают, что он должен быть отрицательным.

Замечание 4. Частный случай базисов типа, рассматриваемого в данной работе, возникает в нелинейных задачах на собственные значения. Как показано в [14], уравнение

$$\mu y''(t) = y(t) - \frac{1}{y(t)}, \quad t \in [0, 2\pi) \simeq S^1,$$

допускает решение вида $y = 1 + f(t)$, где $f \in H_h$, тогда и только тогда, когда $\mu = \mu_m = -2/m^2$ ($m = 1, 2, \dots$). Соответствующие собственные функции имеют вид

$$y_m(t) = 1 + f_m(t) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_l e^{imlt},$$

где коэффициенты α_n определяются рекуррентными формулами

$$\alpha_1 = a, \quad \alpha_l = -\frac{1}{2(l^2 - 1)} \sum_{r=1}^{l-1} \alpha_{l-r} \alpha_r (2r^2 - 1), \quad l \geq 2.$$

Здесь a — свободный (вещественный) параметр. Легко видеть, что коэффициенты α_l ведут себя как a^l и для достаточно малых a удовлетворяют условия теоремы 3. Поэтому для подходящим образом выбранного параметра a последовательность $\{f_m\}$ является базисом Рисса в H_h .

Благодарности. Я хотел бы поблагодарить доктора М. Чугунову за интересную дискуссию в ходе выполнения этой работы. Я также благодарен рецензентам, указавшим на многочисленные способы улучшить эту статью. В частности, один из них обнаружил дыру в доказательстве и предложил заделать ее кратким рассуждением, из которого выросла часть А теоремы 2. Так что заслугу установления этой теоремы я должен разделить с упомянутым рецензентом. Я в долгу и перед другим рецензентом, который предложил улучшения в некоторых оценках, а также в теореме 3.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.
- [2] К. И. Бабенко, *О сопряженных функциях*, Докл. АН СССР, **62**:2 (1948), 157–160.
- [3] A. Beurling, *The Collected Works of Arno Beurling*, in: Harmonic Analysis, Contemp. Math., vol. **2**, Birkhäuser, Boston, 1989, 378–380.
- [4] L. Carleson, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math., **116** (1966), 135–157.
- [5] K. Chandrasekharan, *Arithmetical Functions*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1970.
- [6] P. Djakov, B. Mityagin, *Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators*, Math. Nachr., **283** (2010), 443–462.
- [7] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [8] H. Hedenmalm, P. Lindqvist, K. Seip, *A Hilbert Space of Dirichlet Series and Systems of Dilated Functions in $L^2(0, 1)$* , Duke Math. J., **86** (1997), 1–37.
- [9] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [10] А. М. Олевский, *Об операторах, производящих условные базисы в гильбертовом пространстве*, Матем. заметки, **12**:1 (1972), 73–84.
- [11] А. А. Шкаликов, *О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора*, УМН, **34**:5(209) (1979), 235–236.
- [12] A. Sowa, *A fast-transform basis with hysteretic features*, in: IEEE Conference Proceedings: Electrical and Computer Engineering (CCECE), 2011 24th Canadian Conference on, 8–11 May 2011, 000253–000257.
- [13] A. Sowa, *Factorizing matrices by Dirichlet multiplication*, Linear Algebra Appl., **438**:5 (2013), 2385–2393.
- [14] A. Sowa, *On an eigenvalue problem with a reciprocal-linear term*, Waves in Random and Complex Media, **22** (2012), 186–206.
- [15] R. M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York–London–Toronto, 1980.