Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, Д. М. Столяров, Пространства гладких функций, порожденные неоднородными дифференциальными выражениями, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 2, 89–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 07:23:22

- [6] Y. Derriennic, in: Conference on Random Walks (Kleebach, 1979), *Astérisque*, vol. 74, Soc. Math. France, Paris, 1980, 183–201, 4. [7] A. Erschler, in: Random walks, boundaries and spectra. Proceedings of the workshop on boundaries, Graz, Austria, June 29–July 3, 2009 and the Alp-workshop, Sankt Kathrein, Austria, July 4–5, 2009, *Progress in Probability*, vol. 64 (eds. Lenz, Daniel et al.), Birkhäuser, Basel, 2011, 55–64. [8] H. Furstenberg, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 377–428. [9] *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern*, 1988, *Progress in Mathematics*, vol. 83 (eds. É. Ghys, P. de la Harpe), Birkhäuser, Boston, MA, 1990. [10] M. Gromov, Hyperbolic groups, in: *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer-Verlag, New York, 1987, 75–263. [11] V. A. Kaimanovich, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **318**:1 (1994), 59–64. [12] V. A. Kaimanovich, *Ann. of Math.* (2), **152**:3 (2000), 659–692. [13] V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik, *Ann. Probab.*, **11**:3 (1983), 457–490. [14] F. Ledrappier, in: *Topics in probability and Lie groups: boundary theory*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 28, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 117–152. [15] F. Ledrappier, <http://arxiv.org/abs/1110.3156>. [16] F. Ledrappier, *Groups Geom. Dyn.*, **6**:2 (2012), 317–333. [17] P. Mathieu, <http://arxiv.org/abs/1209.2020>. [18] J. Mairesse, F. Mathéus, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **75**:1 (2007), 47–66.

Department of Mathematics and Statistics,
University of Ottawa
e-mail: vkaimano@uottawa.ca

C.N.R.S., Département de Mathématiques,
Université Paris Sud, Orsay, France
e-mail: anna.erschler@math.u-psud.fr

Поступило в редакцию
2 июля 2012 г.

УДК 517.982

Пространства гладких функций, порожденные неоднородными дифференциальными выражениями*

© 2013. С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, Д. М. Столяров

Пространства непрерывно дифференцируемых функций на многообразиях размерности по крайней мере 2 (здесь мы ограничимся торами) в невырожденных случаях не изоморфны пространству $C(K)$ ни для какого компакта K (по теореме Милютина то же самое можно выразить, сказав «не изоморфны пространству $C[0, 1]$ »). Смысл этого высказывания уточнялся постепенно, история вопроса была подробно изложена в [3]. Мы обратимся сразу к общей ситуации, описанной в [3]. Пусть $T = (T_1, \dots, T_l)$ — набор дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на торе $\mathbb{T}^n$. (Частная производная ∂_k на торе — это оператор $g \mapsto \frac{\partial}{\partial t} g(e^{2\pi i t})$, $t \in \mathbb{R}$, применяемый по k -й переменной.) На множестве тригонометрических полиномов от n переменных введем полунорму $\|f\|_T = \max_{1 \leq j \leq l} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^n)}$. После факторизации по ядру и пополнения получаем пространство $C^T(\mathbb{T}^n)$.

Если набор T состоит из всех дифференциальных мономов порядка не выше s , возникает обычное пространство $C^{(s)}(\mathbb{T}^n)$, которое действительно не вкладывается дополняемо в $C[0, 1]$ при $n \geq 2$ и $s \geq 1$, см., например, [2]. (Умест-

*Работа выполнена при поддержке Лаборатории Чебышева СПбГУ (грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0026) и РФФИ (грант 11-01-00526).

но напомнить, что старая задача об изоморфной классификации пространств $C^{(s)}(\mathbb{T}^n)$ до сих пор не решена, неизвестно даже, изоморфны ли пространства $C^{(1)}(\mathbb{T}^2)$ и $C^{(1)}(\mathbb{T}^3)$.

Если T — произвольный конечный набор дифференциальных мономов, мы имеем дело с *анизотропным* пространством гладких функций. Тогда по-прежнему $C^T(\mathbb{T}^n)$ не вкладывается дополняемо в $C[0, 1]$, если среди мономов есть два, у которых мультииндексы максимальны и несравнимы относительно поординатного порядка (см. [6], [7]).

Пусть операторы набора T не обязательно сводятся к мономам и все имеют порядок не выше $s > 0$. Отбросим в каждом операторе T_j все дифференциальные мономы порядка строго меньше s , останется его *главная часть*. В [3], [4] было показано, что если среди главных частей есть хотя бы две непропорциональные, то пространство $C^T(\mathbb{T}^n)$ не вкладывается дополняемо в $C(K)$.

Заметим, что если все главные части пропорциональны одной из них, изоморфизма все равно может не быть — например, его нет для набора $(\partial_1, \partial_2^2)$ в случае двумерного тора (см. цитированное утверждение об анизотропных пространствах). Следующая теорема обобщает результаты работ [7], [6] и [3], [4].

Пусть Λ — гиперплоскость с уравнением $\sum_{k=1}^n x_k/a_k = 1$, $a_k > 0$. Предположим, что неравенство $\sum_{k=1}^n \alpha_k/a_k \leq 1$ выполняется для каждого дифференциального монома $\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, встречающегося хотя бы в одном операторе T_j , $j = 1, \dots, l$. В каждом операторе T_j выделим слагаемые, для которых неравенство обращается в равенство. Их сумма называется Λ -главной частью оператора T_j .

Теорема 1. Если хотя бы для одной гиперплоскости Λ среди всех Λ -главных частей операторов из набора T найдутся две непропорциональные, то пространство $C^T(\mathbb{T}^n)$ не вкладывается дополняемо в $C[0, 1]$.

Во всех цитированных статьях доказательство отсутствия изоморфизма основывалось на соболевских вложениях с предельным показателем (в размерности 2). Так происходит и в нашем случае, однако соответствующая теорема вложения нестандартна. Введем соболевское пространство с дробной гладкостью на двумерном торе $W_2^{\alpha, \beta}(\mathbb{T}^2) = \{f : (1 + m^2)^{\alpha/2} (1 + n^2)^{\beta/2} \hat{f}(m, n) \in l^2(\mathbb{Z}^2)\}$. Распределение f на торе $\mathbb{T}^2$ назовем правильным, если $\hat{f}(s, t) = 0$, как только $s = 0$ или $t = 0$, $s, t \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. Пусть k и l — натуральные числа, одно из которых нечетно, а правильные распределения $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ на двумерном торе удовлетворяют системе уравнений

$$-\partial_1^k \varphi_1 = \mu_0, \quad \partial_2^l \varphi_j - \partial_1^k \varphi_{j+1} = \mu_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad \partial_2^l \varphi_N = \mu_N, \quad (1)$$

где $\mu_0, \dots, \mu_N$ — меры. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \|\varphi_j\|_{W_2^{\alpha, \beta}(\mathbb{T}^2)} \leq C \sum_{j=0}^N \|\mu_j\| \quad (2)$$

при $\alpha = (k-1)/2$, $\beta = (l-1)/2$. Под нормой меры понимается ее полная вариация.

Аналогичное утверждение верно и для плоскости.

Теорема 3. Пусть φ_j , $j = 1, \dots, N$, — распределения с компактным носителем на плоскости $\mathbb{R}^2$. Предположим, что они удовлетворяют системе (1),

где $\mu_0, \dots, \mu_N$ — конечные меры с компактным носителем. Тогда верен аналог оценки (2), если соболевское пространство на плоскости понимать так: $W_2^{\alpha, \beta}(\mathbb{R}^2) = \{f : |\xi|^\alpha |\eta|^\beta \hat{f}(\xi, \eta) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$.

Взятые вместе, теоремы 2 и 3 составляют второй основной результат работы. Они отличаются от классических теорем вложения тем, что условие быть мерой наложено на линейные комбинации производных разных порядков от различных функций, а не на производные одной и той же функции. Для случая $k = l = 1$ обе теоремы были доказаны в работе [3]. При $k \neq l$ приходится действовать иным, более сложным образом. Если отвлечься от способа доказательства, то сами формулировки теорем 2 и 3 можно рассматривать как смесь теоремы вложения из [3] и хорошо известной теоремы вложения для анизотропных пространств Соболева, см. [8], [7].

Что произойдет, если условия теоремы 1 (для простоты считаем, что $n = 2$, поскольку теорема 1 сводится к этому случаю) нарушаются? Для анизотропных пространств тогда имеет место изоморфизм пространству $C[0, 1]$, см. [6], [7]. В общем случае ситуация не так проста (это отмечалось еще в [3]–[5]). Мы можем доказать, что при нарушении условий теоремы 1 изоморфизм пространству $C[0, 1]$ имеет место при некотором дополнительном требовании «эллиптичности». Мы не приводим точной формулировки. Вместо этого займемся примерами.

Прежде всего, рассмотрим пространство, порожденное двумя операторами $T_1 = \partial_1^2 + 2\partial_1\partial_2 + \partial_2^2$ и $T_2 = a\partial_1 + b\partial_2$, где a и b — комплексные числа. Непосредственно теорема 1 ничего не сообщает о нем. Кроме того, первый оператор не «эллиптический» (для однородного оператора — кстати, неважно, с обычной или смешанной однородностью — «эллиптичность» означает отсутствие вещественных нулей у характеристического полинома всюду, кроме координатных осей). Однако после замены переменных $\theta_1 = t_1 + t_2$, $\theta_2 = t_2$ операторы T_1 и T_2 превращаются соответственно в $(\partial/\partial t_2)^2$ и $(a - b)\partial/\partial t_1 + b\partial/\partial t_2$. Теперь, если $a \neq b$, применима теорема 1 о неизоморфизме (рассмотрим прямую, проходящую через точки $(1, 0)$ и $(0, 2)$). Если же $a = b$, то совсем легко усмотреть, что имеет место изоморфизм пространству $C(\mathbb{T}^2)$.

Следующий пример связан с теоремой Коэна об идемпотентах (см. монографию [1]). Ситуация обсуждалась в [5], мы не повторяем объяснений, а отметим только, что если набор T состоит из единственного оператора $2\pi i\partial_1 - \partial_2^2$ (или, например, оператора $(2\pi)^2\partial_1 + \partial_2^3$ с вещественными коэффициентами), то пространство $C^T(\mathbb{T}^2)$ не вкладывается дополняемо в $C[0, 1]$. Причина, впрочем, не имеет особого отношения к гладкой структуре.

Наконец, нам ничего не известно про случай набора из двух операторов $(\text{Id}, \partial_1 - \sqrt{2}\partial_2)$. Второй оператор не «эллиптический» (у характеристического полинома есть вещественные нули вне координатных осей). Иначе говоря, не помогает ни несформулированная теорема об изоморфизме, ни теорема 1. Линейно-рациональные замены переменных (как в первом примере) здесь тоже бесполезны.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] C. C. Graham, O. C. McGehee, *Essays in Commutative Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1979. [2] С. В. Кисляков, Функц. анализ и его прил., **9:4** (1975), 22–27. [3] С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, Зап. научн. сем. ПОМИ, **327** (2005), 78–97. [4] С. В. Кисляков, Д. В. Максимов, *Препринт ПОМИ* 6/2009. [5] Д. В. Максимов,

Зап. научн. сем. ПОМИ, **333** (2006), 62–65. [6] С. В. Кисляков, Н. Г. Сидоренко, Сибирск. матем. ж., **29**:3 (1988), 64–77. [7] A. Pelczyński, K. Senator, *Studia Math.*, **84**:2 (1986), 169–215. [8] В. А. Солонников, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27** (1972), 194–210.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
e-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
1 августа 2012 г.

С.-Петербургский Государственный
Политехнический Университет
e-mail: dimax239@bk.ru

Исследовательская лаборатория им. П. Л. Чебышева
СПбГУ, Санкт-Петербург
e-mail: dms239@mail.ru

УДК 517.98

Ординарные полускадады и их эргодические свойства

© 2013. А. В. Романов

Введение. В этой статье эргодические свойства дискретной динамической системы (Ω, φ) , порожденной непрерывным преобразованием метрического компакта Ω , формулируются в терминах трех ассоциированных с (Ω, φ) алгебро-топологических объектов. Речь идет об описанных в [1], [2] обволакивающей полугруппе Эллиса $E(\Omega, \varphi)$ и операторной обволакивающей полугруппе Кёлер $\Gamma(\Omega, \varphi)$, а также, о рассмотренной в предшествующей работе автора [3] и связанной с $\Gamma(\Omega, \varphi)$ операторной полугруппе $G(\Omega, \varphi)$. Помимо этого изучаются представляющие самостоятельный интерес зависимости между тремя данными полугруппами. Как показано в [3], топологические характеристики компактных в соответствующих топологиях полугрупп $E(\Omega, \varphi)$, $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $G(\Omega, \varphi)$ тесно связаны с эргодическими свойствами полускадады (Ω, φ) . Оказывается, подобного рода связи проявляются особенно ярко для класса дискретных динамических систем, обладающих метризуемой обволакивающей полугруппой $E(\Omega, \varphi)$ и называемых здесь ординарными. Ряд результатов о полугруппах Эллиса подобных систем (причем не только дискретных) можно найти в обзоре [4]. Известно, что ординарными оказываются все слабо почти периодические динамические системы.

Здесь предложено (теорема 4) альтернативное определение ординарности полускадады (Ω, φ) , состоящее в требовании метризуемости индуцированной полугруппы $G(\Omega, \varphi)$. Рассматривается также первоначально введенный Кёлер [2] и изученный в работах [4]–[6] класс так называемых ручных динамических систем (Ω, φ) . В разд. 2 представлена иерархическая сводка известных ранее и некоторых новых свойств полускадады (Ω, φ) , формулируемых большей частью в терминах полугрупп $E(\Omega, \varphi)$, $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $G(\Omega, \varphi)$.

В то же время главные результаты заметки относятся к слабой* сходимости операторных эргодических средних для ординарных и ручных полускададов. Сама идея рассмотрения подобной сходимости в эргодической теории восходит по существу к классической работе Крылова и Боголюбова [7].