Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Романов, Ординарные полукаскады и их эргодические свойства, *Функци. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 2, 92–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3115>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:18:53

Зап. научн. сем. ПОМИ, **333** (2006), 62–65. [6] С. В. Кисляков, Н. Г. Сидоренко, Сибирск. матем. ж., **29**:3 (1988), 64–77. [7] A. Pelczyński, K. Senator, *Studia Math.*, **84**:2 (1986), 169–215. [8] В. А. Солонников, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27** (1972), 194–210.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова
e-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило в редакцию
1 августа 2012 г.

С.-Петербургский Государственный
Политехнический Университет
e-mail: dimax239@bk.ru

Исследовательская лаборатория им. П. Л. Чебышева
СПбГУ, Санкт-Петербург
e-mail: dms239@mail.ru

УДК 517.98

Ординарные полускады и их эргодические свойства

© 2013. А. В. Романов

Введение. В этой статье эргодические свойства дискретной динамической системы (Ω, φ) , порожденной непрерывным преобразованием метрического компакта Ω , формулируются в терминах трех ассоциированных с (Ω, φ) алгебро-топологических объектов. Речь идет об описанных в [1], [2] обволакивающей полугруппе Эллиса $E(\Omega, \varphi)$ и операторной обволакивающей полугруппе Кёлер $\Gamma(\Omega, \varphi)$, а также, о рассмотренной в предшествующей работе автора [3] и связанной с $\Gamma(\Omega, \varphi)$ операторной полугруппе $G(\Omega, \varphi)$. Помимо этого изучаются представляющие самостоятельный интерес зависимости между тремя данными полугруппами. Как показано в [3], топологические характеристики компактных в соответствующих топологиях полугрупп $E(\Omega, \varphi)$, $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $G(\Omega, \varphi)$ тесно связаны с эргодическими свойствами полускада (Ω, φ) . Оказывается, подобного рода связи проявляются особенно ярко для класса дискретных динамических систем, обладающих метризуемой обволакивающей полугруппой $E(\Omega, \varphi)$ и называемых здесь ординарными. Ряд результатов о полугруппах Эллиса подобных систем (причем не только дискретных) можно найти в обзоре [4]. Известно, что ординарными оказываются все слабо почти периодические динамические системы.

Здесь предложено (теорема 4) альтернативное определение ординарности полускада (Ω, φ) , состоящее в требовании метризуемости индуцированной полугруппы $G(\Omega, \varphi)$. Рассматривается также первоначально введенный Кёлер [2] и изученный в работах [4]–[6] класс так называемых ручных динамических систем (Ω, φ) . В разд. 2 представлена иерархическая сводка известных ранее и некоторых новых свойств полускада (Ω, φ) , формулируемых большей частью в терминах полугрупп $E(\Omega, \varphi)$, $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $G(\Omega, \varphi)$.

В то же время главные результаты заметки относятся к слабой* сходимости операторных эргодических средних для ординарных и ручных полускадов. Сама идея рассмотрения подобной сходимости в эргодической теории восходит по существу к классической работе Крылова и Боголюбова [7].

1. Предварительные сведения. Пусть φ — непрерывное (не обязательно обратимое) преобразование метрического компакта Ω и (Ω, φ) — соответствующий полускад на Ω . Отображение $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega$ порождает линейные сдвиги U и $V = U^*$ в пространстве $X = C(\Omega)$ непрерывных скалярных функций на Ω и в сопряженном пространстве X^* борелевских мер на Ω . Обозначим через $\text{End } X^*$ нормированное пространство ограниченных линейных операторов в X^* . Обволакивающая полугруппа $E(\Omega, \varphi)$ полускада (Ω, φ) получается [1] замыканием семейства $\{\varphi^n, n \geq 0\}$ в отделимой топологии поточечной сходимости пространства всевозможных отображений $\Omega \rightarrow \Omega$. Заметим, что хотя в работе [1] рассматриваются обратимые динамические системы, большинство ее результатов справедливо также и в необратимом случае. Полугруппа $\Gamma(\Omega, \varphi)$ представляет собой [2] замыкание множества $\Gamma_0 = \{V^n, n \geq 0\}$ в слабой* операторной топологии W^*O пространства операторов $\text{End } X^*$. Полугруппа операторов $G(\Omega, \varphi)$ определяется [3] как W^*O -замкнутая выпуклая оболочка множества Γ_0 . Множества $E(\Omega, \varphi)$, $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $G(\Omega, \varphi)$ компактны в указанных топологиях. Если $A = A(\Omega)$ и $K = K(\Omega)$ — компактные в w^* -топологии пространства $X^* = C^*(\Omega)$ множества вероятностных борелевских мер и мер Дирака $\delta(\omega)$ на Ω , то полугруппу $G(\Omega, \varphi)$ можно интерпретировать как обволакивающую полугруппу действия $W \times A \xrightarrow{V} A$ абелевой полугруппы W неотрицательных финитных числовых последовательностей с единичной суммой и со сверткой в качестве умножения. При этом $V\delta(\omega) = \delta(\varphi\omega)$, $\omega \in \Omega$, так что $PK \subset K$ для всех операторов $P \in \Gamma(\Omega, \varphi)$. Соответствие $V \rightarrow \varphi$ индуцирует непрерывный алгебраический гомоморфизм $\pi: P \rightarrow p$ полугруппы $\Gamma(\Omega, \varphi)$ в полугруппу $E(\Omega, \varphi)$, действие которого понятным образом определяется из соотношения

$$P\delta(\omega) = \delta(p\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (1)$$

и оказывается эпиморфизмом.

Определение 1. Полускад (Ω, φ) называется *ординарным*, если его обволакивающая полугруппа $E(\Omega, \varphi)$ метризуема.

Определение 2 (см. [4]). Скажем, что динамическая система (Ω, φ) не хаотична, если каждое замкнутое полуинвариантное ($\varphi\Theta \subset \Theta$) множество $\Theta \subset \Omega$ содержит траекторию $o(\omega)$, $\omega \in \Theta$, устойчивую по Ляпунову относительно полускада (Θ, φ) .

Здесь и далее $o(\omega) = \{\varphi^n\omega, n \geq 0\}$ для $\omega \in \Omega$. Понятие ручной динамической системы изначально вводилось [2] следующим образом.

Определение 3. Полускад (Ω, φ) называем *ручным*, если для любой непрерывной функции $x \in X$ и произвольной подпоследовательности $\{n(k)\}$ натурального ряда справедливо соотношение

$$\inf_a \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n(k)} \right\|_X = 0,$$

где $x_m(\omega) = x(\varphi^m\omega)$ ($\omega \in \Omega$) и нижняя грань берется по финитным вещественным последовательностям $a = \{a_k\}$ с $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = 1$.

Обозначим через Π_1 совокупность преобразований компакта Ω , принадлежащих первому из расширяющихся классов Бэра, а через Π_b множество всех борелевских отображений $p: \Omega \rightarrow \Omega$.

Пусть G_0 — выпуклая оболочка множества Γ_0 в $\text{End } X^*$. Сеть операторов $T_\alpha \in G_0$ называется *эргодической*, если $T_\alpha(I - V) \xrightarrow{W^*O} 0$, $I = \text{id}$. Соответственно определяются эргодические последовательности операторов $T_n \in G_0$. Последовательность средних Чезаро $V_n = \frac{1}{n}(I + V + \dots + V^{n-1})$ эргодична, так как $V_n(I - V) = n^{-1}(I - V^n)$, $\|V^n\| = 1$. Отметим, что W^*O -сходимость эргодических сетей операторов T_α равносильна сходимости для произвольных функций $x \in X$ эргодических средних $T_\alpha^*x \rightarrow z$, $z \in X^{**}$, в w^* -топологии пространства $X^{**} = C^{**}(\Omega)$. Для эргодических последовательностей подобная сходимость эквивалентна поточечной сходимости на компакте Ω , но в общем случае может быть сильнее.

2. Классификация свойств компактных полукаскадов. Рассмотрим следующие классы D1–D6 свойств полукаскада (Ω, φ) , связанных, в основном, с рассматриваемой задачей о слабой* сходимости эргодических средних.

- D1: (a1) компакт $E(\Omega, \varphi)$ метризуем;
 (b1) система (Ω, φ) не хаотична;
 (c1) компакт $G(\Omega, \varphi)$ метризуем.
- D2: (a2) компакт $G(\Omega, \varphi)$ есть пространство Фреше–Урысона;
 (b2) $\text{card } G(\Omega, \varphi) = \aleph$.
- D3: (a3) полукаскад (Ω, φ) представляет собой ручную систему;
 (b3) компакт $E(\Omega, \varphi)$ есть пространство Фреше–Урысона;
 (c3) $\text{card } G(\Omega, \varphi) \leq \aleph$;
 (d3) $E(\Omega, \varphi) \subset \Pi_1$;
 (e3) $E(\Omega, \varphi) \subset \Pi_b$.
- D4: (a4) операторы $T \in G(\Omega, \varphi)$ определяются своими значениями на мерах Дирака $\delta \in K(\Omega)$.
- D5: (a5) выпуклое множество операторов $G(\Omega, \varphi)$ есть симплекс Шоке.
- D6: (a6) операторы $P \in \Gamma(\Omega, \varphi)$ определяются своими значениями на мерах Дирака;
 (b6) функция $\pi: \Gamma(\Omega, \varphi) \rightarrow E(\Omega, \varphi)$, определенная формулой (1), инъективна;
 (c6) $\text{ex } G = \Gamma$;
 (d6) $\text{ex } \Gamma = \Gamma$.

Здесь $\Gamma = \Gamma(\Omega, \varphi)$, $G = G(\Omega, \varphi)$ и $\text{ex}(\cdot)$ обозначает совокупность крайних точек для множеств в $\text{End } X^*$. Часть свойств динамической системы (Ω, φ) , входящих в классы D1, D3 и D6, рассматривалась ранее в [4]–[6]. Хотя эти работы посвящены обратимым динамическим системам, переход к необратимому случаю оказывается в необходимых ситуациях чисто техническим. Свойства (c6), (d6) обсуждались в [3]. Топологический компакт обладает свойством Фреше–Урысона, если операция замыкания множеств в нем определяется на языке последовательностей. Свойство (a5) означает [8], что конус в пространстве $\text{End } X^*$ с основанием $G(\Omega, \varphi)$ является векторной структурой. Если выполнено условие (b6), то определенная соотношением (1) функция $\pi: \Gamma(\Omega, \varphi) \rightarrow E(\Omega, \varphi)$ представляет собой одновременно гомеоморфизм и алгебраический изоморфизм, что позволяет отождествить полугруппы $\Gamma(\Omega, \varphi)$ и $E(\Omega, \varphi)$.

Теорема 4. *Свойства полукаскада (Ω, φ) внутри каждого из классов D1, D2, D3, D6 попарно эквивалентны.*

Таким образом, любое из свойств (b1), (c1) можно принять за альтернативное определение ординарности, а каждое из свойств (b3), (c3), (d3) или (e3)

вполне характеризует ручные системы (Ω, φ) . Подчеркнем, что эквивалентности $(a1) \iff (b1)$ и $(a3) \iff (b3) \iff (c3) \iff (d3)$ установлены в [4]–[6], а $(b6) \iff (c6) \iff (d6)$ получены в [3]. Как видим, полускадад (Ω, φ) является ручным точно тогда, когда его обволакивающая полугруппа $E(\Omega, \varphi)$ состоит из борелевских преобразований. Значит, если эта полугруппа содержит преобразования, не входящие в первый класс Бэра, то она содержит и преобразования, не являющиеся борелевскими.

Таким образом, можно говорить о классах $\mathcal{D}1$ – $\mathcal{D}6$ полускададов (Ω, φ) , обладающих любым из (эквивалентных) свойств, входящих соответственно в классы $D1$ – $D6$. Известно (см. [4]), что класс $\mathcal{D}3$ ручных динамических систем не совпадает с классом $\mathcal{D}1$ ординарных систем.

Теорема 5. *Справедливы включения $\mathcal{D}1 \subset \mathcal{D}2 \subset \mathcal{D}3 \subset \mathcal{D}6$ и $\mathcal{D}1 \subset \mathcal{D}4 \subset \mathcal{D}5 \subset \mathcal{D}6$.*

Итак, в ординарном случае выпуклое компактное подмножество $G(\Omega, \varphi)$ линейного пространства $\text{End } X^*$ является симплексом Шоке и любой оператор $T \in G(\Omega, \varphi)$ определяется своими значениями на мерах Дирака $\delta(\omega)$, $\omega \in \Omega$. В случае ручного полускадада (Ω, φ) совокупность крайних точек множества $G(\Omega, \varphi)$ совпадает с множеством $\Gamma(\Omega, \varphi)$. Импликация $(a3) \implies (b6)$ была установлена еще в [2]. Класс ординарных полускададов $\mathcal{D}1$ достаточно обширен, ибо состоит из всех дискретных компактных динамических систем, не хаотичных в смысле определения 2. С другой стороны, известен пример [4] минимального дистального каскада на двумерном торе, не входящего даже в наиболее широкий из рассмотренных выше класс $\mathcal{D}6$.

3. Эргодические свойства ординарных и ручных полускададов.

Сформулируем теперь утверждения, относящиеся к эргодическим свойствам полускададов указанных типов. Соответствующие доказательства основаны на построениях разд. 2 и результатах работы [3]. Сходимость эргодических операторных сетей T_α в пространстве $\text{End } X^*$ понимается в смысле W^* -топологии. Обозначим через $\Lambda(\Omega)$ множество эргодических мер полускадада (Ω, φ) . Пару точек $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ называем проксимальной, если $\inf_{n \geq 0} \rho(\varphi^n \omega_1, \varphi^n \omega_2) = 0$ для заданной на компакте Ω метрики ρ . Пусть, далее, L — ядро (пересечение всех двусторонних идеалов) полугруппы $G(\Omega, \varphi)$, состоящее из проекторов $Q \in G(\Omega, \varphi)$ со свойством $VQ = Q$.

Теорема 6. *Если полускадад (Ω, φ) ординарен, то справедливы следующие утверждения:*

(i) *Каждая эргодическая сеть операторов T_α содержит сходящуюся подпоследовательность $T_{\alpha(k)}$. Все эргодические сети операторов T_α сходятся тогда и только тогда, когда для любого $\omega \in \Omega$ замыкание траектории $o(\omega)$ содержит в себе единственное минимальное множество. Последнее верно с заменой слова «сети» на «последовательности».*

(ii) *Найдется такая сходящаяся эргодическая последовательность операторов T_n , что для любого $\omega \in \Omega$ меры $T_n \delta(\omega)$ слабо* сходятся в X^* к эргодической мере $\mu_\omega \in \Lambda(\Omega)$, или, другими словами, асимптотическое (относительно $\{T_n\}$) распределение всех траекторий динамической системы (Ω, φ) определяется эргодическими мерами.*

(iii) *Если отношение проксимальности на Ω транзитивно, то все эргодические сети операторов T_α сходятся.*

(iv) Для каждой эргодической сети операторов T_α из поточечной сходимости функциональной сети T_α^*x на компакте Ω для всех непрерывных функций $x \in X$ следует W^* -сходимость $T_\alpha \rightarrow Q$, $Q \in L$.

На самом деле утверждения (i)–(iii) верны в классе полускадамов $\mathcal{D}2$, а для справедливости (iv) достаточно свойства (a4). Как показано в [3], для произвольного полускада (Ω, φ) сходимость всех эргодических операторных сетей равносильна условию $\text{card } L = 1$.

Теорема 7. В случае ручного полускада (Ω, φ) можно сказать следующее.

(i) Минимальный центр притяжения $Z(\Omega, \varphi)$ совпадает с замыканием объединения всех минимальных множеств.

(ii) Если замыкание любой траектории $o(\omega)$, $\omega \in \Omega$, содержит единственное минимальное множество, то все эргодические последовательности операторов T_n сходятся и носитель каждой эргодической меры $\mu \in \Lambda(\Omega)$ есть минимальное множество.

Напомним, что минимальный центр притяжения $Z(\Omega, \varphi)$ динамической системы (Ω, φ) определяется как замыкание объединения носителей всех эргодических мер. Кроме того, отметим в этой связи строгую эргодичность минимальных ручных систем, установленную не так давно в [4], [9], [10]. Подчеркнем, что изложенные результаты нетрудно обобщить на случай динамических систем с непрерывным временем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Ellis, *Lectures on Topological Dynamics*, Benjamin, New York, 1969. [2] A. Köhler, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, **95**:2 (1995), 179–191. [3] А. В. Романов, Изв. РАН. Сер. матем., **75**:6 (2011), 79–98. [4] E. Glasner, Topology Appl., **154**:11 (2007), 2344–2363. [5] E. Glasner, M. Megrelishvili, Colloq. Math., **104**:2 (2006), 223–283. [6] E. Glasner, Colloq. Math., **105**:2 (2006), 283–295. [7] N. Kryloff, N. Bogoliouboff, Ann. of Math., **38**:1 (1937), 65–113. [8] Р. Фелпс, *Лекции о теореме Шоке*, Мир, М., 1968. [9] W. Huang, Ergodic Theory Dynam. Systems, **26**:5 (2006), 1549–1567. [10] D. Kerr, H. Li, Math. Ann., **338**:4 (2007), 869–926.

Московский институт электроники и математики
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: vitkar48@inbox.ru

Поступило в редакцию
31 октября 2011 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 22.04.2013. Дата выхода в свет 20.05.2013. Формат 70 × 100/16
Печать цифровая. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,5 тыс. Бум. л. 3,0
Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 181 экз. Заказ 1177. Цена свободная

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56
Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,
117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90
Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6