Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Исаев, Экспоненциальная неустойчивость
в обратной задаче рассеяния на интервале энер-
гий, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, вы-
пуск 3, 28–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3116>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:05:01

УДК 517.9

Экспоненциальная неустойчивость в обратной задаче рассеяния на интервале энергий

© 2013. М. И. ИСАЕВ

Рассмотрена трехмерная обратная задача рассеяния на интервале энергий. Работа посвящена вопросам устойчивости и неустойчивости в этой задаче. В частности, получены результаты об экспоненциальной неустойчивости, показывающие оптимальность с точностью до показателя в экспоненте логарифмической оценки, доказанной П. Стефановым в 1990 г. с использованием некоторой специальной нормы для амплитуды рассеяния при фиксированной энергии.

§1. Введение

Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (1.1)$$

где

$$\begin{aligned} \text{потенциал } v \text{ является вещественным, } v \in L^\infty(\mathbb{R}^3), \\ v(x) = O(|x|^{-3-\varepsilon}) \text{ при } |x| \rightarrow \infty \text{ для некоторого } \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При выполнении условий (1.2) для любого $k \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$ уравнение (1.1) с $E = k^2$ имеет единственное непрерывное решение $\psi^+(x, k)$, имеющее асимптотику,

$$\begin{aligned} \psi^+(x, k) = e^{ikx} - 2\pi^2 \frac{e^{i|k||x|}}{|x|} f\left(\frac{k}{|k|}, \frac{x}{|x|}, |k|\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ \text{при } |x| \rightarrow \infty \text{ (равномерно по } x/|x|), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $f(k/|k|, \omega, |k|)$ с фиксированным k является непрерывной функцией от $\omega \in S^2$.

Функция $f(\theta, \omega, s)$, возникающая в (1.3), называется *амплитудой рассеяния* для уравнения (1.1) с потенциалом v . (Дополнительную информацию о прямом рассеянии для уравнения (1.1) при выполнении условий (1.2) см., например, в [6] и [11].)

Хорошо известно, что для уравнения (1.1) при выполнении условий (1.2) амплитуда рассеяния f в пределе высоких энергий однозначно определяет $\hat{v}$ на $\mathbb{R}^3$, где

$$\hat{v}(p) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ipx} v(x) dx, \quad p \in \mathbb{R}^3,$$

через формулу Борна. В качестве математической теоремы этот результат был впервые приведен в [5] (подробную информацию см., например, в [11, разд. 2.1] и [14, теорема 1.1]).

Рассмотрим следующую обратную задачу для уравнения (1.1).

Задача 1.1. Дана амплитуда рассеяния f на интервале энергий I . Найти v .

В [7] показано, что для уравнения (1.1) при выполнении условий (1.2) для любого $E > 0$ и $\delta > 0$ амплитуда рассеяния $f(\theta, \omega, s)$ на $\{(\theta, \omega, s) \in S^2 \times S^2 \times R_+, E \leq s^2 \leq E + \delta\}$ однозначно определяет $\hat{v}(p)$ на $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p| \leq 2\sqrt{E}\}$. Доказательство основано на решении линейных интегральных уравнений и на аналитическом продолжении. Приведенный результат из [7] впоследствии был улучшен в [14]. С другой стороны, если v удовлетворяет условиям (1.2), а также имеет компактный носитель или экспоненциально убывает на бесконечности, то $\hat{v}(p)$ на $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p| \leq 2\sqrt{E}\}$ однозначно определяет $\hat{v}(p)$ на $\{p \in \mathbb{R}^3 \mid |p| > 2\sqrt{E}\}$ посредством аналитического продолжения и, следовательно, однозначно определяет v на $\mathbb{R}^3$.

В случае фиксированной энергии и потенциала v , удовлетворяющего условиям (1.2), а также имеющего компактный носитель или экспоненциально убывающего на бесконечности, результаты о глобальной единственности и точном восстановлении впервые получены в [12], [13].

Приближенный, но численно эффективный метод для поиска потенциала v по амплитуде рассеяния f в случае фиксированной энергии разработан в [15]. Результаты численной реализации этого метода представлены в [2].

Глобальные оценки устойчивости для задачи 1.1 получены Стефановым в [17] (для фиксированной энергии и потенциалов с компактным носителем), см. теорему 2.1 в §2 настоящей работы. С использованием специальной нормы для амплитуды рассеяния f в [17] показано, что оценки устойчивости для задачи 1.1 следуют из оценок устойчивости Алессандрини [1] для обратной задачи Гельфанда–Кальдерона, т. е. задачи определения потенциала v в ограниченной области по заданному оператору Дирихле–Неймана. Оценки устойчивости Алессандрини были недавно улучшены Новиковым [16].

В случае фиксированной энергии результаты Мандаша [10] доказывают, что оценки устойчивости Алессандрини и особенно Новикова оптимальны (с точностью до показателя экспоненты). В [8] исследования Мандаша были распространены на случай оператора Дирихле–Неймана, заданного на энергетических интервалах. Отметим, что оценки, подобные оценкам Мандаша, для эллиптических обратных задач, касающихся определения дефектов различного типа с помощью оператора Дирихле–Неймана или данных рассеяния, получены в [3], где была предложена также общая схема исследования вопросов неустойчивости такого типа. Хотя основной результат настоящей работы может быть представлен в рамках общей схемы из [3], это не приводит к заметному упрощению его полного доказательства.

В настоящей работе к задаче 1.1 применен подход, изложенный в [10], [3], [8], и показано, что логарифмические оценки Стефанова из [17] оптимальны (с точностью до показателя экспоненты). В §2 приведены оценки устойчивости из [17] (см. теорему 2.1) и результат настоящей работы о неустойчивости в задаче 1.1, см. теорему 2.2 и замечание 2.3. В §3 изложены доказательства некоторых основных аналитических свойств амплитуды рассеяния. В §5, развивая подход из [10], [3], [8], мы доказываем основной результат, теорему 2.2, используя оценки ε -энтропии и ε -емкости подходящих пространств, рассмотренных в §4.

§2. Оценки устойчивости и неустойчивости

В дальнейшем мы предполагаем, что

$$\operatorname{supp} v(x) \subset D = B(0, 1), \quad (2.1)$$

где $B(x, r)$ обозначает открытый шар радиуса r с центром x . Рассмотрим ортонормированный базис в $L^2(S^2) = L^2(\partial D)$ сферических гармоник

$$\{Y_j^p : j \geq 0, 1 \leq p \leq 2j + 1\}.$$

Используя обозначение $a_{j_1 p_1 j_2 p_2}$, мы будем подразумевать, что

$$0 \leq j_1, \quad 1 \leq p_1 \leq 2j_1 + 1, \quad 0 \leq j_2, \quad 1 \leq p_2 \leq 2j_2 + 1.$$

Разложим функцию $f(\theta, \omega, s)$ в базисе $\{Y_{j_1}^{p_1} \times Y_{j_2}^{p_2}\}$:

$$f(\theta, \omega, s) = \sum_{j_1, p_1, j_2, p_2} a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s) Y_{j_1}^{p_1}(\theta) Y_{j_2}^{p_2}(\omega).$$

Как и в [17], мы используем норму

$$\|f(\cdot, \cdot, s)\|_{\sigma_1, \sigma_2} = \left\{ \sum_{j_1, p_1, j_2, p_2} \left(\frac{2j_1 + 1}{es} \right)^{2j_1 + 2\sigma_1} \left(\frac{2j_2 + 1}{es} \right)^{2j_2 + 2\sigma_2} |a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)|^2 \right\}^{1/2}. \quad (2.2)$$

Если функция f является амплитудой рассеяния для некоторого потенциала $v \in L^\infty(D)$ с носителем в $B(0, \rho)$, где $0 < \rho < 1$, то

$$|a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)| \leq C(s, \|v\|_{L^\infty(D)}) \left(\frac{es\rho}{2j_1 + 1} \right)^{j_1 + 3/2} \left(\frac{es\rho}{2j_2 + 1} \right)^{j_2 + 3/2} \quad (2.3)$$

и, следовательно, $\|f(\cdot, \cdot, s)\|_{\sigma_1, \sigma_2} < \infty$; см. оценки предложения 2.2 в [17].

Теорема 2.1 (см. [17]). Пусть вещественные потенциалы v_1, v_2 таковы, что $v_i \in L^\infty(D) \cap H^q(\mathbb{R}^3)$, $\text{supp } v_i \subset B(0, \rho)$, $\|v_i\|_{L^\infty(D)} \leq N$ для $i = 1, 2$ и некоторых $N > 0$, $q > 3/2$ и $0 < \rho < 1$. Пусть f_1 и f_2 обозначают амплитуды рассеяния для уравнения (1.1) с $E = s^2$, $s > 0$, и потенциалами v_1 и v_2 соответственно. Тогда

$$\|v_1 - v_2\|_{L^\infty(D)} \leq c(N, \rho) \phi_\delta(\|f_1(\cdot, \cdot, s) - f_2(\cdot, \cdot, s)\|_{3/2, -1/2}), \quad (2.4)$$

где норма $\|\cdot\|_{3/2, -1/2}$ определена в (2.2), а $\phi_\delta(t) = (-\ln t)^{-\delta}$ для достаточно малых $t > 0$ и некоторого фиксированного δ , где, в частности, $0 < \delta < 1$.

Теорема 2.2. Для произвольного интервала $I = [s_1, s_2]$, где $s_1 > 0$, и для произвольных $m > 0$, $\delta > 2m$ и действительных σ_1, σ_2 существуют константы $\beta > 0$ и $N > 0$, такие, что для любого $v_0 \in C^m(D)$ с $\|v_0\|_{L^\infty(D)} \leq N$ и $\text{supp } v_0 \subset B(0, 1/2)$ и любого $\varepsilon \in (0, N)$ существуют потенциалы $v_1, v_2 \in C^m(D)$ с носителем в $B(0, 1/2)$, удовлетворяющие условиям

$$\sup_{s \in I} (\|f_1(\cdot, \cdot, s) - f_2(\cdot, \cdot, s)\|_{\sigma_1, \sigma_2}) \leq \exp(-\varepsilon^{-1/\delta}), \quad (2.5)$$

$$\|v_1 - v_2\|_{L^\infty(D)} \geq \varepsilon,$$

$$\|v_i - v_0\|_{L^\infty(D)} \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \quad \|v_i - v_0\|_{C^m(D)} \leq \beta, \quad i = 1, 2,$$

где f_1 и f_2 обозначают амплитуды рассеяния для уравнения (1.1) с $E = s^2$, $s > 0$, и потенциалами v_1 и v_2 соответственно.

Замечание 2.1. В случае фиксированной энергии $s_1 = s_2$ можно заменить условие $\delta > 2m$ в теореме 2.2 на $\delta > 5m/3$.

Замечание 2.2. Можно считать β в теореме 2.2 произвольно малым, если для некоторых констант $\varepsilon_0 > 0$ и $c > 0$, зависящих от β , потребовать, чтобы $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, и заменить правую часть в первом неравенстве в (2.5) на $\exp(-c\varepsilon^{-1/\delta})$.

Замечание 2.3. Заметим, что в теореме 2.2 и замечании 2.1 подразумевается, в частности, что для любых вещественных σ_1 и σ_2 оценка

$$\|v_1 - v_2\|_{L^\infty(D)} \leq \tilde{c}(N, \rho, m, I) \sup_{s \in I} \phi_\delta(\|f_1(\cdot, \cdot, s) - f_2(\cdot, \cdot, s)\|_{\sigma_1, \sigma_2})$$

неверна в общем случае при $\delta > 2m$, если амплитуда рассеяния известна на интервале энергий, и при $\delta > 5m/3$ для случая фиксированной энергии. Следовательно, из теоремы 2.2 и замечания 2.1 следует оптимальность логарифмической оценки устойчивости Стефанова (с точностью до показателя экспоненты).

Замечание 2.4. Недостатком оценки (2.4) является то, что $\delta < 1$, даже если $m \rightarrow \infty$. По-видимому, исходя из результатов [16], оценку (2.4) можно улучшить до $\delta = m + o(m)$ при $m \rightarrow \infty$.

§3. Некоторые основные аналитические свойства амплитуды рассеяния

Рассмотрим решение $\psi^+(x, k)$ уравнения (1.1), см. формулу (1.3). Известно, что

$$\psi^+(x, k) = e^{ikx} \mu^+(x, \theta, s),$$

где $\theta \in S^2$, $k = s\theta$ и $\mu^+(x, \theta, s)$ является решением уравнения

$$\mu^+(x, \theta, s) = 1 - \int_{\mathbb{R}^3} G^+(x, y, s) e^{-is\theta(x-y)} v(y) \mu^+(y, \theta, s) dy, \quad (3.1)$$

$$G^+(x, y, s) = \frac{e^{is|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Мы полагаем, что условия (2.1) выполнены, а также что для некоторого $h > 0$

$$|\operatorname{Im} s| \leq h, \quad (3.2)$$

$$c_1(h, D) \|v\|_{L^\infty(D)} \leq 1/2, \quad D = B(0, 1), \quad (3.3)$$

$$c_1(h, D) = \sup_{x \in D} \int_D \frac{e^{2h|x-y|}}{4\pi|x-y|} dy. \quad (3.4)$$

Тогда, в частности,

$$|e^{-is\theta(x-y)} e^{is|x-y|}| \leq e^{2h|x-y|}.$$

Решая (3.1) методом последовательных приближений в $L^\infty(D)$, получаем, что

$$|\mu^+(x, \theta, s)| \leq \frac{1}{1 - c_1 \|v\|_{L^\infty(D)}}, \quad \theta \in S^2, x \in D. \quad (3.5)$$

Лемма 3.1. Пусть $f(\theta, \omega, s)$ — амплитуда рассеяния для потенциала $v \in L^\infty(D)$, такого, что выполнены условия (2.1) и (3.3) для некоторого $h > 0$, причем

$$f(\theta, \omega, s) = \sum_{j_1, p_1, j_2, p_2} a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s) Y_{j_1}^{p_1}(\theta) Y_{j_2}^{p_2}(\omega)$$

— ее разложение в базисе сферических гармоник $\{Y_{j_1}^{p_1} \times Y_{j_2}^{p_2}\}$. Тогда $a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)$ является голоморфной функцией в $W_h = \{s \mid |\operatorname{Im} s| \leq h\}$ и

$$|a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)| \leq c_2(h, D), \quad s \in W_h.$$

Доказательство. Мы используем хорошо известную формулу

$$f(\theta, \omega, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{is(\theta-\omega)x} v(x) \mu^+(x, \theta, s) dx. \quad (3.6)$$

Учитывая, что $\theta, \omega \in S^2$, приходим к неравенству

$$|e^{is(\theta-\omega)x}| \leq e^{2|\operatorname{Im} s||x|}.$$

Комбинируя это вместе с (2.1), (3.3), (3.5) и (3.6), мы получаем, что

$$|f(\theta, \omega, s)| \leq \tilde{c}_2(h, D) \quad \text{для } s \in W_h.$$

Так как

$$a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s) = \int_{S^2 \times S^2} f(\theta, \omega, s) Y_{j_1}^{p_1}(\theta) Y_{j_2}^{p_2}(\omega) d\theta d\omega,$$

это доказывает лемму 3.1. $\square$

§ 4. Оценки ε -энтропии и ε -емкости метрических пространств

Определение 4.1. Рассмотрим метрическое пространство (X, dist) и $\varepsilon > 0$. Множество $Y \subset X$ называется ε -сетью для $X_1 \subset X$, если для любого $x \in X_1$ существует $y \in Y$, такое, что $\operatorname{dist}(x, y) \leq \varepsilon$. Тогда число $\mathcal{H}_\varepsilon(X_1) := \log_2 \min\{|Y| \mid Y \text{ является } \varepsilon\text{-сетью для } X_1\}$ называется ε -энтропией множества X_1 .

Множество $Z \subset X$ называется ε -дискретным, если для любых различных $z_1, z_2 \in Z$ выполняется неравенство $\operatorname{dist}(z_1, z_2) \geq \varepsilon$. Тогда число $\mathcal{C}_\varepsilon := \log_2 \max\{|Z| \mid Z \subset X_1, \text{ где } Z \text{ является } \varepsilon\text{-дискретным}\}$ называется ε -емкостью множества X_1 .

Использование ε -энтропии и ε -емкости для определения свойств отображений метрических пространств восходит к Витушкину и Колмогорову (см. [9] и ссылки, содержащиеся там). Одним из замечательных приложений является 13-я проблема Гильберта (о представлении функции нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных). По существу, лемма 4.1 и лемма 4.2 являются частями теорем XIV и XVII соответственно из [9]. Они также сформулированы и доказаны в [10] и [8] соответственно.

Лемма 4.1. Пусть $d \geq 2$ и $m > 0$. Для $\varepsilon, \beta > 0$ рассмотрим вещественное метрическое пространство

$$X_{m\varepsilon\beta} = \{v \in C^m(\mathbb{R}^d) \mid \operatorname{supp} v \subset B(0, 1/2), \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon, \|v\|_{C^m(\mathbb{R}^d)} \leq \beta\}$$

с метрикой из L^∞ . Тогда существует $\mu > 0$, такое, что для любого $\beta > 0$ и $\varepsilon \in (0, \mu\beta)$ существует ε -дискретное множество $Z \subset X_{m\varepsilon\beta}$ с не менее чем $\exp(2^{-d-1}(\mu\beta/\varepsilon)^{d/m})$ элементами.

Лемма 4.2. Пусть

$$W_{I,\gamma} = \left\{ \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos z \mid |\operatorname{Im} z| \leq \gamma \right\} \quad (4.1)$$

— эллипс в $\mathbb{C}$, где I — некоторый интервал $[a, b]$ в $\mathbb{R}$ и $\gamma > 0$. Тогда существует константа $\nu = \nu(C, \gamma) > 0$, такая, что для любого $\delta \in (0, e^{-1})$ для

пространства функций на I с L^∞ -нормой, имеющих голоморфное продолжение на $W_{I,\gamma}$, ограниченное в $W_{I,\gamma}$ по модулю константой C , существует δ -сеть с не более чем $\exp(\nu(\ln \delta^{-1})^2)$ элементами.

Замечание 4.1. В случае $a = b$ рассмотрим множество

$$Y = \frac{\delta}{2}\mathbb{Z} \cap [-C, C] + i \cdot \frac{\delta}{2}\mathbb{Z} \cap [-C, C].$$

Мы получаем δ -сеть с не более чем $\exp(\nu \ln \delta^{-1})$ элементами.

Для интервала $I = [s_1, s_2]$, такого, что $s_1 > 0$, и вещественных σ_1, σ_2 рассмотрим банахово пространство

$$X_{I,\sigma_1,\sigma_2} = \{(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)) \mid \|(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s))\|_{X_{I,\sigma_1,\sigma_2}} < \infty\},$$

где

$$\|(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s))\|_{X_{I,\sigma_1,\sigma_2}} = \sup_{\substack{j_1, p_1, j_2, p_2 \\ s \in I}} \left(\left(\frac{2j_1 + 1}{es} \right)^{j_1 + \sigma_1} \left(\frac{2j_2 + 1}{es} \right)^{j_2 + \sigma_2} |a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)| \right). \quad (4.2)$$

Пусть f является амплитудой рассеяния для некоторого потенциала $v \in L^\infty(D)$ с носителем в $B(0, \rho)$, где $0 < \rho < 1$. Мы отождествляем амплитуду рассеяния $f(s, \theta, \omega)$ с ее матрицей коэффициентов $(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s))$ в базисе сферических гармоник $\{Y_{j_1}^{p_1} \times Y_{j_2}^{p_2}\}$. Заметим, что

$$\sup_{s \in I} \|f(\cdot, \cdot, s)\|_{\sigma_1, \sigma_2} \leq c_3 \|(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s))\|_{X_{I, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2}}, \quad (4.3)$$

где $\tilde{\sigma}_1 - \sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 - \sigma_2 = 3$ и $c_3 = c_3(I) > 1$. Неравенство (4.3) следует из определений (2.2), (4.2), если взять $c_3 > 1$, такое, что

$$\sum_{j_1, p_1, j_2, p_2} \left(\frac{2j_1 + 1}{es} \right)^{-3} \left(\frac{2j_2 + 1}{es} \right)^{-3} < c_3.$$

Для $h > 0$ обозначим через $\mathcal{A}_h$ множество матриц, соответствующих амплитудам рассеяния для потенциалов $v \in L^\infty(D)$ с носителями в $B(0, 1/2)$, таких, что выполнено условие (3.3).

Лемма 4.3. Для произвольного $h > 0$ и вещественных σ_1, σ_2 множество $\mathcal{A}_h$ принадлежит X_{I,σ_1,σ_2} . Кроме того, существует $\eta = \eta(I, h, \sigma_1, \sigma_2) > 0$, такое, что для любого $\delta \in (0, e^{-1})$ для $\mathcal{A}_h$ в X_{I,σ_1,σ_2} существует δ -сеть Y с не более чем $\exp(\eta(\ln \delta^{-1})^6(1 + \ln \ln \delta^{-1})^2)$ элементами.

Доказательство. Можно считать, что $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$, так как утверждение в данном случае сильнее. Если функция f является амплитудой рассеяния для некоторого потенциала $v \in L^\infty(D)$ с носителем в $B(0, 1/2)$, то из (2.3) вытекает, что

$$\left(\frac{2j_1 + 1}{es} \right)^{j_1 + \sigma_1} \left(\frac{2j_2 + 1}{es} \right)^{j_2 + \sigma_2} |a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)| \leq c_4 \frac{(2j_1 + 1)^{\sigma_1} (2j_2 + 1)^{\sigma_2}}{2^{j_1 + j_2}},$$

где $c_4 = c_4(I, h) > 0$. Следовательно, для любых положительных σ_1 и σ_2

$$\|(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s))\|_{X_{I,\sigma_1,\sigma_2}} \leq \sup_{j_1, j_2} \left(c_4 \frac{(2j_1 + 1)^{\sigma_1} (2j_2 + 1)^{\sigma_2}}{2^{j_1 + j_2}} \right) < \infty,$$

а значит, первое утверждение леммы доказано.

Пусть $l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}$ — наименьшее натуральное число, такое, что $c_4(2l+1)^{\sigma_1+\sigma_2}2^{-l} < \delta$ для любого $l \geq l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}$. Взяв натуральный логарифм, находим, что

$$-\ln c_4 - (\sigma_1 + \sigma_2) \ln(2l+1) + l \ln 2 > \ln \delta^{-1} \quad \text{при } l \geq l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}.$$

Используя $\ln \delta^{-1} > 1$, получаем, что

$$l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2} \leq C' \ln \delta^{-1}, \quad (4.4)$$

где константа C' зависит только от h , σ_1 , σ_2 и $I = [s_1, s_2]$. Положим $W_I = W_{I, \gamma}$ (см. (4.1)), где константа $\gamma > 0$ такова, что $W_I \subset \{s \mid |\operatorname{Im} s| \leq h\}$. Если $\max(j_1, j_2) \leq l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}$, то обозначим через $Y_{j_1 p_1 j_2 p_2}$ некоторую $\delta_{j_1 p_1 j_2 p_2}$ -сеть из леммы 4.2 с константой $C = c_2$, где c_2 — константа из леммы 3.1 и

$$\delta_{j_1 p_1 j_2 p_2} = \left(\frac{es_1}{2j_1 + 1} \right)^{j_1 + \sigma_1} \left(\frac{es_1}{2j_2 + 1} \right)^{j_2 + \sigma_2} \delta.$$

В противном случае положим $Y_{j_1 p_1 j_2 p_2} = \{0\}$. Пусть

$$Y = \{(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)) \mid a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s) \in Y_{j_1 p_1 j_2 p_2}\}.$$

Для любого $(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)) \in \mathcal{A}_h$ существует элемент $(b_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)) \in Y$, такой, что

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2j_1 + 1}{es} \right)^{j_1 + \sigma_1} \left(\frac{2j_2 + 1}{es} \right)^{j_2 + \sigma_2} |a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s) - b_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)| \\ & \leq \left(\frac{2j_1 + 1}{es} \right)^{j_1 + \sigma_1} \left(\frac{2j_2 + 1}{es} \right)^{j_2 + \sigma_2} \delta_{j_1 p_1 j_2 p_2} \leq \delta, \end{aligned}$$

если $\max(j_1, j_2) \leq l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}$, и

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2j_1 + 1}{es} \right)^{j_1 + \sigma_1} \left(\frac{2j_2 + 1}{es} \right)^{j_2 + \sigma_2} |a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s) - b_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)| \\ & \leq c_4 \frac{(2j_1 + 1)^{\sigma_1} (2j_2 + 1)^{\sigma_2}}{2^{j_1 + j_2}} \leq c_4 \frac{(2 \max(j_1, j_2) + 1)^{\sigma_1 + \sigma_2}}{2^{\max(j_1, j_2)}} < \delta \end{aligned}$$

в противном случае.

Найдем число элементов множества Y . Заметим, что $|Y_{j_1 p_1 j_2 p_2}| = 1$, если $\max(j_1, j_2) > l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}$. Используя еще раз неравенство $\ln \delta^{-1} \geq 1$ и (4.4), получаем следующую оценку в случае, когда $\max(j_1, j_2) \leq l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}$:

$$|Y_{j_1 p_1 j_2 p_2}| \leq \exp(\nu(\ln \delta^{-1})^2) \leq \exp(\nu'(\ln \delta^{-1})^2(1 + \ln \ln \delta^{-1})^2). \quad (4.5)$$

Заметим, что $n_{\delta, \sigma_1, \sigma_2} \leq l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}^2 (2l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2} + 1)^2 \leq (2l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2} + 1)^4$, где $n_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}$ обозначает число четверок (j_1, p_1, j_2, p_2) , таких, что $\max(j_1, j_2) \leq l_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}$. Тогда существует достаточно большое η , такое, что

$$\begin{aligned} |Y| & \leq (\exp(\nu'(\ln \delta^{-1})^2(1 + \ln \ln \delta^{-1})^2))^{n_{\delta, \sigma_1, \sigma_2}} \\ & \leq \exp(\nu'(\ln \delta^{-1})^2(1 + \ln \ln \delta^{-1})^2(1 + 2C' \ln \delta^{-1})^4) \\ & \leq \exp(\eta(\ln \delta^{-1})^6(1 + \ln \ln \delta^{-1})^2). \quad \square \end{aligned} \quad (4.6)$$

Замечание 4.2. В случае $s_1 = s_2$, учитывая замечание 4.1 и используя его в (4.5) и (4.6), мы получим δ -сеть Y с не более чем $\exp(\eta(\ln \delta^{-1})^5(1 + \ln \ln \delta^{-1}))$ элементами.

§5. Доказательство теоремы 2.2

Выберем N таким образом, чтобы условие (3.3) выполнялось для любого $\|v\|_{L^\infty(D)} \leq 2N$ и некоторого фиксированного $h > 0$. Согласно лемме 4.1, множество $v_0 + X_{m\varepsilon\beta}$ имеет ε -дискретное подмножество $v_0 + Z$. Так как $\varepsilon \in (0, N)$, то множество Y , построенное в лемме 4.3, является также δ -сетью для множества матриц, соответствующих амплитудам рассеяния для потенциалов $v \in v_0 + X_{m\varepsilon\beta}$. Возьмем δ , такое, что $2c_3\delta = \exp(-\varepsilon^{-1/\alpha})$, см. (4.3). Заметим, что неравенства (2.5) следуют из неравенства

$$|v_0 + Z| > |Y|, \quad (5.1)$$

где Y обозначает множество, построенное в лемме 4.3, с $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 + 3$ и $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 + 3$. Действительно, если $|v_0 + Z| > |Y|$, то существуют два потенциала $v_1, v_2 \in v_0 + Z$ с матрицами $(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s))$ и $(b_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s))$, соответствующими амплитудам рассеяния, которые находятся в одном $X_{I, \sigma_1, \sigma_2}$ -шаре радиуса δ с центром в элементе Y . Следовательно, используя (4.3), мы получаем, что

$$\begin{aligned} \sup_{s \in I} \|f_1(\cdot, \cdot, s) - f_2(\cdot, \cdot, s)\|_{\sigma_1, \sigma_2} &\leq c_3 \|(a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s)) - (b_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s))\|_{X_{I, \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2}} \\ &\leq 2c_3\delta = \exp(-\varepsilon^{-1/\alpha}). \end{aligned}$$

Найдем β , такое, чтобы условие (5.1) выполнялось. Используя лемму 4.3, для некоторого $\eta_\alpha = \eta_\alpha(I, \sigma_1, \sigma_2, \alpha) > 0$ получаем, что

$$|Y| \leq \exp(\eta(\ln(2c_3) + \varepsilon^{-1/\alpha})^6 (1 + \ln(\ln(2c_3) + \varepsilon^{-1/\alpha})))^2 \leq \exp(\eta_\alpha \varepsilon^{-3/m}). \quad (5.2)$$

Тогда положим

$$\beta > \mu^{-1} \max(N, \eta_\alpha^{m/3} 2^{2m}). \quad (5.3)$$

Получаем, что условие $\varepsilon < \mu\beta$ в лемме 4.1 выполнено; следовательно,

$$|v_0 + Z| = |Z| \geq \exp(2^{-4}(\mu\beta/\varepsilon)^{3/m}) \stackrel{(5.3)}{>} \exp(2^{-4}(\eta_\alpha^{m/3} 2^{2m}/\varepsilon)^{3/m}) \stackrel{(5.2)}{\geq} |Y|.$$

Последнее неравенство завершает доказательство теоремы 2.2.

В случае фиксированной энергии $s_1 = s_2$, используя замечание 4.2 в (5.2), можно заменить условие $\alpha > 2m$ в теореме 2.2 на $\alpha > 5m/3$.

* * *

Настоящая работа выполнена под руководством Р. Г. Новикова в рамках стажировки в Ecole Polytechnique.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] G. Alessandrini, *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, Appl. Anal., **27**:1–3 (1988), 153–172.
- [2] Н. В. Алексеенко, В. А. Буров, О. Д. Румянцев, *Решение трехмерной обратной задачи акустического рассеяния II. Модифицированный алгоритм Новикова*, Акустич. журнал, **54**:3 (2008), 469–482.
- [3] M. Di Cristo, L. Rondi, *Examples of exponential instability for inverse inclusion and scattering problems*, Inverse Problems, **19**:3 (2003), 685–701.
- [4] I. M. Gelfand, *Some aspects of functional analysis and algebra*, in: Proc. Internat. Congress of Math., Amsterdam, 1954, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1957, 253–276.
- [5] Л. Д. Фаддеев, *Единственность решения обратной задачи рассеяния*, Вестник Ленинградск. ун-та, **11**:7 (1956), 126–130.

- [6] Л. Д. Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния*. II, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 3, ВИНТИ, М., 1974, 93–180.
- [7] Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, *The $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния*, УМН, **42:3**(255) (1987), 93–152.
- [8] М. И. Isaev, *Exponential instability in the Gel'fand inverse problem on the energy intervals*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **19:3** (2011), 453–473.
- [9] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, *ε -энтропия и ε -емкость множеств в функциональных пространствах*, УМН, **14:2**(86) (1959), 3–86.
- [10] N. Mandache, *Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation*, Inverse Problems, **17:5** (2001), 1435–1444.
- [11] R. G. Newton, *Inverse Schrödinger Scattering in Three Dimensions*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [12] Р. Г. Новиков, *Многомерная обратная спектральная задача для уравнения $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$* , Функц. анализ и его прил., **22:4** (1988), 11–22.
- [13] R. G. Novikov, *The inverse scattering problem at fixed energy for the three-dimensional Schrödinger equation with an exponentially decreasing potential*, Comm. Math. Phys., **161:3** (1994), 569–595.
- [14] R. G. Novikov, *On determination of the Fourier transform of a potential from the scattering amplitude*, Inverse Problems, **17:5** (2001), 1243–1251.
- [15] R. G. Novikov, *The $\bar{\partial}$ -approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions*, IMRP Int. Math. Res. Pap., **6** (2005), 287–349.
- [16] R. G. Novikov, *New global stability estimates for the Gelfand–Calderon inverse problem*, Inverse Problems, **27:1** (2011), 015001.
- [17] P. Stefanov, *Stability of the inverse problem in potential scattering at fixed energy*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **40:4** (1990), 867–884.

Московский физико-технический институт (НИУ)
 Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique
 e-mail: isaev.m.i@gmail.com

Поступило в редакцию
 7 июня 2011 г.