Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновогода, *Функци. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 3, 37–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:46:49

УДК 517.984.46+517.958+531.33

Принудительная устойчивость простого собственного числа на непрерывном спектре волновода*

© 2013. С. А. НАЗАРОВ

В статье показано, что при выполнении нескольких условий ортогональности и правильном выборе дополнительных параметров малое компактное возмущение оператора Гельмгольца не выводит из спектра простое собственное число, расположенное между порогами непрерывного спектра задачи Дирихле в области с цилиндрическим выходом на бесконечность. Результат получен посредством асимптотического анализа расширенной матрицы рассеяния.

§1. Постановка задачи

Пусть Ω — область в пространстве $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, совпадающая внутри полупространства $\mathbb{R}_+^d = \{x = (y, z) : y = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}, z = x_d > 0\}$ с цилиндром $Q = \{x : y \in \omega, z \in \mathbb{R}\}$ (волноводом); здесь ω — область в $\mathbb{R}^{d-1}$ с границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\overline{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Считаем, что подмножество $G = \{x \in \Omega : z < 0\}$ (резонатор) также имеет компактное замыкание $\overline{G}$. В области Ω рассмотрим спектральную задачу Дирихле для оператора Лапласа Δ , а именно,

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.1)$$

Вместе с задачей (1.1) изучаем возмущенную задачу, зависящую от малого параметра $\varepsilon > 0$ и набора параметров $\tau = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_N) \in \mathbb{R}^{1+N}$, где $\tau_0 = 1$, а остальные числа τ_n малые, порядка ε . В возмущенной спектральной задаче

$$-\Delta u^\varepsilon(x) + \varepsilon L(\tau; x, \nabla) u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \quad u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.2)$$

фигурирует формально самосопряженный дифференциальный оператор

$$\begin{aligned} L(\tau; x, \nabla) &= \tau_0 L_0(x, \nabla) + \dots + \tau_N L_N(x, \nabla), \\ L_n(x, \nabla) &= -\nabla^\top B_n(x) \nabla + \mathbf{b}_n(x)^\top \nabla - \nabla^\top \mathbf{b}_n(x) + b_n(x), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $^\top$ — знак транспонирования, ∇ — оператор-градиент, интерпретируемый как столбец, B_n — симметричная $(d \times d)$ -матрица, а $\mathbf{b}_n$ есть d -столбец, причем их элементы и свободный член b_n — измеримые ограниченные вещественные функции с компактными носителями. Из-за возможных особенностей границы и коэффициентов обе задачи следует понимать как интегральные тождества

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = \lambda(u, v)_\Omega, \quad v \in H_0^1(\Omega), \quad (1.4)$$

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_\Omega + \varepsilon l(\tau; u^\varepsilon, v^\varepsilon) = \lambda^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_\Omega, \quad v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega). \quad (1.5)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00348).

При этом $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$, а $H_0^1(\Omega)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. В интегральном тождестве (1.5) для задачи (1.2) появился дополнительный член

$$l = \tau_0 l_0 + \dots + \tau_N l_N, \quad (1.6)$$

$$l_n(u, v) = (B_n \nabla u, \nabla v)_\Omega + (\mathbf{b}_n^\top \nabla u, v)_\Omega + (u, \mathbf{b}_n^\top \nabla v)_\Omega + (b_n u, v)_\Omega.$$

Полуторалинейная форма в левой части формулы (1.4) замкнута и положительно определена, так как ввиду цилиндрического строения волновода $\{x \in Q : z > 0\}$ и ограниченности резонатора G выполнено неравенство

$$\|u; L_2(\Omega)\| \leq c_{\omega, G} \|\nabla u; L_2(\Omega)\|, \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (1.7)$$

Таким образом, вариационной задаче ставится [1, гл. 10] в соответствие неограниченный положительно определенный самосопряженный оператор A в $L_2(\Omega)$. Точно так же возникает самосопряженный оператор A^ε , который остается положительно определенным при малом ε благодаря неравенству (1.7) и оценкам

$$|l_n(u, u)| \leq c_n (\|u; L_2(\Omega)\|^2 + \|\nabla u; L_2(\Omega)\|^2), \quad n = 0, \dots, N,$$

для форм (1.6). Возмущение происходит на компактном множестве, т. е. при условии, что ε мало (дифференциальный оператор $\Delta_x - \varepsilon L$ должен сохранить эллиптичность), у операторов A и A^ε одинаковый непрерывный спектр $\sigma_c = \sigma_c^\varepsilon = [\Lambda_1, +\infty)$, определяемый исключительно строением области Ω около бесконечности. Здесь Λ_1 — первое (простое и положительное) собственное число задачи

$$-\Delta U(y) = \Lambda U(y), \quad y \in \omega, \quad U(y) = 0, \quad y \in \partial\omega. \quad (1.8)$$

Все ее собственные числа объединим в последовательность

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \dots \leq \Lambda_k \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (1.9)$$

составленную с учетом кратностей, а отвечающие им (вещественные) собственные функции $U_k \in H_0^1(\omega)$ подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(U_j, U_k)_\omega = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}, \quad (1.10)$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера. Числа (1.9) образуют так называемые пороги и разбивают луч $\sigma_c = \sigma_c^\varepsilon$ на интервалы $\Upsilon_p = (\Lambda_p, \Lambda_{p+1})$, непустые при $\Lambda_p < \Lambda_{p+1}$. Еще один интервал $\Upsilon_0 = (0, \Lambda_1)$ включает дискретный спектр σ_d , а при малом ε и возмущенный дискретный спектр σ_d^ε оператора A^ε . Точечные спектры σ_p и σ_p^ε отличаются от дискретных собственными числами, вкрапленными в непрерывный спектр. Решения u и u^ε задач (1.1) и (1.2) из класса $H_0^1(\Omega)$ экспоненциально затухают на бесконечности и называются захваченными волнами.

Известно, что собственное число $\lambda \in \sigma_d \subset \Upsilon_0$ (с кратностью $\varkappa$) устойчиво, т. е. найдутся такие положительные величины ε_λ и C_λ, c_λ , что при $\varepsilon \in (-\varepsilon_\lambda, \varepsilon_\lambda)$ в $C_\lambda \varepsilon$ -окрестности точки λ оператор A^ε имеет в точности $\varkappa$ собственных чисел $\lambda_q^\varepsilon \in \sigma_d^\varepsilon$ и на интервале $(\lambda - c_\lambda, \lambda + c_\lambda)$ других собственных чисел нет. Собственные числа на непрерывном спектре не являются устойчивыми и при сколь угодно малом возмущении могут исчезать из спектра, превращаясь в точки комплексного резонанса (см. [2]–[4] и др.). Основная цель статьи — найти условия,

при которых возмущение $\varepsilon L(\tau; x, \nabla)$ оператора Лапласа не выводит из спектра простое собственное число, расположенное между порогами,

$$\lambda \in (\Lambda_N, \Lambda_{N+1}) \quad (\Lambda_N < \Lambda_{N+1}). \quad (1.11)$$

Это делается при помощи анализа вспомогательного объекта — расширенной матрицы рассеяния S^ε , введенной в [5] для конических областей и в [6] для цилиндрических. Некоторый блок этой матрицы служит идентификатором точечного спектра (см. [6] и далее теорему 5). Появление одного и того же числа N в формулах (1.11) и (1.3) не случайно: именно N условий ортогональности (6.8), наложенных на «основное возмущение» εl_0 , и правильный подбор дополнительных малых параметров $\tau_1, \dots, \tau_N = O(\varepsilon)$ («точная настройка» всей формы εl из (1.6) при учете требований (6.9)) обеспечивают сохранение собственного числа в непрерывном спектре. Вопрос о компенсации неустойчивости кратного собственного числа или группы простых остался открытым.

Задачу (1.2) можно получить из задачи (1.1) в области $\Omega(\varepsilon)$ с локально возмущенной границей путем спрямления последней. Соответствующие построения приведены в работах [7], [8], посвященных, в основном, исследованию асимптотики устойчивых собственных чисел из дискретного спектра.

§2. Волны и операторы задач в весовых пространствах

Обозначим через $W_\beta^1(\Omega)$ весовое пространство Соболева с показателем $\beta \in \mathbb{R}$, которое состоит из функций $u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega})$, обладающих конечной нормой $\|u; W_\beta^1(\Omega)\| = \|\exp(\beta z)u; H^1(\Omega)\|$, а через $W_{\beta,0}^1(\Omega)$ — подпространство функций, обращающихся в нуль на поверхности $\partial\Omega$ (оно может быть получено замыканием по той же норме линейала $C_c^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями). Зафиксируем параметр (1.11). В интегральном тождестве

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega - \lambda(u, v)_\Omega = f(v), \quad v \in W_{\beta,0}^1(\Omega), \quad (2.1)$$

под $f \in (W_{\beta,0}^1(\Omega))^*$ понимается антилинейный непрерывный функционал на пространстве $W_{\beta,0}^1(\Omega)$, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — расширение скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ до двойственности между подходящими весовыми пространствами Лебега, а само решение u ищется в классе $W_{\beta,0}^1(\Omega)$. Задача (2.1) порождает отображение

$$W_{\beta,0}^1(\Omega) \ni u \mapsto \mathcal{A}_\beta u = f \in (W_{\beta,0}^1(\Omega))^*,$$

непрерывное при любом весовом показателе $\beta \in \mathbb{R}$. Другие свойства оператора $\mathcal{A}_\beta$, а также оператора $\mathcal{A}_\beta^\varepsilon$ (обозначение понятно) существенно зависят от β . По определению $\mathcal{A}_\beta$ и $\mathcal{A}_{-\beta}$ — взаимно сопряженные операторы.

В бесконечном цилиндре Q существуют волны: осциллирующие

$$w_n^\pm(x) = (4(\lambda - \Lambda_n))^{-1/4} \exp(\pm iz \sqrt{\lambda - \Lambda_n}) U_n(y), \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

и экспоненциальные

$$v_j^\pm(x) = (4(\Lambda_j - \lambda))^{-1/4} \exp(\pm z \sqrt{\Lambda_j - \lambda}) U_j(y), \quad j = N+1, N+2, \dots \quad (2.3)$$

Каждая из них — решение однородной задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в цилиндре Q . После умножения на подходящую срезающую функцию

$\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ волны (2.2) попадают в пространство $W_{\beta,0}^1(\Omega)$ при любом $\beta < 0$, а волны (2.3) — при $\beta < \mp\sqrt{\Lambda_j - \lambda}$. Удобно считать, что

$$\chi(z) = 1 \quad \text{при } z > \ell + 1, \quad \chi(z) = 0 \quad \text{при } z < \ell, \quad (2.4)$$

причем $\chi = 0$ на резонаторе G и на носителях коэффициентов операторов (1.3).

Теория эллиптических задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см., например, книгу [9, гл. 3, 5] и цитированную в ней литературу) устанавливает запретные весовые показатели β , при которых операторы $\mathcal{A}_\beta$ и $\mathcal{A}_\beta^\varepsilon$ теряют фредгольмовость. Эти показатели тесно связаны с показателями экспонент у волн (2.2) и (2.3). Сформулируем результаты, которые можно найти в гл. 5 из [9] или обзорах [10], [11], и отметим, что названная теория обычно имеет дело с краевыми задачами в классической постановке, но переход к обобщенным решениям не встречает сколь-нибудь заметных препятствий (ср. [11]).

Теорема 1. (1) Пусть λ — число (1.11), а γ удовлетворяет условию

$$\gamma \in \Upsilon(\lambda) := (\sqrt{\Lambda_J - \lambda}, \sqrt{\Lambda_{J+1} - \lambda}) \quad (J > N, \Lambda_J < \Lambda_{J+1}). \quad (2.5)$$

Операторы $\mathcal{A}_{\pm\gamma}$ фредгольмовы, и размерности их ядер связаны соотношением $\dim \ker \mathcal{A}_{-\gamma} = \dim \ker \mathcal{A}_\gamma + J$. При $\gamma = \pm\sqrt{\Lambda_{J+1} - \lambda}$ или $\gamma = \pm\sqrt{\Lambda_J - \lambda}$ операторы $\mathcal{A}_{\pm\gamma}$ теряют фредгольмовость, так как их образы незамкнуты.

(2) Пусть $u \in W_{-\gamma,0}^1(\Omega)$ — решение задачи (2.1) с весовым показателем $\beta = -\gamma$ и «быстро затухающей» правой частью $f \in (W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*$ (последнее пространство включено в $(W_{\gamma,0}^1(\Omega))^* \ni \mathcal{A}_{-\gamma}u$). Тогда справедливо разложение

$$u(x) = \chi(x) \sum_{\pm} \left(\sum_{n=1}^N a_n^{\pm} w_n^{\pm}(x) + \sum_{j=N+1}^J b_j^{\pm} v_j^{\pm}(x) \right) + \tilde{u}(x), \quad (2.6)$$

а коэффициенты $a_n^{\pm}$, $b_j^{\pm}$ и остаток $\tilde{u} \in W_{\gamma,0}^1(\Omega)$ подчинены неравенству

$$\left(\sum_{\pm} \left(\sum_{n=1}^N |a_n^{\pm}|^2 + \sum_{j=N+1}^J |b_j^{\pm}|^2 \right) + \|\tilde{u}; W_{\gamma}^1(\Omega)\|^2 \right)^{1/2} \leq c_{\gamma} (\|f; (W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*\| + \|u; W_{-\gamma}^1(\Omega)\|). \quad (2.7)$$

Разложение (2.6) также может быть получено методом Фурье и обеспечивает формулу для размерностей ядер из теоремы 1, в которой последнее слагаемое есть не что иное, как половина количества волн, возникающих в разложении.

§3. Пространства с отделенной асимптотикой и матрица рассеяния

Пусть $\mathbf{W}_{\gamma}^1(\Omega)$ — прообраз подпространства $(W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*$ для оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}$. По теореме 1 этот линейал состоит из функций u , допускающих представление (2.6), и потому он назван [10] весовым классом с отделенной асимптотикой. Взяв левую часть формулы (2.7) в качестве нормы $\|u; \mathbf{W}_{\gamma}^1(\Omega)\|$, превращаем $\mathbf{W}_{\gamma}^1(\Omega)$ в гильбертово пространство. Сужение $\mathbf{A}_{\gamma}$ оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}$ с $W_{-\gamma,0}^1(\Omega)$ на $\mathbf{W}_{\gamma}^1(\Omega)$ наследует все свойства этого оператора, в частности, фредгольмовость и ядро с коядром.

Зафиксируем весовой показатель $\beta \in (\sqrt{\lambda - \Lambda_N}, \sqrt{\Lambda_{N+1} - \lambda})$. Теорема об асимптотике (см., например, [9, теорема 5.1.4]), аналогичная второму утверждению теоремы 1, дает такие формулы для решения $u \in W_{-\beta,0}^1(\Omega)$ задачи (2.1) с опять-таки «более быстро затухающей» правой частью $f \in (W_{-\beta,0}^1(\Omega))^*$:

$$u(x) = \chi(x) \sum_{\pm} \sum_{n=1}^N a_n^{\pm} w_n^{\pm}(x) + \tilde{u}(x), \quad (3.1)$$

$$\left(\sum_{\pm} \sum_{n=1}^N |a_n^{\pm}|^2 + \|\tilde{u}; W_{\beta}^1(\Omega)\|^2 \right)^{1/2} \leq c_{\beta} (\|f; (W_{-\beta,0}^1(\Omega))^*\| + \|u; W_{-\beta}^1(\Omega)\|).$$

Подчеркнем, что из-за уменьшения весового показателя разложение (3.1) не содержит волны (2.3), а у самого решения u нет экспоненциального роста.

В соответствии с волновым числом $\pm\sqrt{\lambda - \Lambda_n}$ осциллирующие волны w_n^+ и w_n^- из (2.2) называются уходящими и приходящими соответственно. Дополним задачу (1.1) «физическими» условиями излучения и положим

$$(\mathbf{W}_{\beta}^1(\Omega))^+ = \{u \in \mathbf{W}_{\beta}^1(\Omega) : a_n^- = 0, n = 1, \dots, N\}. \quad (3.2)$$

Иными словами, в разложениях (3.1) функций из пространства (3.2) разрешены только уходящие волны. Очередное утверждение известно, но оно вытекает и из теоремы 3, доказываемой далее и обслуживающей более общую ситуацию.

Предложение 2. (1) В подпространстве $\ker \mathcal{A}_{-\beta} \ominus \ker \mathcal{A}_{\beta}$, имеющем размерность N , можно ввести базис $\zeta_1, \dots, \zeta_N$, удовлетворяющий соотношению

$$\zeta_n(x) = \chi(x) w_n^-(x) + \chi(x) \sum_{m=1}^N s_{mn} w_m^+(x) + \tilde{\zeta}_n(x), \quad (3.3)$$

где $\tilde{\zeta}_n \in W_{\beta,0}^1(\Omega)$, а $s = (s_{mn})$ — унитарная $(N \times N)$ -матрица рассеяния.

(2) У задачи (2.1) с правой частью $f \in (W_{-\beta,0}^1(\Omega))^*$ есть решение $u \in (\mathbf{W}_{\beta}^1(\Omega))^+$ в том и только в том случае, когда $f(v) = 0$ при всех $v \in \ker \mathcal{A}_{\beta}$. Это решение определено с точностью до слагаемого из подпространства $\ker \mathcal{A}_{\beta}$.

Аналогичные манипуляции с оператором $\mathcal{A}_{-\beta}^{\varepsilon}$ приводят к фредгольмову отображению $\mathbf{A}_{\beta}^{\varepsilon} : \mathbf{W}_{\beta}^1(\Omega) \rightarrow (W_{-\beta,0}^1(\Omega))^*$ и матрице рассеяния s^{ε} , причем предложение 2 сохраняет силу и для оператора возмущенной задачи (1.2).

§4. Расширенная матрица рассеяния и ее считающее свойство

Классификация [12] (см. также [9, §5.3]) волн (2.2) использует антиэрмитову форму

$$\mathbf{q}_R(u, v) = \int_{\omega} (\overline{v(y, R)} \partial_z u(y, R) - u(y, R) \overline{\partial_z v(y, R)}) dy, \quad (4.1)$$

которая возникает в формуле Грина как поверхностный интеграл и поэтому не зависит от параметра $R > \ell + 1$ для решений u и v уравнения Гельмгольца в полуцилиндре $Q_{\ell} = \{x \in Q : z > \ell + 1\}$, обращающихся в нуль на его боковой поверхности (в этом случае обозначаем форму символом $\mathbf{q}$ без индекса R). Согласно [12] и [9, §5.3], волна w — уходящая, если $\text{Im } \mathbf{q}(w, w) > 0$, и приходящая,

если $\text{Im } \mathbf{q}(w, w) < 0$. В работе [6] были предложены к рассмотрению линейные комбинации (пакеты) экспоненциальных волн (2.3)

$$w_j^\pm(x) = 2^{-1/2}(v_j^+(x) \mp i v_j^-(x)), \quad j = N+1, N+2, \dots \quad (4.2)$$

Обе группы волн (2.2) и (4.2) удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{q}(w_j^\pm, w_k^\pm) = \pm i \delta_{j,k}, \quad \mathbf{q}(w_j^\pm, w_k^\mp) = 0, \quad j, k = 1, \dots, J, \quad (4.3)$$

обеспеченным, в частности, условиями ортогональности и нормировки (1.10). Поэтому и при $j = N+1, \dots, J$ экспоненциальные волновые пакеты w_j^+ и w_j^- мы называем (условно) уходящими и приходящими соответственно.

Пусть λ — собственное число оператора A с кратностью $\varkappa$. Зафиксируем весовой показатель (2.5) так, чтобы все соответствующие собственные функции $u_1, \dots, u_\varkappa \in H_0^1(\Omega)$ не принадлежали $W_{\gamma,0}^1(\Omega)$. Такой показатель γ существует потому, что любое собственное число задачи (1.1) имеет конечную кратность (см. [9, замечание 3.1.5]) и не могут обратиться в нуль все коэффициенты ряда Фурье по затухающим волнам (2.3) для функции $u_k \neq 0$ в полуцилиндре Q_ℓ (в противном случае $u_k = 0$ всюду в Ω). Тогда $\dim \ker \mathcal{A}_\gamma = 0$ и $\dim \ker \mathcal{A}_{-\gamma} = \dim \text{coker } \mathcal{A}_\gamma = J$ по теореме 1. Равенством (3.2) с понятными изменениями введем подпространство $(\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+ \subset \mathbf{W}_\gamma^1(\Omega)$, разрешающее в отделенной асимптотике только уходящие волны $w_1^+, \dots, w_J^+$. Сужение $\mathbf{A}_\gamma^+$ оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}$ на $(\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+$ — фредгольмов оператор. В следующем утверждении проверяем, что $\mathbf{A}_\gamma^+$ — изоморфизм, а также определяем расширенную матрицу рассеяния S .

Теорема 3. (1) При любом $f \in (W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*$ задача (2.1) с $\beta = -\gamma$ имеет единственное решение $u \in (\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+$, причем $\|u; (\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+\| \leq c \|f; (W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*\|$.

(2) В ядре $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}$ существует базис $Z_1, \dots, Z_J \in \mathbf{W}_\gamma^1(\Omega)$, для которого

$$Z_j(x) = \chi(x) w_j^-(x) + \chi(x) \sum_{k=1}^J S_{kj} w_k^+(x) + \tilde{Z}_j(x), \quad (4.4)$$

где $\tilde{Z}_j \in W_{\gamma,0}^1(\Omega)$, а $S = (S_{kj})$ — унитарная $(J \times J)$ -матрица.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из второго, так как

$$\text{Ind } \mathbf{A}_\gamma^+ = \text{Ind } \mathcal{A}_{-\gamma} - \dim(\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega) \ominus (\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+) = J - J = 0.$$

Пусть в подпространстве $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}$ нет базиса, элементы которого допускают разложения (4.4). Тогда в нем найдется нетривиальный элемент $U \in (\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+$. Подставим его в формулу Грина на области $\Omega(R) = \{x \in \Omega : z < R\}$ и получим

$$0 = \mathbf{q}(U, U) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbf{q}\left(\sum_{j=1}^J a_j^+ w_j^+ + \tilde{U}, \sum_{j=1}^J a_j^+ w_j^+ + \tilde{U}\right) = i \sum_{j=1}^J |a_j^+|^2.$$

Экспоненциально малый остаток $\tilde{U} \in W_{\gamma,0}^1(\Omega)$ устранен предельным переходом, т.е. последнее равенство — следствие условий (4.3). Итак, все коэффициенты a_j^+ аннулируются, а значит, $U \in \ker \mathcal{A}_\gamma = \{0\}$ и $U = 0$. Аналогичные выкладки для функций (4.4) показывают, что форма $\mathbf{q}(Z_j, Z_k)$, равная нулю, принимает

вид

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbf{q} \left(w_j^- + \sum_{m=1}^J S_{mj} w_m^+, w_k^- + \sum_{l=1}^J S_{lk} w_l^+ \right) = -i\delta_{j,k} + i \sum_{m,l=1}^J S_{mj} \overline{S_{lk}} \delta_{m,l}.$$

Таким образом, $S^*S = \mathbb{I}_J$ — единичная $(J \times J)$ -матрица. $\square$

При $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и малом $\varepsilon_0 > 0$ возмущенный оператор $\mathbf{A}_\gamma^{\varepsilon+} : (\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+ \rightarrow (W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*$ остается изоморфизмом и, в свою очередь, порождает расширенную матрицу рассеяния S^ε , составленную из коэффициентов в следующих, аналогичных (4.4), формулах для решений $Z_1^\varepsilon, \dots, Z_J^\varepsilon$ задачи (1.2):

$$\mathbf{Z}_j^\varepsilon := Z_j^\varepsilon - \chi w_j^- = \chi \sum_{k=1}^J S_{kj}^\varepsilon w_k^+ + \tilde{Z}_j^\varepsilon, \quad \tilde{Z}_j^\varepsilon \in W_{\gamma,0}^1(\Omega). \quad (4.5)$$

Подчеркнем, что благодаря компактности коэффициентов операторов (1.3) в формулах (4.4) и (4.5) фигурирует один и тот же набор волн.

Лемма 4. Матрица S^ε аналитически зависит от малых параметров ε и $\varepsilon\boldsymbol{\tau}'$, где $\boldsymbol{\tau}' = (\tau_1, \dots, \tau_N)$. Кроме того, $S^0 = S$.

Доказательство. Прежде всего, справедливо представление $\mathbf{A}_\gamma^{\varepsilon+} = \mathbf{A}_\gamma^+ + \mathbf{B}_\gamma^+(\varepsilon\boldsymbol{\tau})$, где $\mathbf{B}_\gamma^+(\varepsilon\boldsymbol{\tau}) : (\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+ \rightarrow (W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*$ — непрерывное отображение, линейное относительно $\varepsilon\boldsymbol{\tau}$, причем $(\mathbf{B}_\gamma^+(\varepsilon\boldsymbol{\tau})u, v)_\Omega = \varepsilon l(u, v)$. Далее, оператор $\mathbf{A}_\gamma^+$, а при малом ε и оператор $\mathbf{A}_\gamma^{\varepsilon+}$ — изоморфизмы. Кроме того, разности (4.5) суть решения задач Дирихле в Ω для уравнений $-\Delta_x \mathbf{Z}_j^\varepsilon + \varepsilon L \mathbf{Z}_j^\varepsilon - \lambda \mathbf{Z}_j^\varepsilon = \mathbf{F}_j := [\Delta, \chi] w_j^- \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ (напоминаем, что $l(\chi w_j^-, v) = 0$, согласно выбору срезающей функции χ , коммутатор которой с лапласианом обозначен через $[\Delta, \chi]$). Наконец, коэффициенты разложений названных решений $\mathbf{Z}_j^\varepsilon = (\mathbf{A}_\gamma^{\varepsilon+})^{-1} \mathbf{F}_j \in (\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+$ вычисляются по формулам $S_{kj}^\varepsilon = -i\mathbf{q}(Z_j^\varepsilon - \chi w_j^-, \chi w_k^+)$, проистекающим из соотношений (4.3) и обеспечивающим нужную аналитичность. $\square$

Следующий критерий существования экспоненциально затухающих решений задачи (1.2) установлен в [6], но его краткое доказательство приводится для удобства читателя. Укажем нужные обозначения. Разобьем матрицу S^ε на блоки:

$$S^\varepsilon = \begin{pmatrix} S_{bb}^\varepsilon & S_{b\ddagger}^\varepsilon \\ S_{\ddagger b}^\varepsilon & S_{\ddagger\ddagger}^\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Здесь S_{bb}^ε и $S_{\ddagger\ddagger}^\varepsilon$ — матрицы с размерами $N \times N$ и $(J-N) \times (J-N)$ соответственно. Определим еще строки решений $Z_b^\varepsilon = (Z_1^\varepsilon, \dots, Z_N^\varepsilon)$, $Z_{\ddagger}^\varepsilon = (Z_{N+1}^\varepsilon, \dots, Z_J^\varepsilon)$ и $Z^\varepsilon = (Z_b^\varepsilon, Z_{\ddagger}^\varepsilon)$ и составим строки такого же строения из волн $w_j^\pm$.

Теорема 5. (1) Справедливы равенства

$$\dim \ker(S_{\ddagger\ddagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N}) = \dim \ker(S^\varepsilon + \mathbb{I}_J) - \dim \ker(s^\varepsilon + \mathbb{I}_N) = \dim \ker(A^\varepsilon - \lambda). \quad (4.7)$$

Правая часть — кратность собственного числа λ , но ноль в случае $\lambda \notin \sigma_p^\varepsilon$.

(2) Унитарная матрица S^ε симметрична, т.е. $S^\varepsilon = (S^\varepsilon)^\top$.

Доказательство. Новая запись формул (4.4) для решений $Z_j^\varepsilon \in W_{-\gamma,0}^1(\Omega)$ возмущенной задачи (1.2) выглядит следующим образом:

$$(Z_b^\varepsilon, Z_{\ddagger}^\varepsilon) = \chi w^- + \chi w^+ S^\varepsilon + \dots = \chi(w_b^-, w_{\ddagger}^-) + \chi(w_b^+, w_{\ddagger}^+) S^\varepsilon + \dots; \quad (4.8)$$

при этом многоточие заменяет элементы пространства $W_{\gamma,0}^1(\Omega)$. Теперь второе утверждение обеспечено двумя наблюдениями: $\overline{w_j^\pm} = w_j^\mp$, согласно (2.2), (4.2), и

$$\overline{Z^\varepsilon}(\overline{S^\varepsilon})^{-1} = \chi(\overline{w^-} + \overline{w^+} \overline{S^\varepsilon})(\overline{S^\varepsilon})^{-1} + \dots = \chi(w^+(\overline{S^\varepsilon})^{-1} + w^-) + \dots \quad (4.9)$$

Напоминаем, что коэффициенты всех дифференциальных операторов вещественные. Строка (4.9) решений задачи (1.2) обладает таким же набором входящих волн, что и у строки (4.8). По теореме 3 эти строки совпадают, и выполнено соотношение $\overline{S^\varepsilon} = (S^\varepsilon)^{-1} = (\overline{S^\varepsilon})^\top$, влекущее за собой второе утверждение.

Пусть $a_\dagger^\varepsilon \in \ker(S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})$. Дополним столбец сверху нулями до высоты J — обозначения $a_b^\varepsilon = 0 \in \mathbb{C}^N$ и $a^\varepsilon \in \mathbb{C}^J$ понятны. В силу унитарности симметричной матрицы (4.6) и равенства $S_{\dagger\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon + a_\dagger^\varepsilon = 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} |a_\dagger^\varepsilon|^2 &= |a^\varepsilon|^2 = |S^\varepsilon a^\varepsilon|^2 = |S_{b\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon|^2 + |S_{\dagger\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon|^2 = |S_{b\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon|^2 + |a_\dagger^\varepsilon|^2, \\ S_{b\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon &= 0 \in \mathbb{C}^N \quad \text{при } a_\dagger^\varepsilon \in \ker(S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Формула (4.10) имеет два важных последствия. Во-первых,

$$\begin{aligned} Z^\varepsilon a^\varepsilon &= Z_\dagger^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon = \chi(w_\dagger^- a_\dagger^\varepsilon + w_b^+ S_{b\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon + w_\dagger^+ S_{\dagger\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon) + \dots = \chi(w_\dagger^- a_\dagger^\varepsilon - w_\dagger^+ a_\dagger^\varepsilon) + \dots \\ &= 2^{-1/2} \chi((v_\dagger^+ + iv_\dagger^-) a_\dagger^\varepsilon - (v_\dagger^+ - iv_\dagger^-) a_\dagger^\varepsilon) + \dots = 2^{1/2} i \chi v_\dagger^- a_\dagger^\varepsilon + \dots, \end{aligned}$$

т. е. $Z^\varepsilon a^\varepsilon \in W_{\beta,0}^1(\Omega)$ — захваченная волна, так как функции (2.3) в строке $v_\dagger^-$ экспоненциально затухают. Во-вторых, соотношение (4.10) вместе с равенством $S_{\dagger b}^\varepsilon = (S_{b\dagger}^\varepsilon)^\top$ показывает, что $(N \times N)$ -матрица $\Sigma^\varepsilon = -S_{b\dagger}^\varepsilon (S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})^{-1} S_{\dagger b}^\varepsilon$ определена корректно: под $(S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})^{-1}$ понимаем обратный оператор, определенный на образе $(S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})\mathbb{C}^{J-N}$ и действующий на ортогональное дополнение $\ker(S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})$ до $\mathbb{C}^{J-N}$. Если $a_b^\varepsilon \in \mathbb{C}^N$ — собственный вектор матрицы s^ε , отвечающий ее собственному числу -1 , то столбец a^ε , составленный из $a_b^\varepsilon \in \mathbb{C}^N$ и $a_\dagger^\varepsilon = -(S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})^{-1} S_{\dagger b}^\varepsilon a_b^\varepsilon \in \mathbb{C}^{J-N}$, — собственный для матрицы S^ε , отвечающий тому же собственному числу -1 и ортогональный подпространству $\{0\}^N \times \ker(S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})$ по определению обратного оператора $(S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})^{-1}$. Эти факты обеспечивают первое равенство в (4.7).

Связь $s^\varepsilon = S_{bb}^\varepsilon + \Sigma^\varepsilon$ матриц рассеяния, обычной и расширенной, устанавливается сравнением разложений (3.3) и

$$\begin{aligned} Z_b^\varepsilon - Z_\dagger^\varepsilon (S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})^{-1} S_{\dagger b}^\varepsilon &= \chi w_b^- + \chi w_b^+ (S_{bb}^\varepsilon - S_{b\dagger}^\varepsilon (S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})^{-1} S_{\dagger b}^\varepsilon) \\ &+ 2^{-1/2} \chi v_\dagger^+ (S_{\dagger b}^\varepsilon - (\mathbb{I}_{J-N} + S_{\dagger\dagger}^\varepsilon) (S_{\dagger\dagger}^\varepsilon + \mathbb{I}_{J-N})^{-1} S_{\dagger b}^\varepsilon) + \dots \quad (4.11) \end{aligned}$$

В формуле (4.11) (а также и в следующей) многоточие заменяет слагаемое из весового класса $W_{\beta,0}^1(\Omega)$. Правый множитель при $v_\dagger^+$ обращается в нуль и возникает при извлечении растущих волн $\chi v_\dagger^+$ из линейных комбинаций (4.2), а множитель при w_b^+ совпадает с матрицей рассеяния s^ε , так как строка (4.11) может отличаться от строки ζ^ε лишь слагаемыми из подпространства $\ker \mathcal{A}_\beta$, не влияющими на коэффициенты при осциллирующих волнах $w_b^\pm$.

Наконец, если решение $Z^\varepsilon a^\varepsilon$ задачи (1.2) исчезает при $z \rightarrow +\infty$, то в формуле

$$\begin{aligned} Z^\varepsilon a^\varepsilon &= Z_b^\varepsilon a_b^\varepsilon + Z_\dagger^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon \\ &= \chi w_b^- a_b^\varepsilon + \chi w_b^+ (S_{bb}^\varepsilon a_b^\varepsilon + S_{b\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon) + 2^{-1/2} \chi v_\dagger^+ (a_\dagger^\varepsilon + S_{\dagger\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon + S_{\dagger b}^\varepsilon a_b^\varepsilon) + \dots \end{aligned}$$

обращаются в нуль множители при осциллирующих волнах w_b^- , w_b^+ и экспоненциально растущих волнах $v_\dagger^+$. Первое и третье требования приводят к соотношениям $a_b^\varepsilon = 0$ и $S_{\dagger\dagger}^\varepsilon a_\dagger^\varepsilon + a_\dagger^\varepsilon = 0$, но тогда второе выполнено благодаря (4.10). Итак, проверены оба равенства в (4.7). $\square$

Замечание 6. Формула (4.7) верна лишь при условии $\dim \ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon = 0$. Если же оно нарушено, то положительность правой части формулы (4.7) перестает быть критерием существования захваченных волн, так как матрица S^ε не содержит информации о «сверхбыстро» затухающих при $z \rightarrow +\infty$ решениях. Игнорирование этого обстоятельства в вычислительных схемах приводит к ошибкам (они обсуждаются, например, в статье [13]), и в общей ситуации правильно применять безусловный критерий [13], оперирующий с оператором фиктивного рассеяния — бесконечномерным аналогом расширенной матрицы рассеяния.

§5. Подготовительная работа

Пусть собственное число (1.11) задачи (1.4) простое. Зафиксируем числа J и γ из (2.5) так, чтобы соответствующая собственная функция $\hat{u}^0 \in H_0^1(\Omega)$, вещественная и нормированная в $L_2(\Omega)$, имела вид

$$\hat{u}^0 = \chi \hat{a}^0 v_J^- + \tilde{u}^0 \quad (\hat{a}^0 \neq 0, \tilde{u}^0 \in W_{\gamma,0}^1(\Omega)), \quad (5.1)$$

предположив дополнительно для простоты (ср. конец §7), что собственное число Λ_J задачи (1.8) также простое. Соорудим новое пространство $(\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{01}(\Omega))^+$ с отделенной асимптотикой из функций, допускающих представление

$$u = \chi \left(\sum_{n=1}^N a_n^+ w_n^+ + a_J w_J^+ \right) + \tilde{u} \quad \left(\tilde{u} = \chi \sum_{j=N+1}^{J-1} b_n^- v_n^- + \tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{u}} \in W_{\gamma,0}^1(\Omega) \right). \quad (5.2)$$

Оба остатка $\tilde{u} \in W_{\beta,0}^1(\Omega)$ и $\tilde{\tilde{u}} \in W_{\gamma,0}^1(\Omega)$ экспоненциально затухают, однако по сравнению с элементами пространства (3.2) разложение функции u из формулы (5.2) включает волновой пакет w_J^+ , порожденный главным членом асимптотики (5.1) собственной функции $\hat{u}^0$. То же самое соотношение для u можно получить заменой в разложении функции из класса $(\mathbf{W}_\gamma^1(\Omega))^+$ волновых пакетов $w_{N+1}^-, \dots, w_{J-1}^-$ их экспоненциально затухающими составляющими $v_{N+1}^-, \dots, v_{J-1}^-$ (ср. определение (4.2)), которые отсутствуют в асимптотике (5.1) собственной функции $\hat{u}^0$ — именно поэтому при анализе устойчивости простого собственного числа (1.11) без них можно обойтись. Вместе с тем, как и ранее $\mathbf{A}_\gamma^+$ в §4, сужение $\hat{\mathbf{A}}_\gamma^{0+}$ оператора $\mathcal{A}_{-\gamma}$ с $W_{-\gamma,0}^1(\Omega)$ на $(\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{01}(\Omega))^+$ оказывается изоморфизмом. Дело в том, что по предположениям о параметре λ и собственной функции (5.1) оператор $\hat{\mathbf{A}}_\gamma^{0+}$ — мономорфизм, а затухающие волны аннулируют форму (4.1), и поэтому новое качество остатка $\tilde{u}$ в разложении (5.2) не препятствует буквальному повторению доказательства обоих пунктов теоремы 3.

Введем обозначения $\widehat{w}_j^{0\pm}$ для волн (4.2). Видоизмененные разложения (4.4) новых решений $\widehat{Z}_j^0$ задачи (1.2) принимают вид

$$\widehat{Z}_j^\varepsilon = \chi \widehat{w}_j^{\varepsilon-} + \chi \left(\sum_{n=1}^N \widehat{S}_{nj}^\varepsilon \widehat{w}_n^{\varepsilon+} + \widehat{S}_{Jj}^\varepsilon \widehat{w}_J^{\varepsilon+} \right) + \widetilde{Z}_j^\varepsilon, \quad j = 1, \dots, N, J, \quad (5.3)$$

где пока следует положить $\varepsilon = 0$. При этом $\widehat{Z}_j^0 = \widehat{Z}_j^0 - \chi \widehat{w}_j^{0-} \in (\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{01}(\Omega))^+$, остатки $\widetilde{Z}_j^0$ приобретают те же качества, что и ранее $\widetilde{u}$ в (5.2), а коэффициенты $\widehat{S}_{kj}^0$ образуют унитарную матрицу $\widehat{S}^0$ размера $(N+1) \times (N+1)$. Упомянутые решения определены равенствами

$$\widehat{Z}_n^0 = \zeta_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad \widehat{Z}_J^0 = 2^{1/2} i (\widehat{a}^0)^{-1} \widehat{u}^0, \quad (5.4)$$

где ζ_n — решение, указанное предложением 2, причем благодаря имеющемуся произволу в выборе ζ_n , $n = 1, \dots, N$, — слагаемому $c_n \widehat{u}^0$ — коэффициенты при волне v_J^- сделаны нулевыми. В итоге, согласно соотношениям (3.3) и (5.1), имеем

$$\widehat{S}_{nm}^0 = s_{nm}, \quad \widehat{S}_{nJ}^0 = \widehat{S}_{Jn}^0 = 0, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad \widehat{S}_{JJ}^0 = -1. \quad (5.5)$$

Сокращение размеров новой расширенной матрицы рассеяния $\widehat{S}^0$ и явные формулы (5.5) значительно упрощают выкладки. Удобно использовать такое разбиение матрицы (как и в определении (5.3) считаем, что пока в нем $\varepsilon = 0$):

$$\widehat{S}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \widehat{S}_{bb}^\varepsilon & \widehat{S}_{bJ}^\varepsilon \\ \widehat{S}_{Jb}^\varepsilon & \widehat{S}_{JJ}^\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

По спектральному параметру

$$\lambda^\varepsilon = \lambda + \varepsilon \mu \quad (\mu \in [-\mu_0, \mu_0]) \quad (5.7)$$

определим аналогичные (2.2), (2.3) и (4.2) волны $\widehat{w}_1^{\varepsilon\pm}, \dots, \widehat{w}_N^{\varepsilon\pm}, \widehat{v}_{N+1}^{\varepsilon\pm}, \dots, \widehat{v}_{J-1}^{\varepsilon\pm}$ и $\widehat{w}_J^{\varepsilon\pm}$. Если параметр ε мал, а величина $\mu_0 > 0$ и компоненты вектора $\boldsymbol{\tau}'$ равномерно ограничены, то оператор $\widehat{\mathbf{A}}_\gamma^{\varepsilon+}$, являясь малым возмущением оператора $\widehat{\mathbf{A}}_\gamma^{0+}$, остается изоморфизмом, причем его норма и норма обратного к нему оператора равномерно ограничены относительно параметров $\Theta = (\tau_1, \dots, \tau_N, \mu) \in \mathbb{B}_\rho^{N+1}$ (шар с некоторым фиксированным радиусом $\rho > 0$). Проверка очередного утверждения дословно повторяет доказательства леммы 4 и теоремы 5.

Лемма 7. Новая расширенная матрица рассеяния $\widehat{S}^\varepsilon$ из (5.6) аналитически зависит от малых ε , $\varepsilon \mu$ и $\varepsilon \boldsymbol{\tau}' = (\varepsilon \tau_1, \dots, \varepsilon \tau_N)$. Кроме того, $\widehat{S}^\varepsilon = (\widehat{S}^\varepsilon)^\top$.

Найдем асимптотику столбца $\widehat{S}_J^\varepsilon$ матрицы (5.6), порожденного решением $\widehat{Z}_J^\varepsilon$ задачи (1.5) и состоящего из столбца $\widehat{S}_{bJ}^\varepsilon \in \mathbb{C}^N$ и скаляра $\widehat{S}_{JJ}^\varepsilon \in \mathbb{C}$. Оценки

$$|\widehat{S}_{nm}^\varepsilon - s_{nm}| \leq c\varepsilon \quad (5.8)$$

элементов симметричной подматрицы $\widehat{S}_{bb}^\varepsilon$ обеспечены леммой 7 и равенствами (5.5); при этом множитель c не зависит от $\Theta \in \mathbb{B}_\rho^{N+1}$. В силу соотношений (5.7) и (1.3), (1.6) сами решения (5.3) и поправочные слагаемые S'_{JJ} в формуле

$$\widehat{S}^\varepsilon = \widehat{S}^0 + \varepsilon S' + \widetilde{S}^\varepsilon, \quad |\widetilde{S}^\varepsilon| \leq c\varepsilon^2, \quad (5.9)$$

принимают соответственно вид

$$\widehat{Z}_J^\varepsilon = \widehat{Z}_J^0 + \varepsilon Z_J' + \widetilde{Z}_J^\varepsilon, \quad Z_J' = Z_J^{(0)} + \tau_1 Z_J^{(1)} + \dots + \tau_N Z_J^{(N)} + \mu Z_J^{(\mu)}, \quad (5.10)$$

$$S_{jJ}' = S_{jJ}^{(0)} + \tau_1 S_{jJ}^{(1)} + \dots + \tau_N S_{jJ}^{(N)} + \mu S_{jJ}^{(\mu)}, \quad j = 1, \dots, N, J; \quad (5.11)$$

при этом $\widetilde{Z}_J^\varepsilon$ — малый остаток, который еще предстоит оценить. Кроме того, $S_{jJ}^{(n)}$, $n = 0, \dots, N$, — множители при $\widehat{w}_j^{0+}$ в решении $Z_J^{(n)} \in (\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{01}(\Omega))^+$ задачи

$$(\nabla Z_J^{(n)}, \nabla v)_\Omega - \lambda(Z_J^{(n)}, v)_\Omega = -l_n(\widehat{Z}_J^0, v), \quad v \in W_{-\gamma,0}^1(\Omega). \quad (5.12)$$

Наконец, последняя функция в (5.10) и коэффициенты $\mu S_{jJ}^{(\mu)}$ ее разложения в (5.11) появляются из-за возмущения (5.7) спектрального параметра. Подставив (5.10) и (5.7) в равенства (1.2) и выделив множители при μ , приходим к задаче

$$-\Delta_x Z_J^{(\mu)} - \lambda Z_J^{(\mu)} = \widehat{Z}_J^0 = \sqrt{2}i(\widehat{a}^0)^{-1}\widehat{u}^0 \quad \text{в } \Omega, \quad Z_J^{(\mu)} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (5.13)$$

Изучим решения указанных задач. Поскольку носители коэффициентов дифференциальных операторов (1.3) компактны, решения $Z_J^{(n)} \in (\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{01}(\Omega))^+$ задач (5.12) удовлетворяют уравнению Гельмгольца в полуцилиндре Q_ℓ и обращаются в нуль на его боковой поверхности, а значит, для вычисления коэффициентов $S_{jJ}^{(n)}$ при волнах $\widehat{w}_j^{0+}$ в их разложениях можно применить форму (4.1). Так, при помощи соотношений (4.3), (5.4) и (3.3) получаем, что

$$\begin{aligned} 2^{1/2}i(\widehat{a}^0)^{-1}l_n(\widehat{u}^0, \zeta_k) &= l_n(\widehat{Z}_J^0, \zeta_k) = \mathbf{q}(Z_J^{(n)}, \zeta_k) \\ &= \mathbf{q}\left(\sum_{p=1}^N S_{pJ}^{(n)}\widehat{w}_p^{0+} + S_{JJ}^{(n)}\widehat{w}_J^{0+} + \widetilde{Z}_J^{(n)}, \widehat{w}_k^{0-} + \sum_{m=1}^N s_{mk}\widehat{w}_m^{0+} + \widetilde{\zeta}_k\right) = i \sum_{m=1}^N S_{mJ}^{(n)}\overline{s_{mk}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из аналогичной выкладки с заменой $\zeta_k \mapsto \widehat{u}^0 = -2^{-1/2}i\widehat{a}^0\widehat{Z}_J^0$ выводим равенства

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N S_{mJ}^{(n)}\overline{s_{mk}} &= 2^{1/2}(\widehat{a}^0)^{-1}l_n(\widehat{u}^0, \zeta_k), \quad k = 1, \dots, N, \\ S_{JJ}^{(n)} &= 2i|\widehat{a}^0|^{-2}l_n(\widehat{u}^0, \widehat{u}^0), \quad n = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Член $\sqrt{2}i\chi v_J^-$, порожденный асимптотикой (5.1), делает правую часть формулы (5.13) убывающей недостаточно быстро. Однако этот главный асимптотический член компенсируется выражением $\mathcal{Z} = i(2(\Lambda_J - \lambda))^{-1/2}zv_J^-$, решающим задачу

$$-\Delta \mathcal{Z} - \lambda \mathcal{Z} = \sqrt{2}iv_J^- \quad \text{в } Q, \quad \mathcal{Z} = 0 \quad \text{на } \partial Q, \quad (5.15)$$

а оставшаяся правая часть попадает в пространство $(W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*$, т.е. затухает достаточно быстро. В итоге задача для разности $Z_J^{(\mu)} - \chi \mathcal{Z}$ однозначно разрешима в классе $(\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{01}(\Omega))^+$, т.е. решение $Z_J^{(\mu)}$ задачи (5.13) действительно существует. Появление в его асимптотике слагаемого $\mathcal{Z}$ согласовано с формулой

Тейлора

$$e^{-z\sqrt{\Lambda_J - \lambda - \varepsilon\mu}} U_j(y) = e^{-z\sqrt{\Lambda_J - \lambda}} \left(1 + \frac{\varepsilon\mu z}{2\sqrt{\Lambda_J - \lambda}} + O(\varepsilon^2) \right) U_j(y), \quad |z| \leq R, \quad (5.16)$$

для волны $\widehat{v}_J^{\varepsilon-}(x)$ (в определении (2.3) произведена замена $\lambda \mapsto \lambda + \varepsilon\mu$). Коэффициенты при осциллирующих волнах $\widehat{w}_1^{0+}, \dots, \widehat{w}_N^{0+}$ и экспоненциальной волне $\widehat{w}_J^{0+}$ в разложении решения $Z_J^{(\mu)}$ вычисляются по прежней схеме, так как член $\mathcal{Z}^\varepsilon$ экспоненциально мал. В результате приходим к похожим на (5.14) соотношениям, однако вместо формы (1.6) в них фигурирует скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_\Omega$:

$$\sum_{m=1}^N S_{mj}^{(\mu)} \overline{s_{mk}} = -2^{1/2} (\widehat{a}^0)^{-1} (\widehat{u}^0, \zeta_k)_\Omega, \quad k = 1, \dots, N, \quad (5.17)$$

$$S_{JJ}^{(\mu)} = -2i |\widehat{a}^0|^{-2} (\widehat{u}^0, \widehat{u}^0)_\Omega, \quad n = 0, \dots, N.$$

В итоге поправочное слагаемое из разложения (5.10) принимает вид

$$Z'_J = \chi \left(\widehat{w}_J^{0+} S'_{JJ} + \sum_{j=1}^N \widehat{w}_j^{0+} S'_{jJ} + \sum_{p=N+1}^{J-1} b'_p \widehat{v}_j^{0-} + \mu \mathcal{Z} \right) + \widetilde{Z}'_J, \quad \widetilde{Z}'_J \in W_{\gamma,0}^1(\Omega). \quad (5.18)$$

Для оправдания расчетов построим глобальное асимптотическое приближение $\widehat{Z}_{\text{Jas}}^\varepsilon$ к решению $\widehat{Z}_J^\varepsilon$ задачи (1.2) с параметром (5.7) при помощи конструкции с «перехлестывающимися» срезками $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ и X_ε , обычной для метода составных асимптотических разложений (см. [14, гл. 2]). Первая срезка была определена формулами (2.4), а вторая имеет вид $X_\varepsilon(z) = 1 - \chi(z - \varepsilon^{-1})$. Напомним также, что коэффициенты дифференциального оператора (1.3) обращаются в нуль на носителе χ . Положим

$$\widehat{Z}_{\text{Jas}}^\varepsilon = \chi \widehat{Z}_{J\infty}^\varepsilon + X_\varepsilon \widehat{Z}_{J0}^\varepsilon - \chi X_\varepsilon \widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon, \quad (5.19)$$

$$\widehat{Z}_{J\infty}^\varepsilon = \widehat{w}_J^{\varepsilon-} - \widehat{w}_J^{\varepsilon+} + \varepsilon \left(\widehat{w}_J^{\varepsilon+} S'_{JJ} + \sum_{n=1}^N \widehat{w}_n^{\varepsilon+} S'_{nJ} + \sum_{p=N+1}^{J-1} b'_p \widehat{v}_p^{\varepsilon-} \right), \quad \widehat{Z}_{J0}^\varepsilon = \widehat{Z}_J^0 + \varepsilon Z'_J,$$

$$\widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon = \widehat{w}_J^{0-} - \widehat{w}_J^{0+} + \varepsilon \left(\widehat{w}_J^{0+} S'_{JJ} + \sum_{n=1}^N \widehat{w}_n^{0+} S'_{nJ} + \sum_{p=N+1}^{J-1} b'_p \widehat{v}_p^{0-} + \mu \mathcal{Z} \right),$$

а коэффициенты S'_{qJ} и b'_p возьмем из разложения (5.18). Обращаем внимание на то, что выражение $\widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon$ является фрагментом асимптотики обоих слагаемых $\widehat{Z}_{J\infty}^\varepsilon$ и $\widehat{Z}_{J0}^\varepsilon$ в правой части формулы (5.19), однако выражение $-\chi X_\varepsilon \widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon$ устраняет дублирование. Кроме того, при коммутировании оператора Лапласа со срезками присоединяем это выражение либо к $\chi \widehat{Z}_{J\infty}^\varepsilon$, либо к $X_\varepsilon \widehat{Z}_{J0}^\varepsilon$, уменьшая тем самым невязку. В результате оказывается, что при любой функции

$v \in C_c^\infty(\Omega)$ разность $\widehat{Z}_J^\varepsilon - \widehat{Z}_{Jas}^\varepsilon$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}
& (\nabla(\widehat{Z}_J^\varepsilon - \widehat{Z}_{Jas}^\varepsilon), \nabla v)_\Omega + \varepsilon l(\widehat{Z}_J^\varepsilon - \widehat{Z}_{Jas}^\varepsilon, v) - (\lambda + \varepsilon \mu)(\widehat{Z}_J^\varepsilon - \widehat{Z}_{Jas}^\varepsilon, v)_\Omega \\
& = I^\infty + I^0 + I^{0\infty} + I_{\text{com}}^\infty + I_{\text{com}}^0 \\
& := -(\nabla \widehat{Z}_{J\infty}^\varepsilon, \nabla(\chi v))_\Omega + (\lambda + \varepsilon \mu)(\widehat{Z}_{J\infty}^\varepsilon, \chi v)_\Omega \\
& \quad - (\nabla \widehat{Z}_{J0}^\varepsilon, \nabla(X_\varepsilon v))_\Omega - \varepsilon l(\widehat{Z}_{J0}^\varepsilon, X_\varepsilon v) + (\lambda + \varepsilon \mu)(\widehat{Z}_{J0}^\varepsilon, X_\varepsilon v)_\Omega \\
& \quad + (\nabla \widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon, \nabla(\chi X_\varepsilon v))_\Omega - (\lambda + \varepsilon \mu)(\widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon, \chi X_\varepsilon v)_\Omega \\
& \quad - ((\widehat{Z}_{J\infty}^\varepsilon - \widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon) \nabla \chi, \nabla v)_\Omega + (\nabla(\widehat{Z}_{J\infty}^\varepsilon - \widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon), v \nabla \chi)_\Omega \\
& \quad - ((\widehat{Z}_{J0}^\varepsilon - \widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon) \nabla X_\varepsilon, \nabla v)_\Omega + (\nabla(\widehat{Z}_{J0}^\varepsilon - \widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon), v \nabla X_\varepsilon)_\Omega. \tag{5.20}
\end{aligned}$$

Подробные объяснения несложных и рутинных преобразований, приведших к формуле (5.20) и обеспечивающих дальнейшие выводы, приведены, например, в [14, гл. 2]. Укажем лишь, что, согласно сделанным предположениям, $l(Z, \chi v) = 0$ и $l(Z, X_\varepsilon v) = l(Z, v)$ при любых приемлемых функциях Z и v .

Сразу заметим, что $I^\infty = 0$ по определению волн $\widehat{w}_q^{\varepsilon\pm}$ и $\widehat{v}_p^{\varepsilon\pm}$. Волны $\widehat{w}_q^{0\pm}$ и $\widehat{v}_p^{0-}$ аннулируются оператором $\Delta + \lambda$; поэтому, согласно (5.15), имеем

$$\begin{aligned}
& (\nabla(\widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon - \varepsilon \mu \mathcal{Z}), \nabla(\chi X_\varepsilon v))_\Omega - \lambda(\widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon - \varepsilon \mu \mathcal{Z}, \chi X_\varepsilon v)_\Omega = 0, \\
& (\nabla \mathcal{Z}, \nabla(\chi X_\varepsilon v))_\Omega - \lambda(\mathcal{Z}, \chi X_\varepsilon v)_\Omega = (\widehat{w}_J^{0-} - \widehat{w}_J^{0+}, \chi X_\varepsilon v)_\Omega.
\end{aligned}$$

Оставшуюся в выражении $I^{0\infty}$ часть

$$I_1^{0\infty} = -\varepsilon^2 \mu \left(\chi \left(\widehat{w}_J^{0+} S'_{JJ} + \sum_{n=1}^N \widehat{w}_n^{0+} S'_{nJ} + \sum_{p=N+1}^{J-1} b'_p \widehat{v}_p^{0-} + \mu \mathcal{Z} \right), X_\varepsilon v \right)_\Omega$$

присоединим к I^0 . Учитывая формулы (5.12), (5.13), (5.18) и (5.10) для Z'_J , находим:

$$I^0 + I_1^{0\infty} = -\varepsilon^2 l(Z'_J, v) + \varepsilon^2 \mu(\widetilde{Z}'_J, X_\varepsilon v)_\Omega, \quad |I^0 + I_1^{0\infty}| \leq \varepsilon^2 \|v; W_{-\gamma,0}^1(\Omega)\|.$$

Оценка с весовой нормой $\|v; W_{-\gamma,0}^1(\Omega)\|$ стала возможной благодаря приведенному в (5.18) включению для $\widetilde{Z}'_J$ и упомянутым выше свойствам форм (1.6).

Производные срезов χ и X_ε отличаются от нуля только в зонах $z \in [\ell, \ell+1]$ и $z \in [\ell+\varepsilon^{-1}, \ell+1+\varepsilon^{-1}]$ соответственно. Внутри первой зоны верна формула Тейлора (5.16), обеспечивающая малость невязки. Внутри второй учитываем экспоненциальное затухание разности $\widehat{Z}_{J0}^\varepsilon - \widehat{Z}_{J0\infty}^\varepsilon = 2^{1/2} i(\widehat{a}^0)^{-1} \widehat{u}^0 + \varepsilon \widetilde{Z}'_J \in W_{\gamma,0}^1(\Omega)$, более того, пользуемся возможностью увеличить весовой показатель γ . Дело в том, что функции $\widehat{u}^0$ и $Z_J^{(n)}$ являются решениями задачи (2.1) с нулевой и финитными правыми частями, которые попадают в $(W_{-\gamma',0}^1(\Omega))^*$ при любом $\gamma' \in \Upsilon(\lambda)$ (см. ограничение (2.5)), т. е. $\widehat{u}^0, \widetilde{Z}_J^{(n)} \in W_{\gamma',0}^1(\Omega)$ по теореме 1. Правая часть задачи для $Z_J^{(\mu)} - \chi \mathcal{Z}$ равна $\sqrt{2} i(\widehat{a}^0)^{-1} \widehat{u}^0 + [\Delta, \chi] \mathcal{Z} \in (W_{-\gamma',0}^1(\Omega))^*$, и, следовательно, эта функция также принадлежит $W_{\gamma',0}^1(\Omega)$. Теперь, взяв $\gamma' > \gamma$,

получаем

$$|I_{\text{com}}^\infty| \leq c\varepsilon^2 \|v; W_{-\gamma,0}^1(\Omega)\|,$$

$$|I_{\text{com}}^0| \leq ce^{-(\gamma'-\gamma)/\varepsilon} \|v; W_{-\gamma,0}^1(\Omega)\| \leq c'\varepsilon^2 \|v; W_{-\gamma,0}^1(\Omega)\|.$$

Подведем итог. Правая часть формулы (5.20) принимает вид $F^\varepsilon(v)$, где функционал $F^\varepsilon \in (W_{-\gamma,0}^1(\Omega))^*$ имеет норму $O(\varepsilon^2)$, а значит, $\|\widehat{Z}_J^\varepsilon - \widehat{Z}_{\text{Jas}}^\varepsilon; (\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{\varepsilon 1}(\Omega))^+\| \leq c\varepsilon^2$, в чем и нужно было убедиться, так как норма в пространстве $(\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{\varepsilon 1}(\Omega))^+$ (определяется аналогично норме в $(\widehat{\mathbf{W}}_\gamma^{01}(\Omega))^+$) включает в себя модули коэффициентов разложения функции. Оценки (5.9) для остатков $\widetilde{S}_{1J}^\varepsilon, \dots, \widetilde{S}_{NJ}^\varepsilon$ и $\widetilde{S}_{JJ}^\varepsilon$ установлены.

§6. Компенсация неустойчивости простого собственного числа

Доводы, использованные при доказательстве леммы 4 и теоремы 5, показывают, что (5.7) — собственное число задачи (1.5) в том и только в том случае, когда

$$-1 = \widehat{S}_{JJ}^\varepsilon. \quad (6.1)$$

Несмотря на простоту строения (см. (5.11) и (5.14), (5.17)) элемента

$$\widehat{S}_{JJ}^\varepsilon = -1 - 2i\varepsilon|\widehat{a}^0|^{-2}(\mu - l(\widehat{u}^0, \widehat{u}^0)) + \widetilde{S}_{JJ}^\varepsilon, \quad (6.2)$$

решить непосредственно уравнение (6.1) не удастся из-за трудностей при контроле остатка $\widetilde{S}_{JJ}^\varepsilon$. Выбрав $\psi \in [0, \pi)$ так, чтобы число $-e^{2i\psi}$ не было собственным для матрицы рассеяния s , переформулируем уравнение (6.1) как систему

$$\text{Im } \widehat{S}_{JJ}^\varepsilon = 0, \quad (6.3)$$

$$\text{Re}(e^{i\psi}(\widehat{S}_{bb}^\varepsilon)^* \widehat{S}_{bJ}^\varepsilon) = 0 \in \mathbb{R}^N. \quad (6.4)$$

Убедимся в том, что условия (6.3), (6.4) влекут за собой равенство (6.1) (обратное очевидно, так как $\widehat{S}_{bJ}^\varepsilon = 0$ в случае (6.1) согласно (4.10)). Из этих условий при учете взаимной ортогональности столбцов симметричной унитарной матрицы $\widehat{S}^\varepsilon$, а также асимптотических формул (6.2), (5.8) выводим, что

$$\begin{aligned} 0 &= e^{i\psi}(\widehat{S}_{bb}^\varepsilon)^* \widehat{S}_{bJ}^\varepsilon + e^{i\psi}(\widehat{S}_{Jb}^\varepsilon)^* \widehat{S}_{JJ}^\varepsilon = -e^{-i\psi}(\widehat{S}_{bb}^\varepsilon)^\top \overline{\widehat{S}_{bJ}^\varepsilon} + e^{i\psi} \widehat{S}_{JJ}^\varepsilon \overline{\widehat{S}_{bJ}^\varepsilon} \\ &= -e^{-i\psi}(\widehat{S}_{bb}^\varepsilon - e^{2i\psi} \widehat{S}_{JJ}^\varepsilon \mathbb{I}_N) \overline{\widehat{S}_{bJ}^\varepsilon} = -e^{-i\psi}(s + e^{2i\psi} \mathbb{I}_N + O(\varepsilon)) \overline{\widehat{S}_{bJ}^\varepsilon}, \end{aligned}$$

причем последней в скобках стоит $(N \times N)$ -матрица с элементами $O(\varepsilon)$. Итак, в случае малого ε получаем равенство $\widehat{S}_{bJ}^\varepsilon = 0$, а значит, $|\widehat{S}_{JJ}^\varepsilon| = 1$ и $\widehat{S}_{JJ}^\varepsilon = -1$ при малом ε в силу условия (6.3) и асимптотики (6.2).

Решить систему (6.3), (6.4) стало несложно. Положим

$$\mu = l(\widehat{u}^0, \widehat{u}^0) + \eta \quad (6.5)$$

и, согласно (6.2), перепишем соотношение (6.3) следующим образом:

$$\eta = (2\varepsilon)^{-1} |\widehat{a}^0|^2 \text{Im } \widetilde{S}_{JJ}^\varepsilon. \quad (6.6)$$

В силу оценки (5.9) правая часть в (6.6) приобретает порядок ε .

Займемся соотношением (6.4). Для того чтобы устранить влияние главного члена асимптотики столбца

$$s^* \widehat{S}_{b,J}^\varepsilon = \varepsilon^{2^{1/2}} (\widehat{a}^0)^{-1} (l(\widehat{u}^0, \zeta) - \mu(\widehat{u}^0, \zeta)_\Omega) + s^* \widetilde{S}_{b,J}^\varepsilon \in \mathbb{C}^N \quad (6.7)$$

(см. опять формулы (5.14), (5.17), (5.11)) и оставить только члены $O(\varepsilon(|\tau'| + |\eta|))$ и $O(\varepsilon^2)$, введем условия ортогональности и нормировки

$$\operatorname{Re}(e^{i\psi}(l_0(\widehat{u}^0, \zeta_k) - l_0(\widehat{u}^0, \widehat{u}^0)(\widehat{u}^0, \zeta_k)_\Omega)) = 0, \quad (6.8)$$

$$\operatorname{Re}(e^{i\psi}((l_m(\widehat{u}^0, \zeta_k) - l_m(\widehat{u}^0, \widehat{u}^0)(\widehat{u}^0, \zeta_k)_\Omega) = \delta_{m,k}, \quad m, k = 1, \dots, N. \quad (6.9)$$

Эти условия накладывают ограничения на возмущающие операторы (1.3) в задаче (1.2) и включают в себя собственную функцию $\widehat{u}^0$ и решения (3.3) исходной задачи (1.1) (в (6.7) они были собраны в строку $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$). Отметим, что без требований (6.8) удержать собственное число в спектре не удастся (см. §7), а требования (6.9) помогают правильным образом зафиксировать параметры точной настройки $\tau_1, \dots, \tau_N$, но выбор форм $l_1, \dots, l_N$ достаточно произволен.

Замечание 8. Важно, что условия (6.8) влекут за собой равенства

$$\operatorname{Im}(e^{i\psi}(l_0(\widehat{u}^0, \zeta_k) - l_0(\widehat{u}^0, \widehat{u}^0)(\widehat{u}^0, \zeta_k)_\Omega)) = 0 \in \mathbb{R}^N, \quad k = 1, \dots, N, \quad (6.10)$$

т.е. символ Re в (6.8) не нужен. Дело в том, что, аналогично выкладке (4.9), имеем

$$\bar{\zeta}s = (\overline{\chi w_b^-} + \overline{\chi w_b^+ s})s + \dots = \chi w_b^+ s + \chi w_b^- + \dots \implies \zeta = \bar{\zeta}s,$$

а значит, $\operatorname{Re}(e^{i\psi}\bar{\zeta}) = 0 \in \mathbb{R}^N \implies \operatorname{Im}(e^{i\psi}\bar{\zeta}) = 0 \in \mathbb{R}^N$, так как

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im}(e^{i\psi}\bar{\zeta}) &= e^{i\psi}\bar{\zeta} - e^{-i\psi}\zeta = e^{-i\psi}\bar{\zeta}(e^{2i\psi}\mathbb{I}_N - s) \\ &= e^{-i\psi}\bar{\zeta}(e^{2i\psi}\mathbb{I}_N + s)m = (e^{i\psi}\bar{\zeta} + e^{-i\psi}\bar{\zeta}s)m = 2 \operatorname{Re}(e^{i\psi}\bar{\zeta})m, \end{aligned}$$

где $m = (e^{2i\psi}\mathbb{I}_N + s)^{-1}(e^{2i\psi}\mathbb{I}_N - s)$ — модифицированное преобразование Кэли матрицы s , существующее благодаря выбору показателя ψ . Осталось упомянуть, что левые части формул (6.8) и (6.10) — интегралы по Ω от величин $\operatorname{Re}(e^{i\psi}\bar{\zeta}_k)$ и $\operatorname{Im}(e^{i\psi}\bar{\zeta}_k)$, умноженных на вещественную функцию.

Теперь несложными преобразованиями приводим условия (6.4) к виду

$$\tau' - \eta \operatorname{Re}(e^{i\psi}(\widehat{u}^0, \zeta)_\Omega) = -2^{-1/2} \widehat{a}^0 \operatorname{Re}(e^{i\psi}((\widehat{S}_{bb}^\varepsilon - s)^* S_{b,J}' + (\widehat{S}_{bb}^\varepsilon)^* \varepsilon^{-1} \widetilde{S}_{b,J}^\varepsilon)). \quad (6.11)$$

Оценки (5.8) и (5.9) показывают, что правая часть в (6.11) — величина порядка ε . Заменим η выражением $(2\varepsilon)^{-1} |\widehat{a}^0|^2 \operatorname{Im} \widetilde{S}_{b,J}^\varepsilon$ и объединим соотношения (6.6), (6.11) в систему нелинейных уравнений для вектора $\theta = (\tau_1, \dots, \tau_N, \eta)$:

$$\theta = K^\varepsilon(\theta) \quad \text{в } \mathbb{R}^{N+1}. \quad (6.12)$$

Согласно лемме 7 и строению правых частей равенств (6.6) и (6.11), оператор K^ε аналитически зависит от $\varepsilon\theta$ и имеет малую норму. Следовательно, он оказывается сжимающим на шаре $\mathbb{B}_{\varepsilon\rho}^{N+1} = \{\theta : |\theta| \leq \varepsilon\rho\}$ с некоторым $\rho > 0$. Теперь при помощи принципа сжимающих отображений находим единственное решение $\theta \in \mathbb{B}_{\varepsilon\rho}^{N+1}$ уравнения (6.12) и приходим к основному утверждению статьи.

Теорема 9. Пусть $\lambda = \lambda_0$ — простое собственное число задачи (1.4) из формулы (1.11), а $\widehat{u}^0$ — соответствующая собственная функция, нормированная в $L_2(\Omega)$ и удовлетворяющая соотношению (5.1). Пусть, кроме того,

билинейные формы (1.6), порожденные операторами (1.3), подчинены требованиям (6.8), (6.9). Тогда существуют такие положительные величины ε_0 , c_0 , C_0 и ρ , что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ найдется единственный вектор параметров $(\tau_1, \dots, \tau_N) \in \mathbb{B}_{\varepsilon\rho}^N$, при которых задача (1.5) имеет на сегменте $[\lambda_0 - c_0, \lambda_0 + c_0]$ единственное собственное число λ_0^ε , подчиненное неравенству $|\lambda^\varepsilon - \lambda_0 - \varepsilon l_0(\hat{u}^0, \hat{u}^0)| \leq C_0 \varepsilon^2$.

Доказательство. Подберем c_0 так, чтобы элемент $\hat{S}_{JJ}^0$ расширенной матрицы рассеяния, отвечающей параметру $\lambda \in [\lambda_0 - 2c_0, \lambda_0 + 2c_0]$, обращался в -1 лишь при $\lambda = \lambda_0$. Тогда, согласно лемме 7, уравнение (6.1) имеет не более одного решения при малых ε и $\tau_1, \dots, \tau_N$. Это решение уже было найдено из системы (6.12). Оценка погрешности в асимптотике собственного числа λ^ε вытекает из (5.7) и (6.5). $\square$

§7. Обсуждение результата

Если λ есть $\varkappa$ -кратное собственное число из дискретного спектра $\sigma_d \subset \Upsilon_0$, т. е. $N = 0$, то расширенная матрица рассеяния (4.6), имея размер $J \times J$, совпадает со своим блоком $S_{\dagger\dagger}^\varepsilon$, фигурирующим в формулах (4.6) и (4.7). Повторив с незначительными изменениями выкладки из §5, можно проверить, что $J - \varkappa$ собственных чисел расширенной матрицы рассеяния $\hat{S}^\varepsilon$, отвечающей спектральному параметру (5.7), находятся вне окрестности точки -1 , а остальные в количестве $\varkappa$ штук приобретают вид

$$\hat{\rho}_j^\varepsilon(\mu) = -e^{i\varepsilon\eta_j(\mu)} + O(\varepsilon^2), \quad j = 1, \dots, \varkappa, \quad (7.1)$$

где $\eta_1(\mu), \dots, \eta_\varkappa(\mu)$ — собственные числа эрмитовой матрицы $Y(\mu) = \mu Y^0 - Y^1$ с элементами $Y_{jk}^0 = (u_j^0, u_k^0)_\Omega$, $Y_{jk}^1 = l_0(u_j^0, u_k^0)$, $j, k = 1, \dots, \varkappa$, а $\{u_1^0, \dots, u_\varkappa^0\}$ — какой-либо базис в подпространстве $\ker(A - \lambda)$. Поскольку собственные числа унитарной матрицы $\hat{S}^\varepsilon$ располагаются на единичной окружности $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, вариация параметра μ и непрерывная зависимость от него расширенной матрицы рассеяния позволяет заключить, что существуют такие точки $\mu_1(\varepsilon), \dots, \mu_\varkappa(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, что $\hat{\rho}_j^\varepsilon(\mu_j(\varepsilon)) = -1$. В итоге, согласно теореме 5, найдены собственные числа $\lambda_j^\varepsilon = \lambda + \varepsilon\mu_j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, \varkappa$, оператора A^ε (задачи (1.5)).

Если λ — собственное число (1.11) в непрерывном спектре σ_c , т. е. $N \geq 1$, то по-прежнему собственные числа матрицы $\hat{S}^\varepsilon$ допускают представления (7.1) и можно найти точки $\mu_j(\varepsilon)$, при которых $\hat{\rho}_j^\varepsilon(\mu_j(\varepsilon)) = -1$. Вместе с тем эти собственные числа могут не быть собственными числами блока $S_{\dagger\dagger}^\varepsilon$ и, тем самым, не порождать по теореме 5 собственные числа оператора A^ε . С другой стороны, собственные числа $\hat{\rho}_j^\varepsilon(\mu)$ блока $S_{\dagger\dagger}^\varepsilon$ также допускают представления вида (7.1), однако блок, вообще говоря, не является унитарной матрицей, а значит, числа $\hat{\rho}_j^\varepsilon(\mu)$ могут располагаться вне единичной окружности, а пути $\mu \mapsto \hat{\rho}_j^\varepsilon(\mu)$ обходить точку -1 стороной. Именно в этом и состоит разница между возмущением собственных чисел на дискретном и непрерывном спектрах.

При нарушении равенств (6.8) и (6.10) поправка $O(\varepsilon)$ в асимптотике $\hat{S}_{b,J}^\varepsilon = 0 + \varepsilon S'_{b,J} + \dots$ заведомо отлична от нуля, т. е. равенство (6.1) не выполнено и в $c\varepsilon^2$ -окрестности точки $\lambda + \varepsilon l_0(\hat{u}^0, \hat{u}^0)$ собственных чисел оператора A^ε нет.

К сожалению, разработанные в §6 частные приемы не позволяют удержать в спектре кратное собственное число или несколько собственных чисел одновременно, и непонятно, можно ли сделать это посредством увеличения количества свободных параметров τ_n . Вместе с тем предположение о простоте собственного числа Λ_J из формулы (2.5) введено лишь для упрощения изложения. Действительно, в случае $\Lambda_{J-\kappa} < \Lambda_{J-\kappa+1} = \dots = \Lambda_J < \Lambda_{J+1}$, $\kappa > 1$, выбираем в соответствующем собственном подпространстве ортонормированный базис $\{U_{J-\kappa+1}, \dots, U_J\}$ так, чтобы сохранить нужное разложение (5.1) собственной функции $\hat{u}^0$ задачи (1.4) (или (1.1) в дифференциальной форме). После этого все выкладки и рассуждения не нуждаются в каких-либо исправлениях.

Автор благодарен Т. А. Суслиной за полезные советы, приведшие к улучшению изложения, и за помощь в устранении опечаток в рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, изд-во ЛГУ, Л., 1980.
- [2] К. Фридрихс, *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1969.
- [3] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [4] A. Aslanyan, L. Parnovski, D. Vassiliev, *Complex resonances in acoustic waveguides*, Quart J. Mech. Appl. Math., **53**:3 (2000), 429–447.
- [5] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Самосопряженные эллиптические задачи: операторы рассеяния и поляризации на ребрах границы*, Алгебра и анализ, **6**:4 (1994), 157–186.
- [6] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **264** (2000), 66–82.
- [7] В. В. Грушин, *О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях*, Матем. заметки, **75**:3 (2004), 360–371.
- [8] Р. Р. Гадылышин, *О локальных возмущениях квантовых волноводов*, ТМФ, **145**:3 (2005), 358–371.
- [9] S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
- [10] С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*, УМН, **54**:5 (1999), 77–142.
- [11] S. A. Nazarov, *Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domain*, in: Sobolev Spaces in Mathematics. II, Int. Math. Ser., vol. 9, Springer-Verlag, New York, 2009, 261–309.
- [12] С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач*, в кн.: Пробл. матем. физики, вып. 13, изд-во ЛГУ, Л., 1991, 192–244.
- [13] С. А. Назаров, *Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом*, Функц. анализ и его прил., **40**:2 (2006), 20–32.
- [14] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskij, *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*, vol. 1, Birkhäuser, Basel, 2000.