Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Гаврилов, О числе предельных циклов, появляющихся при возмущении 2-седловых циклов векторных полей на плоскости, *Функци. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 3, 12–27

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 18:27:40

О числе предельных циклов, появляющихся при возмущении 2-седловых циклов векторных полей на плоскости

© 2013. Л. ГАВРИЛОВ

Мы показываем, что число предельных циклов, рождающихся из 2-седловой петли аналитического векторного поля X_0 на плоскости посредством произвольного конечно-параметрического аналитического возмущения X_λ , $\lambda \in (\mathbb{R}^N, 0)$, равномерно ограничено по λ .

§1. Введение

Рассмотрим конечно-параметрическое аналитическое семейство аналитических векторных полей на плоскости

$$X_\lambda = P(x, y, \lambda) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y, \lambda) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^N, \quad (1)$$

таких, что у X_0 есть предельное периодическое множество Γ . Цикличность множества Γ — это, грубо говоря, максимальное число предельных циклов векторного поля X_λ , стремящихся к Γ при $\lambda \rightarrow 0$. Гипотеза Руссари о конечной цикличности гласит, что *любое предельное периодическое множество, появляющееся в аналитическом конечно-параметрическом семействе аналитических векторных полей, имеет конечную цикличность* [23]. Если эта гипотеза верна, то она влечет за собой конечность максимального числа $H(n)$ предельных циклов для полиномиального векторного поля степени n на плоскости. Поэтому гипотеза Руссари играет фундаментальную роль во всех вопросах, связанных со второй частью 16-й проблемы Гильберта и ее разновидностями.

Напомним, что полициклом векторного поля X_0 называется топологический многоугольник, состоящий из сепаратрис и особых точек. Будем через Γ_k обозначать k -седловой цикл векторного поля X_0 (или гиперболический k -график), т. е. полицикл, состоящий из k различных седловых особых точек $p_1, \dots, p_k, p_{k+1} = p_1$ и сепаратрис (гетероклинических орбит), соединяющих p_i с p_{i+1} , как на рис. 1. Такие k -седловые циклы, периодические орбиты и слабые фокусы или центры являются простейшими предельными периодическими множествами. Конечная цикличность периодических орбит и слабых фокусов хорошо известна и следует из теоремы Габриэлова [23, с. 68]. Конечная цикличность 1-седловой петли была доказана Руссари ([21], [22]).

Целью данной работы является доказательство конечной цикличности 2-седлового цикла при конечно-параметрическом аналитическом возмущении, см. теорему 4.

Некоторые частные случаи этого результата были доказаны ранее при различных условиях типичности на X_0 (или на семейство X_λ) Черкасом, Муртадой, Эль Морсалани, Дюмортье, Руссари, Руссо, Жебраном, Золадеком, Ли,

Рис. 1. Полициклы из одного, двух и трех седел.

Каубергом, Лука и другими ([6]–[8], [13], [16]); см. также [23, разд. 5.4.1], где имеется обзор результатов и ссылки до 1996 г. Конечная цикличность k -седлового цикла (при любом k) при конечно-параметрическом аналитическом возмущении была недавно анонсирована Муртадой [18].

Для *типичных семейств* векторных полей условие аналитичности можно ослабить. Как показали Ильяшенко и Яковенко [11] и Калошин [12], *любой невырожденный элементарный полицикл, возникающий в типичном k -параметрическом семействе C^∞ -гладких векторных полей, имеет конечную цикличность.*

В отличие от отмеченных выше авторов, мы не будем использовать асимптотические ряды соответствующих отображений Дюлака. Вместо этого мы оцениваем количество предельных циклов вблизи Γ_2 в комплексной области, используя подходящий вариант принципа аргумента. Этот подход был предложен автором в [10], где изучалась цикличность гамильтоновых 2-седловых циклов. Хорошо известно, что предельные циклы систем на плоскости, близких к гамильтоновым, тесно связаны с нулями соответствующих абелевых интегралов, зависящих от параметра (см. так называемую ослабленную 16-ю проблему Гильберта в книге Арнольда [1, с. 360]). Нули полных эллиптических интегралов в комплексной области успешно изучались с помощью топологических методов (принцип аргумента) после новаторских работ Петрова [19], [20]; описание его метода см. также у Золадека [25, разд. 6]. Этот метод был использован в более общем контексте и в других работах, например, в [3], [2], а в [10] он использовался для того, чтобы заменить абелевы интегралы отображением первого возвращения Пуанкаре.

В данной работе мы найдем связь между неподвижными точками отображения первого возвращения Пуанкаре и неподвижными точками голономий сепаратрис седловых точек, которые соответствуют комплексным предельным циклам. Подсчет таких неподвижных точек сводится к вопросу о нулях семейств *аналитических функций*, который несложно решается. Основным техническим инструментом является лемма 2, в которой мы показываем, что компоненты связности множества нулей мнимой части отображения Дюлака являются гладкими полуаналитическими кривыми. Этот факт позволяет оценить приращение аргумента отображения перемещения вдоль границы подходящей комплексной области, а затем применить принцип аргумента для подсчета нулей этого отображения в упомянутой области.

Заметим, что ранее связь монодромии и отображения Дюлака была использована Руссари для вычисления идеала Баутина, соответствующего отображению Дюлака [24]. Вместе с результатами из [21], [22] это также влечет за собой конечную цикличность 1-седловых циклов.

Работа организована следующим образом. В §2 мы предоставляем необходимые технические сведения и доказываем основную техническую лемму 2. В §3 мы даем новое доказательство теоремы Руссари о конечной цикличности 1-седловых циклов. Происхождение нашего метода объяснено в §4, где мы приводим краткое описание локальной версии так называемого трюка Петрова. Тот же метод легко приспособляется в §5 для доказательства конечной цикличности множества Γ_2 .

§2. Отображение Дюлака

Рассмотрим аналитическое семейство вещественных аналитических слоений на плоскости $\mathcal{F}_\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}^N$, с невырожденной изолированной седловой особой точкой. Можно переместить эту точку в начало координат посредством подходящего параллельного переноса, аналитически зависящего от λ . Слоение $\mathcal{F}_\lambda$ обладает двумя аналитическими сепаратрисами, трансверсально пересекающимися в седле и зависящими аналитически от λ ([5], [17]). Поэтому после вещественной бианалитической замены переменных x, y , аналитически зависящей от λ , сепаратрисы отождествятся с осями координат $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$, как на рис. 2; таким образом,

$$\mathcal{F}_\lambda : x(1 + \cdots) dy + \alpha(\lambda)y(1 + \cdots) dx, \quad \alpha(0) > 0, \quad (2)$$

где отточие обозначает члены более высокого порядка по x, y с коэффициентами, зависящими от λ . Число $\alpha(\lambda)$ — характеристическое число седла (отношение собственных значений). Далее мы будем полагать, что слоение (2) аналитическое и зависит аналитически от λ в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^N$.

Рис. 2. Отображение Дюлака.

Для достаточно малых $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ рассмотрим открытые комплексные диски $\sigma \subset \{y = c_1\}$, $\tau \subset \{x = c_2\}$ с центрами в $(0, c_1)$ и $(c_2, 0)$ с координатами x и y соответственно. Вещественное отображение Дюлака есть росток в $x = 0$ аналитического отображения

$$\mathcal{D}_\lambda : \sigma \cap \mathbb{R}^+ \rightarrow \tau \cap \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{D}_\lambda(0) = 0,$$

определенного следующим образом: если $x \in \sigma \cap \mathbb{R}_*^+$, то $\mathcal{D}_\lambda(x) \in \tau \cap \mathbb{R}_*^+$ есть пересечение листа $\gamma_\lambda(x)$ слоения (2), проходящего через x , с $\tau \cap \mathbb{R}_*^+$, см. рис. 2(ii). Такое геометрическое определение отображения $\mathcal{D}_\lambda$ позволяет в некоторой степени контролировать его аналитическое продолжение в комплексную область.

2.1. Аналитическое продолжение. Отображение Дюлака допускает аналитическое продолжение на некоторое зависящее от λ открытое подмножество

универсальной накрывающей $\sigma_\bullet$ проколотоу диска $\sigma \setminus \{0\}$. Введем на $\sigma_\bullet$ полярные координаты $\rho > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, $z = \rho \exp i\varphi$. Следующий результат широко известен (см., например, [10, приложение A]).

Теорема 1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ и непрерывная функция*

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+, \quad \varphi \mapsto \rho(\varphi),$$

такие, что отображение Дюлака допускает аналитическое продолжение в область

$$\{(\lambda, \rho, \varphi) \in \mathbb{C}^N \times \sigma_\bullet : |\lambda| < \varepsilon_0, 0 < \rho < \rho(\varphi)\}. \quad (3)$$

Геометрическое содержание теоремы 1 состоит в следующем. Пусть $\{\gamma_\lambda(z)\}_{z,\lambda}$ есть непрерывное семейство путей, содержащихся в листах слоения $\mathcal{F}_\lambda$ и соединяющих $z \in \sigma$ с τ .

Если $z \in \sigma \cap \mathbb{R}_*^+$, то предположим, что $\gamma_\lambda(z)$ — вещественная орбита слоения $\mathcal{F}_\lambda$, содержащаяся в первом квадранте $x \geq 0$, $y \geq 0$ и соединяющая z с τ , см. рис. 2(ii). Приведенная выше теорема утверждает, что такое семейство орбит допускает продолжение до непрерывного семейства путей $\{\gamma_\lambda(z)\}_{z,\lambda}$, содержащихся в листах слоения $\mathcal{F}_\lambda$ и соединяющих $z \in \sigma_\bullet$ с $\tau_\bullet$. Это семейство определено для всех (λ, ρ, φ) , принадлежащих области (3). Любой путь начинается в z и заканчивается в единственной точке на σ , обозначаемой через $\mathcal{D}_\lambda(z)$. Несмотря на то, что пути $\{\gamma_\lambda(z)\}_{z,\lambda}$ могут быть выбраны разными способами, их относительные гомотопические классы определены однозначно.

2.2. Монодромия отображения Дюлака и голономии сепаратрис. Сопоставим осям $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ с координатами y и x отображения голономии

$$h_\sigma^\lambda: \sigma \rightarrow \sigma, \quad h_\tau^\lambda: \tau \rightarrow \tau,$$

заданные двумя замкнутыми путями, содержащимися в осях $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$ и начинающимися в $(0, c_1)$ и $(c_2, 0)$ соответственно. Договоримся, что любой замкнутый путь делает один оборот вокруг начала координат оси, в которой он содержится, в положительном направлении (напомним, что за координаты на этих осях мы выбрали y и x соответственно). Легко заметить, что в случае линейного слоения вида

$$x dy + \alpha y dx = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (4)$$

мы имеем

$$\mathcal{D}_\alpha: x \mapsto y = c_1 c_2^{-\alpha} x^\alpha, \quad h_\sigma: x \mapsto x e^{-2\pi i/\alpha}, \quad h_\tau: y \mapsto y e^{-2\pi i\alpha}. \quad (5)$$

В общем случае нелинейного слоения вида (2) отображение Дюлака $\mathcal{D}_\lambda$ только асимптотически близко к $c_1 c_2^{-\alpha} x^\alpha$, в то время как отображения голономии являются аналитическими по x , y , λ и

$$h_\sigma^\lambda: x \mapsto x e^{-2\pi i/\alpha} + \dots, \quad h_\tau^\lambda: y \mapsto y e^{-2\pi i\alpha} + \dots, \quad \alpha = \alpha(\lambda). \quad (6)$$

Отображение Дюлака $\mathcal{D}_\lambda$ есть трансцендентное многозначное отображение. Для $x > 0$ будем обозначать через $\mathcal{D}_\lambda(e^{2\pi i} x)$ результат аналитического продолжения отображения $\mathcal{D}_\lambda$ вдоль дуги радиуса x и угла $2\pi i$. Аналогично для $y > 0$ обозначим через $\mathcal{D}_\lambda(e^{2\pi i} y)$ результат аналитического продолжения отображения $\mathcal{D}_\lambda$ вдоль дуги радиуса y и угла $2\pi i$.

Лемма 1. Для всех достаточно малых $x > 0$, $y > 0$ и $|\lambda|$ имеют место равенства

$$h_\tau^\lambda \circ \mathcal{D}_\lambda(e^{2\pi i x}) = \mathcal{D}_\lambda(x), \quad h_\sigma^\lambda \circ \mathcal{D}_\lambda^{-1}(e^{2\pi i y}) = \mathcal{D}_\lambda^{-1}(y).$$

Доказательство. Рассмотрим вместо $\mathcal{D}_\lambda$ соответствующий путь γ_λ . Петля $\gamma_\lambda(e^{2\pi i x})$ имеет то же начало, что и $\gamma_\lambda(x)$, поэтому можно взять их композицию, и получающаяся петля $\tilde{\gamma}_\lambda(y)$ будет начинаться в $y = \mathcal{D}_\lambda(e^{2\pi i x}) \in \tau$ и заканчиваться в $\mathcal{D}_\lambda(x) \in \tau$. В частном линейном случае (4) с $\alpha = 1$ слоение является расслоением, пути $\gamma_\lambda(\cdot)$ представляют собой относительные циклы в листах слоения xu , а путь $\tilde{\gamma}_\lambda(y)$ замкнут и представляет собой исчезающий цикл. Утверждение леммы 1 есть тогда классическая формула Пикара–Лефшеца. В общем случае результат получается «возмущением». Действительно, в линейном случае (4) с $\alpha = 1$ семейство замкнутых путей $\{\tilde{\gamma}_\lambda(y)\}_y$ определено для всех достаточно малых y и $\tilde{\gamma}_\lambda(0) \subset \{y = 0\}$ есть замкнутый путь, обходящий один раз в положительном направлении начало координат на оси $\{y = 0\}$. Заметим, что пути $\tilde{\gamma}_\lambda(0)$ отделены от начала координат в $\mathbb{C}^2$. Отсюда следует, что $\tilde{\gamma}_\lambda$ определяет голономию h_τ^λ сепаратрисы $\{y = 0\}$, и это свойство сохраняется для любого достаточно малого возмущения слоения (4). Гомотетия $(x, y) \rightarrow (\varepsilon x, \varepsilon y)$ переводит слоение (2) в малое возмущение линейного слоения (4), что завершает доказательство первого равенства (см. также [15]). Второе равенство леммы 1 доказывается сходным образом. $\square$

2.3. Множество нулей мнимой части отображения Дюлака. Рассмотрим универсальную накрывающую

$$\mathbb{C}_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (7)$$

и множество нулей $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathbb{C}_\bullet$ мнимой части отображения Дюлака $\mathcal{D}_\lambda$, соответствующего области (3),

$$\mathcal{H}_\lambda = \{z = (\rho, \varphi) \in \mathbb{C}_\bullet : \operatorname{Im} \mathcal{D}_\lambda(z) = 0, 0 < \rho < \rho(\varphi), \varphi \in \mathbb{R}\}. \quad (8)$$

Таким образом, в случае линейного слоения (4) это множество нулей есть объединение полупрямых:

$$\mathcal{H}_\alpha = \{z \in \mathbb{C}_\bullet : \operatorname{Im} z^\alpha = 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{\alpha, k}, \quad \mathcal{H}_{\alpha, k} = \{(\rho, \varphi) \in \mathbb{C}_\bullet : \varphi = k\pi/\alpha\}.$$

Чтобы описать $\mathcal{H}_\lambda$ для произвольного слоения вида (2) с характеристическим числом $\alpha(\lambda) > 0$, рассмотрим ростки вещественных аналитических множеств в начале координат плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$$C_{\lambda, k} = \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 : (h_\sigma^\lambda)^k(z) = \bar{z}\}, \quad (9)$$

где h_σ^λ есть отображение голономии, соответствующее сепаратрисе $\{x = 0\}$.

Лемма 2. Множество нулей $\mathcal{H}_\lambda \subset \mathbb{C}_\bullet$ мнимой части отображения Дюлака в области (3) есть объединение компонент связности $\mathcal{H}_{\lambda, k}$, заиндексированных с помощью $k \in \mathbb{Z}$.

• Каждое множество $C_{\lambda, k}$ вида (9) есть росток вещественной аналитической кривой в $\mathbb{R}^2$, гладкой в начале координат и касающейся в нем прямой

$$\{z = se^{ik\pi/\alpha(\lambda)} : s \in (\mathbb{R}, 0)\}. \quad (10)$$

• Каждая компонента связности $\mathcal{H}_{\lambda,k}$ при проекции на плоскость $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ отображением π из (7) переходит в компоненту связности множества $C_{\lambda,k} \setminus \{0\}$, касающуюся полупрямой (10), $s > 0$, в начале координат.

Замечание. Для произвольного биголоморфного отображения h_σ^λ , обращающегося в нуль в нуле, множество (9) совпадает с началом координат. Лемма 2 показывает, что, однако, для отображения монодромии h_σ^λ седловой точки вещественно-аналитического векторного поля на плоскости множество $C_{\lambda,k}$ вида (9) есть росток вещественной аналитической кривой в $\mathbb{R}^2$, гладкий в начале координат. Расположение компонент связности множества $C_{\lambda,k} \setminus \{0\}$, касательных к полупрямым (10) с $s > 0$, показано на рис. 3.

Рис. 3. Множество нулей $\mathcal{H}_\lambda$ мнимой части отображения Дюлака в проекции на комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Приведенная выше лемма есть главный технический результат данной работы. Аналитичность множества нулей $\mathcal{H}_\lambda$ отвечает за алгебраическое поведение отображения Дюлака.

Доказательство леммы 2. Пусть $x \in \sigma \cap \mathbb{R}^+$, и предположим, что $\mathcal{D}_\lambda(e^{i\varphi}x) \in \mathbb{R}$ для некоторого $\varphi > 0$. Поскольку отображение Дюлака вещественно вдоль $\sigma \cap \mathbb{R}^+$, то $\mathcal{D}_\lambda(e^{-i\varphi}x)$ является комплексно-сопряженным к $\mathcal{D}_\lambda(e^{i\varphi}x)$ и, значит,

$$\mathcal{D}_\lambda(e^{-i\varphi}x) = \overline{\mathcal{D}_\lambda(e^{i\varphi}x)}.$$

Если точка $e^{-i\varphi}x$ рассматривается как прообраз точки $\mathcal{D}_\lambda(e^{-i\varphi}x)$ относительно действия отображения Дюлака $\mathcal{D}_\lambda^{-1}$, то точка $e^{i\varphi}x$ получается в результате аналитического продолжения отображения $\mathcal{D}_\lambda^{-1}$ вдоль подходящего замкнутого пути на τ , начинающегося и заканчивающегося в $\mathcal{D}_\lambda(e^{-i\varphi}x)$. Если положить

$$y = \mathcal{D}_\lambda(e^{-i\varphi}x), \quad e^{-i\varphi}x = \mathcal{D}_\lambda^{-1}(y),$$

то $e^{\pm i\varphi}x$ суть два значения многозначного отображения $\mathcal{D}_\lambda^{-1}(y)$ и, значит, по лемме 1 они отличаются на степень отображения монодромии h_σ^λ , т. е.

$$(h_\sigma^\lambda)^k(e^{i\varphi}x) = e^{-i\varphi}x$$

или, что эквивалентно,

$$(h_\sigma^\lambda)^k(z) = \bar{z}, \quad z = e^{i\varphi}x, \quad \text{для некоторого } k \in \mathbb{Z}.$$

Ясно, что каждое такое соотношение будет соответствовать компоненте связности $\mathcal{H}_{\lambda,k}$ множества $\mathcal{H}_\lambda$. Поскольку $\mathcal{H}_{\lambda,k}$ есть аналитическое множество вещественной размерности один, то $C_{\lambda,k}$ также есть аналитическое множество размерности один. Поэтому его можно определить одним из эквивалентных соотношений

$$C_{\lambda,k} \subset \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 : \operatorname{Re}[(h_\sigma^\lambda)^k(z)] = \operatorname{Re}(\bar{z})\}$$

или

$$C_{\lambda,k} \subset \{z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 : \operatorname{Im}[(h_\sigma^\lambda)^k(z)] = \operatorname{Im}(\bar{z})\}.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}[(h_\sigma^\lambda)^k(z) - \bar{z}] = -1$, линейная часть комплексно-аналитической функции

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (z, \bar{z}) \mapsto (h_\sigma^\lambda)^k(z) - \bar{z}$$

не может быть тождественно равна нулю; поэтому $C_{\lambda,k} \subset \mathbb{R}^2$ есть вещественная аналитическая кривая, гладкая в начале координат. Из (6) следует, что проекция компоненты $\mathcal{H}_{\lambda,k}$ под действием π на плоскость $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ касается полупрямой (10), $s > 0$, в начале координат. $\square$

2.4. Принцип аргумента. Пусть $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$ — предкомпактная область с кусочно-гладкой границей, и пусть $\psi: \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{C}$ — аналитическая функция, непрерывно продолжающаяся на замыкание $\overline{\mathbf{D}}$ области $\mathbf{D}$. Обозначим через $Z_{\mathbf{D}}(\psi)$ количество нулей функции ψ в $\mathbf{D}$, подсчитанных с кратностями. Если предположить, что ψ не обращается в нуль на границе $\partial\mathbf{D}$, то приращение $\operatorname{Var}_{\partial\mathbf{D}}(\arg(\psi))$ аргумента функции ψ вдоль ориентированной против часовой стрелки границы $\partial\mathbf{D}$ корректно определено и совпадает с индексом кривой $\psi(\partial\mathbf{D}) \subset \mathbb{C}$ вокруг начала координат. Классический принцип аргумента дает

$$2\pi Z_{\mathbf{D}}(\psi) = \operatorname{Var}_{\partial\mathbf{D}}(\arg(\psi)). \quad (11)$$

В более общей ситуации, если ψ имеет нули на $\partial\mathbf{D}$, изолированные или нет, приращение аргумента $\operatorname{Var}_{\partial\mathbf{D}}(\arg(\psi))$ может не быть корректно определено.

Определение. Скажем, что $z \in \partial\mathbf{D}$ — *регулярный нуль* функции ψ , если $\psi(z) = 0$ и ψ допускает аналитическое продолжение в окрестность точки z в $\mathbb{C}$.

Если мы предположим, что ψ имеет только регулярные нули в $\overline{\mathbf{D}}$, то $\operatorname{Var}_{\partial\mathbf{D}}(\arg(\psi))$ корректно определено как сумма приращений аргумента ограничения $\psi|_{\partial\mathbf{D}}$ между последовательными нулями функции ψ . Действительно, эти приращения конечны, поскольку граница $\partial\mathbf{D}$ кусочно-гладкая. Принцип аргумента можно переформулировать следующим образом:

Предложение 1. Пусть $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}$ — предкомпактное множество с кусочно-гладкой границей. Если $\psi: \overline{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ — непрерывная функция, аналитическая в $\mathbf{D}$ и имеющая только регулярные нули в $\overline{\mathbf{D}}$, то

$$2\pi Z_{\mathbf{D}}(\psi) \leq \operatorname{Var}_{\partial\mathbf{D}}(\arg(\psi)) \leq 2\pi Z_{\mathbf{D}}(\psi) + 2\pi Z_{\partial\mathbf{D}}(\psi). \quad (12)$$

Доказательство. Всегда существует многочлен P , такой, что ψ/P не имеет нулей в $\overline{\mathbf{D}}$; поэтому достаточно проверять (12) только для многочленов. Множество $\mathbf{D}$ открыто, связно и ориентировано. Его граница кусочно-гладкая и поэтому не имеет самопересечений и обладает индуцированной ориентацией. Неравенство

$$0 \leq \operatorname{Var}_{\partial\mathbf{D}}(\arg(z)) \leq 2\pi$$

позволяет «устранять» нули вдоль $\partial \mathbf{D}$, и, следовательно, из формулы (11) вытекает (12). $\square$

В данной работе первое неравенство в (12) будет использоваться для оценки числа нулей $Z_{\mathbf{D}}(\cdot)$. Для этого нам понадобятся оценки на приращение аргумента $\text{Var}_l(\arg(\cdot))$ вдоль любого отрезка l кривой. Более точно, пусть $l \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ — отрезок гладкой вещественной аналитической кривой. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество, содержащее l , и пусть $\psi_\lambda(z)$, $\lambda \in (\mathbb{C}^N, 0)$, — росток в $\lambda = 0$ семейства комплексно-аналитических функций в U . Для любого фиксированного λ , такого, что функция ψ_λ не равна тождественно нулю, приращение $|\text{Var}_l(\arg(\psi_\lambda))|$ ее аргумента корректно определено.

Теорема 2. Пусть l — отрезок вещественной аналитической кривой, и пусть $\{\psi_\lambda\}_\lambda$ — семейство функций, аналитических в окрестности этого отрезка и зависящих аналитически от λ . Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что

$$\sup_{|\lambda| < \varepsilon_0, \psi_\lambda \neq 0} |\text{Var}_l(\arg(\psi_\lambda))| < \infty.$$

Этот результат вытекает из следующей теоремы Габриэлова ([14], [9]):

Теорема 3. Пусть M, N — вещественные аналитические многообразия. Рассмотрим каноническую проекцию $\pi: M \times N \rightarrow N$. Для любого предкомпактного полуаналитического множества $E \subset M \times N$ число компонент связности прообразов $\pi^{-1}(n)$ равномерно ограничено сверху по $n \in N$.

Доказательство теоремы 2. Число изолированных нулей функции ψ_λ вдоль l , подсчитанных с кратностями, равномерно ограничено по λ при $\lambda = 0$ (теорема Франсуаза–Йомдина [14]). На отрезке между двумя нулями функции $\psi_\lambda(\cdot)$ приращение аргумента, деленное на 2π , ограничено половиной числа нулей мнимой части функции ψ_λ плюс сумма кратностей нулей функции ψ_λ на концах этого отрезка. Мнимая часть функции ψ_λ есть вещественно-аналитическая функция в $U \subset \mathbb{R}^2$, и из теоремы Габриэлова следует, что число компонент связности множества $\{\text{Im}(\psi_\lambda) = 0\} \cap l$ равномерно ограничено по λ при $\lambda = 0$. $\square$

§3. Цикличность седловой петли

Пусть X_λ , $\lambda \in (\mathbb{R}^N, 0)$, — росток аналитического семейства аналитических векторных полей на плоскости, таких, что X_0 имеет 1-седловой цикл (гомоклиническую седловую петлю) Γ_1 . Отображение первого возвращения, связанное с Γ_1 , есть композиция отображения Дюлака $\mathcal{D}_\lambda(z): \sigma \rightarrow \tau$ и отображения переноса $\mathcal{T}_\lambda(z)$, см. рис. 4. Мы предполагаем, что отображение Дюлака приведено к нормальной форме, как в разд. 2.1. Предельные циклы векторного поля X_λ вблизи Γ_1 соответствуют нулям отображения перемещения

$$\psi_\lambda(z) = \mathcal{D}_\lambda(z) - \mathcal{T}_\lambda(z)$$

вблизи $z = 0$. В подходящих локальных координатах на трансверсалиях σ и τ отображение переноса имеет вид $\mathcal{T}_\lambda(z) \equiv z$. Мы могли бы поступить иначе, просто выбрав $\sigma = \tau$ (не предполагая, что отображение Дюлака приведено к форме из разд. 2.1). Мы оценим число нулей функции ψ_λ в области $\mathbf{D}_R \subset \mathbb{C}_\bullet$, ограниченной окружностью $\{\rho = R\}$ и компонентами связности $\mathcal{H}_{\lambda,1}$ и $\mathcal{H}_{\lambda,-1}$ множества нулей мнимой части отображения Дюлака, как показано на рис. 5. Предположим, что $R > 0$ настолько мало, что $\psi_\lambda(\cdot)$ аналитична в $\mathbf{D}_R$ для

всех $\lambda \in \mathbb{R}^N$, таких, что $|\lambda| \leq \varepsilon_0$ (теорема 1), и аналитична даже на замыкании области $\mathbf{D}_R$, кроме, разумеется, точки $z = 0$, где $\psi_\lambda(\cdot)$ только непрерывна. Действительно,

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathbf{D}_R} \mathcal{D}_\lambda(z) = 0,$$

в то время как $\mathcal{T}_\lambda(z)$ голоморфна в $z = 0$, так что

$$\lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathbf{D}_R} \psi_\lambda(z) = c(\lambda),$$

где $c(\lambda)$ аналитическая и $c(0) = 0$. Если семейство функций ψ_λ достаточно общее, то $c(\lambda) \not\equiv 0$, а в случае, когда $c(\lambda) \equiv 0$, мы можем заменить ψ_λ на новое семейство $\psi_\lambda + \lambda_{N+1}$, $\lambda_{N+1} \in \mathbb{R}$, для которого предел в точке $z = 0$ равен параметру λ_{N+1} . После такой подготовки мы можем доказать конечную цикличность гомоклинической петли Γ_1 . Для этого мы применим предложение 1 (принцип аргумента) к семейству функций ψ_λ в области $\mathbf{D}_R$. В процессе вычисления предполагается, что $R > 0$ достаточно мало, ε_0 достаточно мало по сравнению с R и λ таково, что $|\lambda| < \varepsilon_0$. Для такого выбора параметров мы используем «физическое» обозначение

$$0 < |\lambda| < \varepsilon_0 \ll R \ll 1. \quad (13)$$

Рис. 4. Отображение Дюлака $\mathcal{D}_\lambda(z)$ и отображение переноса $\mathcal{T}_\lambda(z)$.

Рис. 5. Примеры областей $\mathbf{D}_R \subset \mathbb{C}_\bullet$ в проекции на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ под действием π из (7).

Характеристическое число седловой точки не превосходит единицы только в подходящем полуаналитическом множестве пространства параметров и будет больше единицы в другом (дополнительном) полуаналитическом множестве. Поменяв, если нужно, местами σ и τ , мы будем также предполагать, что характеристическое число седловой точки не превосходит единицы для всех значений параметра.

Приращение аргумента функции ψ_λ равномерно ограничено по λ вдоль окружности $\{z: |z|=R\}$ для угла, близкого или строго меньшего 2π (теорема 2).

Вдоль кривой $C_{\lambda,1}$ мнимая часть функции ψ_λ совпадает с мнимой частью отображения переноса $-\mathcal{T}_\lambda(z) = -z$. Поэтому нули функции $\text{Im}(\psi_\lambda)$ на $C_{\lambda,1}$ — это в точности точки пересечения кривой $C_{\lambda,1}$ с интервалом $(-R, 0)$. По лемме 2

$$C_{\lambda,1} \cap \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} : h_\sigma^\lambda(x) = x\} = C_{\lambda,-1} \cap \mathbb{R}. \quad (14)$$

Поскольку $h_\sigma^\lambda(x)$ — аналитическое семейство аналитических функций, то по теореме Габриэлова число таких неподвижных точек равномерно ограничено по λ на $[-R, 0]$. Нам осталось лишь проверить, что семейство $\{\psi_\lambda\}_\lambda$ имеет регулярные нули на границе области $\mathbf{D}_R$. Это так, когда $c(\lambda) \neq 0$, поскольку $\psi_\lambda(0) = c(\lambda)$. Таким образом, число изолированных нулей семейства функций

$$\{\psi_\lambda : c(\lambda) \neq 0, |\lambda| \leq \varepsilon_0\}$$

в области $\mathbf{D}_R$ ограничено некоторым целым числом C . Наконец, заметим, что условие $c(\lambda) \neq 0$ можно убрать. Действительно, если для некоторого λ_0 , $|\lambda_0| \leq \varepsilon_0$, $c(\lambda_0) = 0$, функция ψ_{λ_0} имеет по крайней мере $C+1$ нулей в $\mathbf{D}_R$, то она имеет по крайней мере $C+1$ нулей в $\mathbf{D}_R$ в достаточно малой окрестности точки λ_0 , что противоречит предыдущей оценке.

Итак, мы доказали следующий классический результат.

Теорема (Руссари [21], [22], [24]). *Каждая гомоклиническая седловая петля (1-седловой цикл), появляющаяся в аналитическом конечно-параметрическом семействе аналитических векторных полей на плоскости, может породить не более чем конечное число предельных циклов внутри семейства.*

Заметим, что наш метод, точно так же как и теорема Руссари, позволяет более точно вычислить цикличность множества Γ_1 . Мы не будем здесь вдаваться в подробности. Заметим лишь для иллюстрации этого факта, что если характеристическое число $\alpha(0)$ строго больше единицы, то суммарное приращение аргумента отображения перемещения вдоль границы области $\mathbf{D}_R$ строго меньше, чем 2π (мы опускаем это вычисление), и цикличность множества Γ_1 равна нулю.

§4. Трюк Петрова

Этот параграф не является необходимым для доказательства главного результата, теоремы 4, но его цель — пролить некоторый свет на происхождение метода, использованного, чтобы оценить количество предельных циклов в окрестности седловой петли в предыдущем параграфе.

В обозначениях §3 рассмотрим аналитическое семейство аналитических векторных полей

$$X_\lambda, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in (\mathbb{R}^N, 0),$$

определяющих голоморфные слоения $\mathcal{F}_\lambda$ вида

$$\mathcal{F}_\lambda = \{dH + \lambda_1 \omega_\lambda = 0\}, \quad \omega_0 \neq 0,$$

где H — функция, а ω_λ — аналитическое семейство дифференциальных 1-форм. При этом и H , и ω_λ аналитичны в окрестности седловой петли Γ_1 . Для определенности мы помещаем седловую точку в начало координат в $\mathbb{R}^2$, так что

$dH(0) = 0$. Далее будем считать, что седловая петля Γ_1 содержится в множестве уровня $\{H(x, y) = 0\}$, а ее внутренность заполнена непрерывным семейством периодических орбит $\gamma_0(h) \subset \{H(x, y) = h\}$, параметризованных $h > 0$, где $h = H(x, y)|_\sigma$ есть ограничение функции H на трансверсаль σ . Отображение перемещения аппроксимируется обычной формулой Пуанкаре–Понтрягина следующим образом:

$$\psi_\lambda(h) = \lambda_1 \int_{\gamma_0(h)} \omega_\lambda + o(\lambda_1), \quad (15)$$

где $o(\lambda_1)/\lambda_1$ стремится к нулю при λ , стремящемся к нулю, равномерно по h на каждом отрезке, на котором определено отображение перемещения. Нули функции $\psi_\lambda(\cdot)$ соответствуют предельным циклам, и, по крайней мере вдали от $\Gamma_1 \subset \{H(x, y) = 0\}$, они аппроксимируются нулями полного абелева интеграла

$$h \mapsto I_\lambda(h) = \int_{\gamma_0(h)} \omega_\lambda, \quad h \geq 0.$$

Мы делаем предположение (на самом деле оправданное теоремой Руссари [21]), что это также верно в окрестности значения $h = 0$ (соответствующего предельным циклам, близким к седловой петле Γ_1). Таким образом, имеет смысл доказать конечность максимального числа нулей абелева интеграла $I_\lambda(h)$, которые стремятся к $h = 0$ при λ , стремящемся к началу координат пространства параметров. Это, конечно, следует из хорошо известного результата Варченко и Хованского. Однако мы будем использовать другую идею, предложенную Петровым [20], который показал, что аналогичная глобальная проблема для полных абелевых интегралов второго рода имеет алгебраическую природу. Петров использовал это наблюдение в нескольких статьях для определения точного числа нулей полных эллиптических интегралов и, следовательно, числа предельных циклов возмущенных гамильтоновых векторных полей; см., например, [25, разд. 6]. Мы готовы описать локальную версию метода Петрова.

Рассмотрим сектор

$$S_R = \{z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi\}.$$

Для фиксированного достаточно малого $R > 0$ и всех достаточно малых $\|\lambda\|$ абелев интеграл $I_\lambda(z)$ допускает аналитическое продолжение на S_R . Чтобы оценить количество его нулей на S_R (и, следовательно, на $(0, R)$), мы применяем принцип аргумента к области S_R . Вдоль окружности $\{\rho = R\}$ рост аргумента функции I_λ равномерно ограничен по λ (по теореме Габриэлова). Вдоль отрезка $[-R, 0]$ этот абелев интеграл допускает два аналитических продолжения $I_\lambda^\pm(h)$. Поскольку $I_\lambda(\cdot)$ — вещественно-аналитическая функция на $(0, R)$, то

$$I_\lambda^+(h) = \overline{I_\lambda^-(h)}, \quad h \in (-R, 0),$$

и по формуле Пикара–Лефшеца

$$2\sqrt{-1} \operatorname{Im} I_\lambda^+(h) = I_\lambda^+(h) - I_\lambda^-(h) = \int_{\delta(h)} \omega_\lambda, \quad h \in (-R, 0), \quad (16)$$

где $\delta(h) \subset \{H(x, y) = h\}$ — непрерывное семейство циклов, исчезающих в нуле при стремлении h к нулю.

Таким образом, мнимая часть функции $I_\lambda(h)$ на $(-R, 0)$ является аналитической функцией и, вновь по теореме Габриэлова, ее нули равномерно ограничены

по λ на отрезке $[-R, 0]$. Отсюда следует равномерная ограниченность по λ роста аргумента функции $I_\lambda(h)$ на $(-R, 0)$, что вместе с принципом аргумента доказывает конечность максимального числа нулей.

Доказательство конечной цикличности 1-седловой петли из предыдущего параграфа может восприниматься как обобщение метода Петрова. Действительно, формула Пикара–Лефшеца соответствует утверждению леммы 1, а по лемме 2 нули аналитического абелева интеграла (16) соответствуют неподвижным точкам (комплексным предельным циклам) отображения голономии h_σ^λ сепаратрисы. Хорошо известно, что отображение голономии сепаратрисы аналитично, откуда и следует конечная цикличность седловой петли Γ_1 .

§5. Цикличность 2-седловых циклов

Главным результатом работы является следующая

Теорема 4. *Любая гетероклиническая седловая петля (2-седловой цикл), возникающий в аналитическом конечно-параметрическом семействе аналитических векторных полей на плоскости, порождает не более чем конечное число предельных циклов внутри семейства.*

Рис. 6. Отображения Дюлака $\mathcal{D}_\lambda^1$ и $\mathcal{D}_\lambda^2$.

В обозначениях предыдущих параграфов предположим, что векторное поле X_0 имеет 2-седловую петлю Γ_2 . Рассмотрим отображения Дюлака

$$\mathcal{D}_\lambda^i: \sigma \rightarrow \tau, \quad i = 1, 2,$$

связанные с соответствующим слоением, как на рис. 6. Каждое отображение $\mathcal{D}_\lambda^i$ есть композиция «локального» отображения Дюлака (как в §2) и двух вещественно-аналитических отображений переноса. Отсюда следует, что лемма 2 также применима к $\mathcal{D}_\lambda^i$, $i = 1, 2$. Всюду далее выбираем вещественно-аналитическую локальную переменную z на трансверсали σ , таким образом отождествляя σ с открытым диском с центром в $0 \in \mathbb{C}$. Также будем предполагать, что $0 = \sigma \cap \Gamma_2$. Функции $\mathcal{D}_\lambda^i(z)$, $i = 1, 2$, многозначны на трансверсали σ и имеют критические точки в $s_i(\lambda) \in \mathbb{R}$, $s_i(0) = 0$. Функции s_i вещественно-аналитические. Предельные циклы векторного поля X_λ вблизи Γ_2 соответствуют нулям отображения перемещения

$$\psi_\lambda(z) = \mathcal{D}_\lambda^1(z) - \mathcal{D}_\lambda^2(z)$$

вблизи $z = 0$. Пусть $\alpha_i(\lambda) > 0$, $i = 1, 2$, — характеристические числа седел. Мы будем предполагать, что (возможно, после перемены ролей σ и τ) $\alpha_1(0)\alpha_2(0) \geq 1$. Обозначим множества нулей мнимых частей отображений Дюлака $\mathcal{D}_\lambda^1(z)$ и $\mathcal{D}_\lambda^2(z)$ через $\mathcal{H}_\lambda^1$ и $\mathcal{H}_\lambda^2$ соответственно. Мы будем оценивать число

нулей функции ψ_λ в комплексной области $\mathbf{D}_R$ универсального накрытия множества $\mathbb{C} \setminus \{s_1(\lambda), s_2(\lambda)\}$, определенной следующим образом (без потери общности считаем, что $s_1(\lambda) \leq s_2(\lambda)$):

- если $\alpha_2(0) > 1$, область $\mathbf{D}_R$ ограничена окружностью

$$S_R = \{z : |z| = R\}, \quad (17)$$

и кривыми

$$\mathcal{H}_{\lambda,1}^1, \mathcal{H}_{\lambda,-1}^1, \mathcal{H}_{\lambda,1}^2, \mathcal{H}_{\lambda,-1}^2,$$

как показано на рис. 7;

Рис. 7. Область $\mathbf{D}_R \subset \mathbb{C}_\bullet$, спроектированная на комплексную плоскость $\mathbb{C}$, в случае $\alpha_2(0) > 1$.

- если $\alpha_2(0) \leq 1$, то обязательно $\alpha_1(0) \geq 1$. Область $\mathbf{D}_R$ ограничена окружностью S_R , отрезком $[s_1(\lambda), s_2(\lambda)]$ и кривыми $\mathcal{H}_{\lambda,1}^1, \mathcal{H}_{\lambda,-1}^1$, как показано на рис. 8.

Рис. 8. Область $\mathbf{D}_R \subset \mathbb{C}_\bullet$, спроектированная на комплексную плоскость $\mathbb{C}$, в случае $\alpha_2(0) \leq 1, \alpha_1(0) \geq 1$.

При доказательстве параметры R и λ будут выбраны, как в случае одного седла: константа R будет достаточно малой, $\varepsilon_0 > 0$ будет достаточно мало по сравнению с R , а $\lambda \in \mathbb{R}^N$ будет таким, что $|\lambda| < \varepsilon_0$, см. (13). Как и в §3, мы будем предполагать без ограничения общности, что аналитические функции $c_1(\lambda), c_2(\lambda)$, где

$$\lim_{z \rightarrow s_1(\lambda), z \in \mathbf{D}_R} \psi_\lambda(z) = c_1(\lambda), \quad \lim_{z \rightarrow s_2(\lambda), z \in \mathbf{D}_R} \psi_\lambda(z) = c_2(\lambda),$$

не тождественно нулевые. Это гарантирует, что для типичных значений λ отображение перемещения будет иметь лишь регулярные нули в замыкании области $\mathbf{D}_R$, так что можно применить принцип аргумента (предложение 1).

Доказательство теоремы 4. Из определения области $\mathbf{D}_R \subset \mathbb{C}_\bullet$ следует, что отображение перемещения $\psi_\lambda(z)$ аналитично в ней. Для подсчета нулей отображения перемещения (соответствующих вещественным и комплексным предельным циклам) в $\mathbf{D}_R$ мы применим предложение 1 (принцип аргумента) к семейству функций ψ_λ . Чтобы оценить приращение аргумента отображения перемещения вдоль границы области $\mathbf{D}_R$, мы повторяем рассуждения из §3.

Сначала рассмотрим случай $\alpha_2(0) > 1$ (рис. 7). Компонента связности множества нулей мнимой части отображения $\mathcal{D}_\lambda^2$, касательная к прямой $\varphi = \pi/\alpha_2(\lambda)$, проходящей через $s_2(\lambda)$, пересекает окружность S_R трансверсально, и вдоль этой окружности приращение аргумента функции ψ_λ равномерно ограничено по λ (теорема 2). Мнимая часть функции $\psi_\lambda(z)$, ограниченная на $\mathcal{H}_\lambda^1$, совпадает с мнимой частью отображения $-\mathcal{D}_\lambda^2$, и потому $\text{Im } \psi_\lambda$ обращается в нуль на $\mathcal{H}_{\lambda,1}^1$, $\mathcal{H}_{\lambda,-1}^1$ ровно в точках пересечения

$$\mathcal{H}_{\lambda,1}^1 \cap \mathcal{H}_{\lambda,1}^2, \quad \mathcal{H}_{\lambda,-1}^1 \cap \mathcal{H}_{\lambda,-1}^2.$$

Согласно лемме 2, эти точки пересечения суть решения уравнения

$$h_2^\lambda(z) = h_1^\lambda(z), \quad (18)$$

где h_1^λ , h_2^λ — голономии сепаратрис, пересекающих σ и связанных с седловыми точками $s_1(\lambda)$ и $s_2(\lambda)$. По теореме Габриэлова число таких точек z равномерно ограничено в диске $\{z : |z| < R\}$.

Теперь рассмотрим второй случай, когда $\alpha_2(0) \leq 1$, $\alpha_1(0) \geq 1$, см. рис. 8. Вдоль окружности S_R приращение аргумента функции ψ_λ равномерно ограничено по λ (теорема 2). Вдоль отрезка $[s_1(\lambda), s_2(\lambda)]$ мнимая часть отображения $\mathcal{D}_\lambda^1$ тождественно нулевая, а мнимая часть функции $\psi_\lambda(z)$, ограниченной на этот отрезок, совпадает с мнимой частью отображения $-\mathcal{D}_\lambda^2$. Поэтому нули функции $\text{Im}(\psi_\lambda)$ вдоль $[s_1(\lambda), s_2(\lambda)]$ суть в точности точки пересечения кривой $\mathcal{H}_{\lambda,1}^2$ с отрезком $[s_1(\lambda), s_2(\lambda)]$. По лемме 2, как в (14), эти точки пересечения суть решения уравнения

$$h_2^\lambda(z) = z,$$

где h_2^λ — голономия сепаратрисы, пересекающей σ и связанной с седловой точкой $s_2(\lambda)$. По теореме Габриэлова число таких неподвижных точек равномерно ограничено. Наконец, нули функции $\text{Im}(\psi_\lambda)$ вдоль $\mathcal{H}_{\lambda,1}^1$ и $\mathcal{H}_{\lambda,-1}^1$ оцениваются, как в случае $\alpha_2(0) > 1$. Это завершает доказательство теоремы 4. $\square$

§6. Заключительные замечания

Равенство (18), определяющее комплексные предельные циклы, «ответственные» за цикличность двойной петли Γ_2 , — главная новая составляющая в доказательстве по сравнению со случаем одного седла. В самом деле, решения уравнения (18) — это неподвижные точки отображения голономии $h_2^\lambda \circ (h_1^\lambda)^{-1}$, которое для $\lambda = 0$ порождается замкнутой петлей γ , содержащейся в комплексифицированной сепаратрисе петли Γ_2 , пересекающей трансверсаль σ . Топологический тип этой сепаратрисы вблизи Γ_2 есть диск с двумя проколами,

соответствующими двум седлам $S_1(\lambda)$ и $S_2(\lambda)$. Ясно, что γ делает один поворот вокруг каждого из них, но в зависимости от ориентации имеются две возможности, показанные на рис. 9(i), (ii). Простое вычисление на модельном примере показывает, что петля γ , связанная с голономией $h_2^\lambda \circ (h_1^\lambda)^{-1}$, имеет форму восьмерки, как показано на рис. 9(i). Читатель узнает в петле γ ключевую составляющую доказательства локальной ограниченности числа нулей псевдоабелевых интегралов в [3], [4].

Рис. 9. Петля γ в форме восьмерки.

Несмотря на то, что теорема 4 — теорема существования, доказательство приводит к эффективным верхним оценкам на число рождающихся предельных циклов. Эта возможность исследуется в [10], где мы показываем, что цикличность гамильтоновой 2-седловой петли ограничена числом нулей *пары* соответствующих абелевых интегралов — явление, которое также объясняет появление посторонних предельных циклов в [8].

Стоит заметить, что наш результат о конечности верен (с тем же доказательством) и для других гиперболических полициклов (на плоскости или аналитической поверхности), например, показанных на рис. 10.

Рис. 10. Плоские гиперболические полициклы конечной цикличности.

Благодарности. Автор благодарит Марсина Бобьенского за полезные обсуждения, а также рецензентов за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. И. Арнольд, *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. 3-е изд., НИЦ «РХД», Ижевск, МЦНМО, Москва, 2002.
- [2] G. Binyamini, D. Novikov, S. Yakovenko, *On the number of zeros of Abelian integrals*, Invent. Math., **181**:2 (2010), 227–289.
- [3] M. Bobieński, P. Mardešić, D. Novikov, *Pseudo-Abelian integrals: unfolding generic exponential*, J. Differential Equations, **247**:12 (2009), 3357–3376.
- [4] M. Bobieński, P. Mardešić, D. Novikov, *Pseudo-Abelian integrals on slow-fast Darboux systems*, <http://arxiv.org/abs/1007.2001>.
- [5] Ch. Briot, J.-C. Bouquet, *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles*, J. Ecole Polytech., **21**:36 (1856), 133–198.

- [6] M. Caubergh, F. Dumortier, R. Roussarie, *Alien limit cycles in rigid unfoldings of a Hamiltonian 2-saddle cycle*, Commun. Pure Appl. Anal., **6**:1 (2007), 1–21.
- [7] Л. А. Черкас, *Об устойчивости особых циклов*, Дифференциальные уравнения, **4** (1968), 1012–1017.
- [8] F. Dumortier, R. Roussarie, *Abelian integrals and limit cycles*, J. Differential Equations, **227**:1 (2006), 116–165.
- [9] А. М. Габриэлов, *О проекциях полуаналитических множеств*, Функц. анализ и его прил., **2**:4 (1968), 18–30.
- [10] L. Gavrilov, *On the number of limit cycles which appear by perturbation of hamiltonian two-saddle cycles of planar vector fields*, Bull. Braz. Math. Soc., **42**:1–23 (2011).
- [11] Yu. Ilyashenko, S. Yakovenko, *Finite cyclicity of elementary polycycles in generic families*, in: Concerning the Hilbert 16th Problem, Amer. Math. Soc. Transl., vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 21–95.
- [12] V. Kaloshin, *The existential Hilbert 16-th problem and an estimate for cyclicity of elementary polycycles*, Invent. Math., **151**:3 (2003), 451–512.
- [13] C. Li, R. Roussarie, *The cyclicity of the elliptic segment loops of the reversible quadratic Hamiltonian systems under quadratic perturbations*, J. Differential Equations, **205**:2 (2004), 488–520.
- [14] S. Łojasiewicz, J.-Cl. Tougeron, M.-A. Zurro, *Éclatement des coefficients des séries entières et deux théorèmes de Gabrielov*, Manuscripta Math., **92**:3 (1997), 325–337.
- [15] F. Loray, *Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux*, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00016434/en/>.
- [16] S. Luca, F. Dumortier, M. Caubergh, R. Roussarie, *Detecting alien limit cycles near a Hamiltonian 2-saddle cycle*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **25**:4 (2009), 1081–1108.
- [17] J.-F. Mattei, R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), **13**:4 (1980), 469–523.
- [18] A. Mourtada, *Action de derivations irréductibles sur les algebres quasi-regulieres d'Hilbert*, <http://arxiv.org/abs/0912.1560v1>.
- [19] Г. С. Петров, *Эллиптические интегралы и их неколеблемость*, Функц. анализ и его прил., **20**:1 (1986), 46–49.
- [20] Г. С. Петров, *Вопрос о числе нулей эллиптического интеграла является полуалгебраическим*, Матем. заметки, **44**:3 (1988), 393–401.
- [21] R. Roussarie, *On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields*, Bol. Soc. Brasil. Mat., **17**:2 (1986), 67–101.
- [22] R. Roussarie, *Cyclicité finie des lacets et des points cuspidaux*, Nonlinearity, **2**:1 (1989), 73–117.
- [23] R. Roussarie, *Bifurcation of planar vector fields and Hilbert's sixteenth problem*, Progress in Mathematics, vol. 164, Birkhäuser, Basel, 1998.
- [24] R. Roussarie, *Quasi-conformal mapping theorem and bifurcations*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), **29**:2 (1998), 229–251.
- [25] H. Żoładek, *The Monodromy Group*, Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Math. Monographs (New Series), vol. 67, Birkhäuser, Basel, 2006.