Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Нетай, Алгебры сизигий вложений Сегре,
Функц. анализ и его прил., 2013, том 47, вы-
пуск 3, 54–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 07:41:21

УДК 512.815.2+512.664.1+512.723

Алгебры сизигий вложений Сегре*

© 2013. И. В. НЕТАЙ

В работе описываются пространства сизигий вложения Сегре $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$ при помощи представлений группы $\mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V)$ и строятся минимальные резольвенты пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)}(a, b)$ в $D(\mathbb{P}(U \otimes V))$ в случае $a \geq -\dim U$ и $b \geq -\dim V$. Также доказывается некоторое свойство умножения на пространствах сизигий.

§1. Введение

Пусть U и V — векторные пространства над полем $\mathbb{k}$, $\dim U = m$, $\dim V = n$. Поле $\mathbb{k}$ предполагается алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Рассмотрим тензорное произведение $U \otimes V$. Пусть $M \subset U \otimes V$ — подмножество разложимых тензоров. Заметим, что многообразие M является конусом. Хорошо известно, что $\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$. Это вложение называется *вложением Сегре*. Можно отождествить пространство $U \otimes V$ с пространством матриц размера $m \times n$. Тогда M совпадет с множеством матриц ранга ≤ 1 . Его однородный идеал $\mathbb{I}(M)$ порожден всеми 2×2 -минорами как многочленами от матричных элементов. Между образующими существуют соотношения, между которыми, в свою очередь, существуют соотношения, и т. д. Если на каждом этапе наборы образующих и соотношений выбираются минимальными, то они порождают так называемые пространства сизигий. Теперь дадим формальное определение в более общей ситуации.

Пусть W — векторное пространство над полем $\mathbb{k}$. Для любого проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}(W)$ рассмотрим проективную координатную алгебру $A = S/\mathbb{I}(X)$ как градуированный S -модуль, где $S = \mathbb{k}[W]$ — алгебра многочленов на пространстве W и $\mathbb{I}(X)$ — однородный идеал многообразия X . Существует резольвента

$$\dots \xrightarrow{d} F_2 \xrightarrow{d} F_1 \xrightarrow{d} F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0, \quad (1)$$

являющаяся точной последовательностью свободных градуированных S -модулей. В каждом модуле F_p выберем минимальный набор образующих и породим ими градуированное векторное пространство R_p . Обозначим через $R_{p,q}$ его q -ю однородную компоненту. Обозначим через (p) сдвиг градуировки на p , т. е. приращение p к степени каждого элемента модуля. Тогда

$$F_p = S \otimes_{\mathbb{k}} \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} R_{p,q}(q).$$

Резольвента минимальна, если все однородные компоненты дифференциала d в резольvente (1) имеют положительные степени. Пространство $R_{p,q}$ для мини-

*Работа частично поддержана Лабораторией алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, грант 11.G34.31.0023, грантами РФФИ 10-01-00836 и 12-01-31012, грантами МК-3312.2012.1 и МК-6612.2012.1 и Simons Foundation.

мальной резольвенты называется *пространством p -х сизигий степени q* . Следовательно, тензорное умножение на тривиальный S -модуль $\mathbb{k}$ аннулирует все дифференциалы в минимальной свободной резольвенте, и мы получаем, что

$$R_{p,q} = (\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{k}))_q, \quad (2)$$

откуда следует, что пространства сизигий не зависят от выбора резольвенты. Пространство $(\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{k}))_q$ — это q -я однородная компонента градуированного векторного пространства $\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{k})$.

В общем случае вычисление сизигий является очень трудной задачей. Остаются нерешенные вопросы даже для проективных кривых.

На прямой сумме пространств сизигий любого проективного многообразия существует естественная структура алгебры. В работе [1] найдены алгебры сизигий плюккерových вложений грассманнианов $\mathrm{Gr}(2, n)$. В работе [2] исследованы некоторые свойства пространств сизигий вложений Веронезе. В работе [3] показано, что сизигии вложения Серге произведения нескольких проективных пространств могут быть порождены конечным набором «семейств соотношений» (т. е. набором соотношений, из которых все сизигии получаются заменами переменных), не зависящим от количества проективных пространств.

В данной работе мы исследуем вложение Серге произведения двух проективных пространств. Представления группы $G = \mathrm{GL}(U) \times \mathrm{GL}(V)$ в пространствах сизигий этого вложения описываются теоремой 1.2. В замечании 4.11 мы доказываем некоторое свойство умножения на сумме пространств сизигий.

Группа G действует на пространстве $U \otimes V$. Это действие сохраняет тензорный ранг. Значит, группа G сохраняет многообразие M и идеал $\mathbb{I}(M)$. Отсюда можно получить действие G на минимальной резольвенте и на пространствах сизигий. Основной целью данной работы является описание пространств сизигий вложения Серге и пространств сизигий пучков $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V)}(a, b)$ на $\mathbb{P}(U \otimes V)$ для $a \geq -\dim U$ и $b \geq -\dim V$ (см. теорему 4.9, определение 2.11) как представлений группы G .

Неприводимые представления группы $\mathrm{GL}(n)$ соответствуют диаграммам Юнга. Следовательно, неприводимые представления группы $\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n)$ соответствуют парам диаграмм (λ, μ) .

Определение 1.1. Для диаграммы Юнга λ обозначим через $l(\lambda)$ и $\mathrm{wt}(\lambda)$ длину диагонали диаграммы λ (т. е. пересечения диаграммы с множеством клеток $\{(k, k)\}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$) и ее вес (т. е. количество клеток в λ). Обозначим через $e(\lambda, k)$ диаграмму, полученную из λ добавлением клетки в конец каждого из первых k столбцов диаграммы λ . Символом λ' обозначим диаграмму, полученную из λ транспонированием. Через V_λ обозначим неприводимое представление группы $\mathrm{GL}(V)$ со старшим весом λ .

Если диаграмма Юнга λ состоит из одной строки с k клетками, то соответствующее неприводимое представление V_λ мы будем обозначать через $\mathrm{Sym}^k V$.

Теперь сформулируем один из основных результатов данной статьи.

Теорема 1.2. Пусть $R_{p,q}$ — пространства сизигий вложения Серге $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$. Тогда существует следующий изоморфизм представлений группы G :

$$R_{p,q} \cong \bigoplus_{\substack{\mathrm{wt}(\lambda)=p \\ l(\lambda)=q-p}} (U_{e(\lambda, q-p)}^* \otimes V_{e(\lambda', q-p)}^*).$$

Данная статья устроена следующим образом. В §2 мы, следуя [1] и [5], описываем комплекс Кошуля, группы когомологий которого равны пространствам сизигий, и доказываем некоторые факты о выражении пространств сизигий как когомологий векторных расслоений. В §3 мы вводим и напоминаем обозначения и доказываем некоторые комбинаторные леммы. В §4 мы используем эти леммы для вычисления сизигий вложения Сегре (теорема 1.2) и минимальных резольвент пучков (теорема 4.9). Приложения содержат примеры.

Автор выражает благодарность научному руководителю А. Л. Городенцеву, С. О. Горчинскому, А. Г. Кузнецову, Э. Б. Винбергу и В. М. Бухштаберу за полезные обсуждения работы.

§2. Предварительные сведения

2.1. Комплекс Кошуля. Пусть $X \subset \mathbb{P}(W)$ — проективное многообразие в проективном пространстве, а $A_q = H^0(X, \mathcal{O}(q))$ есть q -я однородная компонента проективной координатной алгебры этого многообразия. Пусть $\iota: \Lambda^p W^* \rightarrow \Lambda^{p-1} W^* \otimes W^*$ — отображение, двойственное к внешнему умножению $\Lambda^{p-1} W \otimes W \rightarrow \Lambda^p W$. При помощи умножения $\pi_q: A_1 \otimes A_q \rightarrow A_{q+1}$ определим отображение $d_{p,q}$ как композицию:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^{p-1} W^* \otimes W^* \otimes A_q & \longrightarrow & \Lambda^{p-1} W^* \otimes A_1 \otimes A_q \\ \iota \otimes \text{Id} \uparrow & & \downarrow \text{Id} \otimes \pi_q \\ \Lambda^p W^* \otimes A_q & \xrightarrow{d_{p,q}} & \Lambda^{p-1} W^* \otimes A_{q+1} \end{array}$$

где верхняя стрелка индуцирована естественным отображением ограничения

$$W^* = H^0(\mathbb{P}(W), \mathcal{O}(1)) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}(1)) = A_1.$$

Лемма 2.1. *Цепь морфизмов*

$$\dots \longrightarrow \Lambda^{p+1} W^* \otimes A_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1,q-1}} \Lambda^p W^* \otimes A_q \xrightarrow{d_{p,q}} \Lambda^{p-1} W^* \otimes A_{q+1} \longrightarrow \dots \quad (3)$$

является комплексом. Более того, его когомологии являются пространствами сизигий

$$R_{p,p+q} = \frac{\ker(d_{p,q})}{\text{im}(d_{p+1,q-1})}.$$

Доказательство. Рассмотрим комплекс Кошуля $\Lambda^\bullet W^* \otimes \text{Sym}^\bullet W^* = \Lambda^\bullet W^* \otimes S$ (см. [6, гл. 1]). Он квазиизоморфен тривиальному S -модулю $\mathbb{k}$. Тензорно умножая над S на A , получаем квазиизоморфизм $\Lambda^\bullet W^* \otimes A \cong \mathbb{k} \otimes_S^L A$. Следовательно, цепь

$$\dots \rightarrow \Lambda^{p+1} W^* \otimes A \rightarrow \Lambda^p W^* \otimes A \rightarrow \Lambda^{p-1} W^* \otimes A \rightarrow \dots$$

является комплексом, и ее когомологии равны градуированным векторным пространствам $\text{Tor}_p^S(\mathbb{k}, A)$.

Поскольку дифференциал d комплекса (3) однороден и имеет степень 0, мы можем разложить комплекс Кошуля на сумму подкомплексов

$$\dots \longrightarrow \Lambda^{p+1} W^* \otimes A_{q-1} \xrightarrow{d_{p+1,q-1}} \Lambda^p W^* \otimes A_q \xrightarrow{d_{p,q}} \Lambda^{p-1} W^* \otimes A_{q+1} \longrightarrow \dots$$

В итоге мы получаем $R_{p,p+q} = (\mathrm{Tor}_p^S(A, \mathbb{k}))_{p+q} = \ker(d_{p,q}) / \mathrm{im}(d_{p+1,q-1})$. $\square$

2.2. Проективные координатные алгебры. Пусть G — редуктивная алгебраическая группа. Обозначим через $W = V_\lambda$ ее неприводимое представление старшего веса λ . Пусть X есть G -орбита точки $w \in \mathbb{P}(W)$, соответствующей вектору старшего веса в представлении W . В [7] доказано, что такое многообразие X является пересечением квадрик в $\mathbb{P}(W)$.

Замечание 2.2. Напомним, что $X = G \cdot w \cong G/P$, где P — параболическая подгруппа, является проективным многообразием. Обозначим через I множество всех простых корней, ортогональных к λ . Каждому такому набору простых корней соответствует параболическая подгруппа $P_I \subset G$, содержащая некоторую фиксированную борелевскую подгруппу B группы G . Напомним, что однородные линейные расслоения на многообразии G/P_I соответствуют весам группы G , ортогональным ко всем корням множества I . В частности, расслоение $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)}(1)|_X$ соответствует весу λ .

Следующее предложение с более подробным доказательством и другие результаты об орбитах старшего веса и более общих квазиоднородных пространствах можно найти в [8].

Предложение 2.3. *Во введенных обозначениях проективная координатная алгебра A_X многообразия X равна $\bigoplus_{n \geq 0} V_{n\lambda}^*$.*

Доказательство. По теореме Бореля–Ботта–Вейля (см. [9]) имеем

$$A_X = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(G/P, \mathcal{L}_{n\lambda}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(G/B, \mathcal{L}_{n\lambda}) = \bigoplus_{n \geq 0} V_{n\lambda}^*. \quad \square$$

Следствие 2.4. *Во введенных обозначениях комплекс*

$$\cdots \rightarrow \Lambda^{p+1} W^* \otimes_{\mathbb{k}} V_{(q-1)\lambda}^* \rightarrow \Lambda^p W^* \otimes_{\mathbb{k}} V_{q\lambda}^* \rightarrow \Lambda^{p-1} W^* \otimes_{\mathbb{k}} V_{(q+1)\lambda}^* \rightarrow \cdots$$

представлений группы G вычисляет пространства сизигий многообразия $X = G \cdot w \subset \mathbb{P}(W)$.

Обозначим через Σ_λ функтор Шура $\mathrm{Vect} \rightarrow \mathrm{Vect}$. Это полиномиальный функтор на категории векторных пространств, для которого относительно действия группы $G = \mathrm{GL}(V)$ представление $\Sigma_\lambda V$ является единственным представлением этой группы со старшим весом λ . Символ $\Sigma_\lambda V'$ означает то же, что V_λ , если $V' = V$ — тавтологическое представление группы $\mathrm{GL}(V)$. Явное построение функтора Шура можно найти, например, в [4].

Следствие 2.5. *Пусть $W_i = \Sigma_{\lambda_i} V_i$, $W_1 \otimes \cdots \otimes W_m$ — неприводимый $\mathrm{GL}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(V_m)$ -модуль, $X \subset \mathbb{P}(W)$ — орбита вектора старшего веса $\lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_m$ в $W = W_1 \otimes \cdots \otimes W_m$. Тогда проективная координатная алгебра A_X многообразия X равна*

$$\bigoplus_{n \geq 0} \Sigma_{n\lambda_1} V_1^* \otimes \cdots \otimes \Sigma_{n\lambda_m} V_m^*$$

как $\mathrm{GL}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{GL}(V_m)$ -модуль. В частности, комплекс Кошуля $\Lambda^\bullet(W_1 \otimes \cdots \otimes W_m) \otimes A_X$ вычисляет сизигии многообразия X .

2.3. Когомологии алгебр Ли. Пусть A — градуированная алгебра. Она называется *линейно порожденной*, если $A_0 = \mathbb{k}$, а естественное отображение $T^\bullet(A_1) \rightarrow A$ сюръективно. Линейно порожденная алгебра A называется *квадратичной*, если ядро J_A отображения $T^\bullet(A_1) \rightarrow A$ порождено как двусторонний

идеал в $T^\bullet(A_1)$ подпространством $I_A = J_A \cap (A_1 \otimes A_1) \subset A_1 \otimes A_1$. Обозначим через (A_1, I_A) алгебру $T^\bullet(A_1)/(I_A)$. Квадратично двойственная алгебра $A^!$ определена парой $(A_1^*, I_A^\perp)$.

Квадратичная алгебра называется *кошулевой алгеброй*, если $A \simeq \text{Ext}_{A^!}^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$. Хорошо известно, что проективная координатная алгебра орбиты старшего веса в неприводимом представлении редуктивной группы кошулева (см. [10]).

Алгебра $A^!$ является универсальной обертывающей для градуированной супералгебры Ли

$$L = \bigoplus_{m \geq 1} L_m = \mathcal{L}ie(A_1^*)/(I_A^\perp),$$

где $\mathcal{L}ie(V)$ — свободная градуированная алгебра Ли, порожденная векторным пространством V .

Предложение 2.6. Пусть проективная координатная алгебра A_X многообразия X кошулева. Тогда существует следующий изоморфизм алгебр:

$$R \simeq H^\bullet(L_{\geq 2}, \mathbb{k}), \quad R_{p,q} \simeq (H^{q-p}(L_{\geq 2}, \mathbb{k}))_q.$$

Здесь $H^\bullet(L_{\geq 2}, \mathbb{k})$ означает когомологии алгебры Ли. Это предложение доказано в [1]. Таким образом вычислены сизигии плюккерова вложения грассманианов $\text{Gr}(2, n)$.

Пример 2.7. Рассмотрим $X = \text{Gr}(2, n) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, где $\dim V = n$. Тогда из [1] следует, что

$$R_{p,q} = \bigoplus_{\substack{\text{wt}(\lambda)=p \\ \lambda=(i_1, \dots, i_q | i_q+3, \dots, i_1+3)}} V_\lambda^*.$$

Здесь $(a_1, \dots, a_k | b_k, \dots, b_1)$ обозначает диаграмму Юнга, составленную из вложенных крюков с парами длина-ширина $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$, веса которых равны $\text{wt}(\lambda) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) - k$.

2.4. Резольвенты пучков. Обозначим через $\text{coh}(X)$ категорию когерентных пучков на многообразии X , а через $\text{grmod}(S)$ — категорию конечно порожденных градуированных S -модулей. Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$ — проективное многообразие. Определим функтор $F: \text{coh}(X) \rightarrow \text{grmod}(S)$ формулой

$$F(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}^N, \mathcal{F}(n))(-n) = \text{Hom} \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(-n), - \right).$$

Ясно, что он может быть продолжен до производного функтора $RF: D^b \text{coh}(X) \rightarrow D^b(\text{grmod}(S))$.

Лемма 2.8. Имеем

$$R^i F(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{F}(n))(-n) = \text{Ext}^i \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}(-n), - \right).$$

Доказательство. По определению n -й однородной компоненты функтора F имеем $F_n(\mathcal{F}) = \text{Hom}(\mathcal{O}(-n), \mathcal{F})$. Поэтому $R^i F_n(\mathcal{F}) = \text{Ext}^i(\mathcal{O}(-n), \mathcal{F})$, так что $R^i F(\mathcal{F}) = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ext}^i(\mathcal{O}(-n), \mathcal{F})$.

Лемма 2.9. Если $H^k(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ для $n \geq 0$ и $k > 0$, то $H^k(X, \mathcal{F} \otimes \Omega^i(i+n)) = 0$ для $n \geq 0$, $k > 0$ и $i > 0$.

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \Omega^i(i) \rightarrow \Lambda^i W^* \otimes \mathcal{O} \rightarrow \Lambda^{i-1} W^* \otimes \mathcal{O}(1) \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{O}(i) \rightarrow 0.$$

Тензорно умножим ее на $\mathcal{F}(n)$. Теперь утверждение следует из вида спектральной последовательности гиперкогомологий. $\square$

Предложение 2.10. Пусть $\mathcal{F} \in D^b \text{coh}(X)$ — пучок на гладком проективном многообразии $X \subset \mathbb{P}(W) = \mathbb{P}^N$, для которого $H^n(X, \mathcal{F}(k)) = 0$ при любых $n > 0$ и $k \geq 0$. Тогда для любых p и q

$$H^{q-p}(\mathbb{P}^N, \Omega_{\mathbb{P}(W^*)}^p(p) \otimes \mathcal{F}) \cong (\text{Tor}_p^S(F(\mathcal{F}), \mathbb{k}))_q.$$

Доказательство. Пусть $\Delta: \mathbb{P}^N \rightarrow \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N$ — диагональное вложение. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^N & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^N \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & \mathbb{P}^N & \mathbb{P}^N \end{array}$$

и стандартную резольвенту диагонали

$$0 \rightarrow \Omega^N(N) \boxtimes \mathcal{O}(-N) \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N} \rightarrow 0, \quad (4)$$

где через $\mathcal{G} \boxtimes \mathcal{H}$ для пучков $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ на $\mathbb{P}^N$ обозначается пучок $p_1^* \mathcal{G} \otimes p_2^* \mathcal{H}$. Пусть D_k — глупое обрезание (см. [6]) резольвенты (4):

$$D_k = \{\Omega^{N-k}(N-k) \boxtimes \mathcal{O}(k-N) \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathcal{O}\}.$$

Тогда имеем цепь морфизмов комплексов

$$0 = D_{N+1} \longrightarrow D_N \longrightarrow \cdots \longrightarrow D_1 \longrightarrow D_0 = \Delta_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$$

с конусами $\text{Cone}(D_{N-i+1} \rightarrow D_{N-i}) \cong \Omega^i(i) \boxtimes \mathcal{O}(-i)[i]$.

Тензорно умножая на $p_2^* \mathcal{F}$ и применяя Rp_{1*} , получаем цепь морфизмов комплексов

$$\begin{aligned} 0 = Rp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_{N+1}) &\rightarrow Rp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_N) \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow Rp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_1) \rightarrow Rp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_0) = \mathcal{F} \end{aligned}$$

с конусами

$$\text{Cone}(Rp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_{N-i+1}) \rightarrow Rp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_{N-i})) = H^\bullet(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^i(i)) \otimes \mathcal{O}(-i)[i].$$

Применяя RF , с учетом равенств $R^i F(\mathcal{F}) = 0$ для $i > 0$, т. е. $RF(\mathcal{F}) = F(\mathcal{F})$, и $RF(\mathcal{O}(-p)) = S(p)$ получаем цепь морфизмов комплексов

$$\begin{aligned} 0 = RFRp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_{N+1}) &\rightarrow RFRp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_N) \rightarrow \cdots \\ &\rightarrow RFRp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_1) \rightarrow RFRp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_0) = F(\mathcal{F}) \end{aligned}$$

с конусами

$$\begin{aligned} \text{Cone}(RFRp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_{N-i+1}) \rightarrow RFRp_{1*}(p_2^* \mathcal{F} \otimes D_{N-i})) \\ = H^\bullet(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^i(i)) \otimes S(i)[i]. \end{aligned}$$

Тензорно умножая на $\mathbb{k}$, получаем цепь морфизмов комплексов

$$\begin{aligned} 0 &= RFRp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N+1}) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k} \rightarrow RFRp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_N) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k} \rightarrow \dots \\ &\rightarrow RFRp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_1) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k} \rightarrow RFRp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_0) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k} = F(\mathcal{F}) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k} \end{aligned}$$

с конусами

$$\begin{aligned} \text{Cone} \left(RFRp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N-i+1}) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k} \rightarrow RFRp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_{N-i}) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k} \right) \\ = H^\bullet(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^i(i)) \otimes \mathbb{k}(i)[i]. \end{aligned}$$

Теперь применим к $RFRp_{1*}(p_2^*\mathcal{F} \otimes D_0) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k} = F(\mathcal{F}) \overset{L}{\otimes}_S \mathbb{k}$ конструкцию спектральной последовательности фильтрованного комплекса. Ее первый лист равен

$$E_1^{r,s} = \bigoplus_{n \geq 0} H^s(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^{-r}(-r+n)) \otimes \mathbb{k}(r+n). \quad (5)$$

По лемме 2.9 имеем $E_1^{r,s} = 0$ для $s > 0$. Значит, спектральная последовательность вырождается и $\text{Tot}_p(F(\mathcal{F}), \mathbb{k})$ имеет фильтрацию с факторами, равными $E_1^{r,s}$, где $r+s=p$. Следовательно, $(\text{Tot}_p(F(\mathcal{F}), \mathbb{k}))_q = H^{q-p}(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^p(p))$. $\square$

Определение 2.11. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на $\mathbb{P}^N$. Тогда существует спектральная последовательность с первым листом

$$E_1^{-p,q} = H^q(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^p(p)) \otimes \mathcal{O}(-p),$$

сходящаяся к $\mathcal{F}$. Векторные пространства $R_{p,q}(\mathcal{F}) = H^q(\mathbb{P}^N, \mathcal{F} \otimes \Omega^p(p))$ назовем *пространствами сизигий* пучка $\mathcal{F}$.

Заметим, что в случае, когда $H^i(X, \mathcal{F}(k)) = 0$ для $i > 0$ и $k \geq 0$, спектральная последовательность вырождается, и мы получаем резольвенту пучка $\mathcal{F}$. Из предложения 2.10 следует, что сизигии проективного многообразия X совпадают с сизигиями его структурного пучка $\mathcal{O}_X$, если многообразие X гладкое и $H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ для $k \geq 0$ и $i > 0$.

Проиллюстрируем предложение 2.10 следующим известным примером. В работе [1] этот пример изучен при помощи квадратичных двойственных алгебр, а в [11] — при помощи комплекса Кошуля полного пересечения.

Пример 2.12. Пусть $X = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(\text{Sym}^N V) = \mathbb{P}^N$ — вложение Веронезе. Легко проверить, что $\Omega_{\mathbb{P}^N}(1)|_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}(-1)^{\oplus N}$. Значит,

$$\Omega_{\mathbb{P}^N}^p(p)|_{\mathbb{P}^1} = \Lambda^p(\Omega_{\mathbb{P}^N}(1))|_{\mathbb{P}^1} = \Lambda^p(\Omega_{\mathbb{P}^N}(1)|_{\mathbb{P}^1}) \simeq \Lambda^p \mathcal{O}(-1)^{\oplus N} \simeq \mathcal{O}(-p)^{\oplus \binom{N}{p}}.$$

По предложению 2.10 для $p > 0$ имеем

$$\dim R_{p,p+1} = \dim H^1(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^N}^p(p)) = \binom{N}{p} \dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-p)) = (p-1) \binom{N}{p}$$

и $\dim R_{0,0} = 1$. Все прочие $R_{p,q}$ равны нулю.

Рассмотрим вложение Сегре $X = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$ и положим $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(a, b)$. Тогда $H^i(X, \mathcal{F}(k)) = 0$ для всех $i > 0$ и $k \geq 0$, если $a \geq -m$ и

$b \geq -n$. В этом случае сизигии пучка $\mathcal{O}(a, b)$ можно вычислить как когомологии комплекса

$$K^\bullet = \Lambda^\bullet(U^* \otimes V^*) \otimes \bigoplus_{k \geq 0} \text{Sym}^{a+k} U^* \otimes \text{Sym}^{b+k} V^*. \quad (6)$$

Значит,

$$R_{p,q}(\mathcal{O}(a, b)) = (H^p(K^\bullet))_q.$$

§3. Обозначения и комбинаторика

3.1. Комбинаторные кубы. Пусть $\mathcal{A}$ есть $\mathbb{k}$ -линейная абелева категория. Объект $M \in \mathcal{A}$ называется *простым*, если $\text{Hom}(M, M) = \mathbb{k}$. Например, любое неприводимое представление редуктивной группы G является простым объектом в категории $\text{Rep}(G)$ представлений группы G . Результаты этого параграфа будут далее применяться в случае $\mathcal{A} = \text{Rep}(\text{GL}(U) \times \text{GL}(V))$.

Определение 3.1. Комплекс $K^\bullet \in \text{Kom}(\mathcal{A})$ назовем *комбинаторным n -кубом* (k -м *обрезанным комбинаторным n -кубом*), если он изоморфен комплексу $M \otimes \Lambda^\bullet E$ (соответственно $M \otimes \Lambda^{\geq k} E$), где M — некоторый простой объект в категории $\mathcal{A}$, E — векторное пространство и дифференциал в $K^\bullet$ индуцирован дифференциалом $d(\xi) = \xi \wedge \xi_0$ на $\Lambda^\bullet E$ для некоторого ненулевого вектора $\xi_0 \in E$.

Выбрав базис в E , можно отождествить $K^\bullet$ с тотальным комплексом тензорного произведения $\bigotimes_{i=1}^n \{M \xrightarrow{\xi_{0,i}} M\}$. В частности, если $\xi_0 \neq 0$, то хотя бы одно отображение $\xi_{0,i}$ является изоморфизмом, так что $H^\bullet(K^\bullet) = 0$.

Очевидно, что если $K^\bullet$ — комбинаторный n -куб, то $K^{\geq k}$ есть k -й обрезанный комбинаторный n -куб.

Замечание 3.2. На самом деле существует естественная интерпретация, при которой комплексы $K^\bullet$, возникающие в работе и являющиеся обрезанными комбинаторными кубами, окажутся отождествленными с комплексами вида $M \otimes \bigoplus_{\mathcal{K}} \mathbb{k}$, где $\mathcal{K}$ является пересечением стандартного единичного куба в некоторой решетке с координатами $x_1, \dots, x_n$ с полупространством $\sum_{i=1}^n x_i \geq k$. При этом отождествлении степень элемента, соответствующего точке $(x_1, \dots, x_k)$, равна $\sum_{i=1}^n x_i$; таким образом, обрезание куба соответствует глупому обрезанию комплекса, соответствующего стандартному единичному кубу. Дифференциал при таком отображении бьет из пространства $\mathbb{k}$, соответствующего вершине $(x_1, \dots, x_k)$, в пространства $\mathbb{k}$, соответствующие вершинам $(x_1, \dots, x_i+1, \dots, x_n)$ для $i = 1, \dots, n$. Это объясняет наше использование терминологии, связанной с понятием комбинаторного куба.

Лемма 3.3. Если $K^\bullet$ — комбинаторный n -куб с $n > 0$, то $H^i(K^\bullet) = 0$ для любого i . Если $n = 0$, то $H^0(K^\bullet) = M$ и $H^i(K^\bullet) = 0$ для $i > 0$. Если $K^\bullet$ есть k -й обрезанный комбинаторный n -куб, то $H^k(K^\bullet) = M^{\oplus \binom{n-1}{k}}$ и $H^i(K^\bullet) = 0$ для $i \neq k$ и $0 < k \leq n$.

Доказательство. Рассмотрим комбинаторный n -куб $L^\bullet$ с теми же базовым объектом M , векторным пространством E и вектором $\xi_0 \in E$, что и у k -го обрезанного комбинаторного n -куба $K^\bullet$. Тогда $K^\bullet = L^{\geq k}$. Мы можем разложить в прямую сумму пространство $E = E' \oplus \langle \xi_0 \rangle$. Тогда для любого k имеем

$\Lambda^k E = \Lambda^k E' \oplus \Lambda^{k-1} E' \wedge \xi_0$. Значит, ранг отображения $d: \Lambda^k E \rightarrow \Lambda^{k+1} E$ равен $\dim \Lambda^k E' = \binom{n-1}{k}$. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы. $\square$

Замечание 3.4. Если K и K' являются k -ми обрезанными комбинаторными n -кубами относительно одного простого объекта M , то они изоморфны. Значит, если K и K' суть k -й и k' -й обрезанные комбинаторные n -кубы с общим базовым объектом M и $k' < k$, то $K \simeq (K')^{\geq k}$. Любой морфизм $K \rightarrow K'$ является изоморфизмом на $(K')^{\geq k}$, если $k' \leq k$.

Лемма 3.5. Пусть $(K^\bullet, d)$ — комплекс над абелевой категорией $\mathcal{A}$ и $E = \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ — векторное пространство. Пусть выполнено равенство градуированных объектов $K^i = M \otimes \Lambda^i E$, где M — простой объект в $\mathcal{A}$. Как оператор на $M \otimes \Lambda^{\geq k} E$ дифференциал d определен своими матричными элементами $d_I^J \in \mathbb{k}$, для которых

$$d\left(m \otimes \bigwedge_{i \in I} \xi_i\right) = \sum_{|J|=|I|+1} \left(d_I^J \cdot m \otimes \bigwedge_{j \in J} \xi_j\right). \quad (7)$$

Предположим, что $d_I^J \neq 0$, если и только если $I \subset J$ и $|I| + 1 = |J|$. Тогда $K^\bullet$ есть k -й обрезанный комбинаторный n -куб.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n . Случай $n = 1$ тривиален. Пусть $n > 1$; тогда $E = E' \oplus \mathbb{k}$, где $E' = \langle \xi_1, \dots, \xi_{n-1} \rangle$ и $\mathbb{k} = \langle \xi_n \rangle$. Имеет место разложение $K^\bullet = K_1^\bullet \oplus K_2^\bullet$, где $K_1^\bullet = M \otimes \Lambda^{\geq k} E'$ и $K_2^\bullet = M \otimes \Lambda^{\geq k-1} E' \wedge \xi_n$. По предположению индукции $K_1^\bullet \simeq M \otimes \Lambda^{\geq k} E'$ с дифференциалом $d_1 = \xi \wedge -$ для $\xi \in E'$ и $K_2^\bullet \simeq M \otimes \xi_n \wedge \Lambda^{\geq k-1} E'$ с дифференциалом $d_2 = \xi' \wedge -$ для $\xi' \in E'$. По замечанию 3.4 можно считать, что $\xi = \xi'$. Положим $d' = \xi \wedge -$ на $K^\bullet$.

Тогда дифференциал d на $K^\bullet$ задается формулой $d(-) = d'(-) + \varphi(-)$ для некоторого однородного гомоморфизма $\varphi: M \otimes \Lambda^{\geq k} E' \rightarrow M \otimes \xi_n \wedge \Lambda^{\geq k-1} E'$ степени 1. Из (7) имеем $\varphi(m) = cm \otimes \xi_n$ для некоторого $c \neq 0$. Поэтому по замечанию 3.4 получаем $\varphi = c\xi_n \wedge -$. Мы видим, что комплекс $K^\bullet$ изоморфен $M \otimes \Lambda^{\geq k} E$ с дифференциалом $d = \xi'' \wedge -$, где $\xi'' = \xi + \xi_n$. $\square$

3.2. Диаграммы. Пусть $\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$ — вложение Серге, $\dim U = m$, $\dim V = n$ и $U \otimes V = W$. Положим

$$S_U = \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}(U), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U)}(i)) = \text{Sym}^\bullet(U^*),$$

$$S_V = \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(i)) = \text{Sym}^\bullet(V^*),$$

$$A = \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma(\mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(U \otimes V)}(i)) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Sym}^i(U^*) \otimes \text{Sym}^i(V^*).$$

Существуют следующие групповые действия: группа $\text{GL}(U) = G_U$ действует на пространстве S_U , группа $\text{GL}(V) = G_V$ действует на пространстве S_V , группа $G_U \times G_V = G$ действует на пространстве A .

Фиксируем некоторые обозначения. Рисовать диаграммы Юнга будем вниз и вправо от $(0, 0)$. Основные обозначения для диаграмм Юнга были введены в определении 1.1. Иногда мы будем обозначать диаграмму Юнга набором длин ее строк.

Проиллюстрируем понятие $e(\lambda, k)$ на примере:

Обратим внимание, что если первый столбец в λ имеет по крайней мере $\dim V$ клеток, то соответствующее представление $V_{e(\lambda, n)}$ является нулевым. В противном случае $e(\lambda, n)$ соответствует представлению минимального веса в разложении представления $V_\lambda \otimes \text{Sym}^n(V)$ по формуле Пиери (см. [4]).

Неприводимые представления группы $G = \text{GL}(U) \times \text{GL}(V)$ соответствуют парам диаграмм Юнга (λ, μ) . Мы будем пересекать и вычитать диаграммы Юнга как множества клеток.

Пусть (λ, μ) — пара диаграмм Юнга.

Определение 3.6. Обозначим через $B(\lambda, \mu)$ множество таких клеток с диаграммы $\lambda \cap \mu'$, что

- снизу от c нет клеток диаграммы λ , и
- справа от c нет клеток диаграммы μ' .

Введем обозначение $\omega = (\lambda, \mu)$ и для краткости будем писать $B(\omega) = B(\lambda, \mu)$.

На следующем рисунке $B(\lambda, \mu)$ обозначено точками.

Определение 3.7. Обозначим через $Y(w, l, r)$ множество диаграмм Юнга θ с некоторыми клетками, отмеченными буквами L, R или обеими буквами, где

- в каждом столбце не более одной L, в каждой строке не более одной R;
- общее количество букв L равно l , общее количество букв R равно r ;
- неотмеченных клеток ровно w ;
- θ_0 , $\theta_0 \cup \theta_L$ и $\theta_0 \cup \theta_R$ являются диаграммами Юнга, где через θ_0 , θ_L и θ_R обозначают объединения неотмеченных клеток диаграммы θ , клеток, содержащих L, и клеток, содержащих R.

Обозначим через $Y_{m,n}(w, l, r)$ подмножество таких диаграмм $\theta \in Y(w, l, r)$, что высота диаграммы $\theta_0 \cup \theta_L$ не превосходит m , а ширина диаграммы $\theta_0 \cup \theta_R$ не превосходит n . Можно сказать, что отмеченная диаграмма θ — это тройка $(\theta_0, \theta_L, \theta_R) \in Y_{m,n}(w, l, r)$, состоящая из диаграммы Юнга θ_0 и двух косых диаграмм Юнга θ_L и θ_R . Положим

$$\lambda(\theta) = \theta_0 \cup \theta_L, \quad \mu(\theta) = (\theta_0 \cup \theta_R)', \quad \omega(\theta) = (\lambda(\theta), \mu(\theta)).$$

Следующий рисунок содержит пример элемента множества $Y_{4,4}(6, 2, 3)$.

Закрашенные клетки соответствуют отмеченным клеткам в θ .

Для $\theta \in Y_{m,n}(w, a, b)$ для краткости положим

$$\Sigma_\theta W^* = \Sigma_{\lambda(\theta)} U^* \otimes \Sigma_{\mu(\theta)} V^*. \quad (8)$$

Предложение 3.8. *Существует изоморфизм*

$$\Lambda^w(U^* \otimes V^*) \otimes \text{Sym}^l(U^*) \otimes \text{Sym}^r(V^*) = \bigoplus_{\theta \in Y_{m,n}(w, l, r)} \Sigma_{\omega(\theta)} W^*,$$

где $m = \dim U$ и $n = \dim V$.

Замечание 3.9. Важно, что в этом разложении каждое слагаемое имеет кратность 1.

Доказательство предложения 3.8. По хорошо известной формуле имеем $\Lambda^w(U^* \otimes V^*) = \bigoplus_{\text{wt}(\nu)=w} \Sigma_\nu U^* \otimes \Sigma_{\nu'} V^*$ (см. [4]). По формуле Пиери $\Sigma_\nu U^* \otimes \Sigma_{\nu'} V^* \otimes \text{Sym}^l U^* \otimes \text{Sym}^r V^* = \bigoplus_{(\lambda, \mu)} \Sigma_\lambda U^* \otimes \Sigma_\mu V^*$, где сумма берется по всем парам диаграмм Юнга (λ, μ) , для которых

- $\nu \subset \mu'$, $\nu \subset \lambda$, $|\lambda - \nu| = l$, $|\mu' - \nu| = r$;
- в косой диаграмме $\lambda - \nu$ в каждом столбце не более одной клетки, в косой диаграмме $\mu' - \nu$ в каждой строке не более одной клетки.

По такой паре (λ, μ) построим диаграмму Юнга $\theta = \lambda \cup \mu'$, где отметим каждую клетку из $\lambda - \nu$ буквой L а каждую клетку из $\mu' - \nu$ буквой R (обратим внимание, что некоторые клетки окажутся отмеченными обеими буквами). Тогда $\theta \in Y_{m,n}(w, l, r)$. С другой стороны, если $\theta \in Y_{m,n}(w, l, r)$, то $\nu = \theta_0$, $\lambda = \lambda(\theta)$ и $\mu = \mu(\theta)$. Ясно, что свойства, перечисленные выше, выполнены. $\square$

§4. Изотипические компоненты комплекса Кошуля

Для любого представления E группы $G = \text{GL}(U) \times \text{GL}(V)$ и любой пары $\omega = (\lambda, \mu)$ диаграмм Юнга обозначим через $\text{pr}_\omega(E)$ проекцию на изотипическую компоненту, соответствующую весу ω . Пусть $K^\bullet$ — комплекс Кошуля

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \Lambda^{p+1}(U^* \otimes V^*) \otimes \text{Sym}^{a+q-1}(U^*) \otimes \text{Sym}^{b+q-1}(V^*) \\ \rightarrow \Lambda^p(U^* \otimes V^*) \otimes \text{Sym}^{a+q}(U^*) \otimes \text{Sym}^{b+q}(V^*) \\ \rightarrow \Lambda^{p-1}(U^* \otimes V^*) \otimes \text{Sym}^{a+q+1}(U^*) \otimes \text{Sym}^{b+q+1}(V^*) \rightarrow \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

определенный в (6). По поводу множества $B(\lambda, \mu)$ см. определение 3.6.

Предложение 4.1. *Пусть $\omega = (\lambda, \mu)$ — вес группы $\text{GL}(U) \times \text{GL}(V)$. Тогда $\text{pr}_\omega(K^\bullet) = 0$, если ни для какой отмеченной диаграммы $\theta \in Y_{m,n}(w, l, r)$, такой, что $a - b = l - r$, где $m = \dim U$ и $n = \dim V$, не выполняется равенство $\omega = \omega(\theta)$. Более того, в этом случае, если $\theta_L \cap \theta_R = \emptyset$, то*

$$\text{pr}_\omega(K^\bullet) \simeq \Sigma_\lambda U^* \otimes \Sigma_\mu V^* \otimes \Lambda^{\geq k} \mathbb{K}^n(-k)$$

является k -м обрезанным комбинаторным n -кубом, где $n = |B(\lambda, \mu)|$ и $k = a - l = b - r$.

Доказательство. Проверим условия, необходимые для того, чтобы $\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet) \neq 0$. По лемме 3.8 существует биекция между неприводимыми G -модулями в $\Lambda^w W^* \otimes \mathrm{Sym}^l U^* \otimes \mathrm{Sym}^r V^*$ и множеством $Y_{m,n}(w, l, r)$. Следовательно, комплекс $K^\bullet$ изоморфен

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \bigoplus_{\theta \in Y_{m,n}(p+1, a+q-1, b+q-1)} \Sigma_\theta W^* &\rightarrow \bigoplus_{\theta \in Y_{m,n}(p, a+q, b+q)} \Sigma_\theta W^* \\ &\rightarrow \bigoplus_{\theta \in Y_{m,n}(p-1, a+q+1, b+q+1)} \Sigma_\theta W^* \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Обратим внимание, что $|\theta_L| - |\theta_R| = (a + q + k) - (b + q + k) = a - b$, откуда следует условие $a - b = l - r$.

Ясно, что $\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet)$ является подкомплексом в (9), состоящим из модулей $\Sigma_\theta W^*$ с $\omega(\theta) = \omega$. Остается проверить, что этот подкомплекс является обрезанным комбинаторным кубом. Существует градуированное векторное пространство $\mathcal{V}^\bullet$, для которого $\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet) \simeq \Sigma_\omega W^* \otimes \mathcal{V}^\bullet$. Поскольку представление $\Sigma_\omega W^*$ группы G неприводимо, по лемме Шура (см. [9]) $\mathrm{End}(\Sigma_\omega W^*) = \mathbb{k}$. Значит,

$$d \in \mathrm{End}_G(\Sigma_\omega W^* \otimes \mathcal{V}^\bullet) = \mathrm{End}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Теперь докажем, что комплекс $\mathrm{pr}_\omega(K^\bullet)$ является обрезанным комбинаторным кубом. Проведем доказательство в два шага. Сначала выберем базис в $\mathcal{V}^\bullet$. Затем найдем все ненулевые матричные элементы оператора d в этом базисе. Тогда останется только воспользоваться леммой 3.5.

Возьмем произвольный вес $\omega = (\lambda, \mu)$. Пусть $\omega = \omega(\theta)$ для некоторой диаграммы θ . Тогда $\theta = \lambda \cup \mu'$. Более того, все клетки косой диаграммы $\lambda - \mu'$ отмечены буквой L, все клетки косой диаграммы $\mu' - \lambda$ отмечены буквой R и некоторые из клеток $\lambda \cap \mu'$ могут быть отмечены сочетанием LR. Ясно, что можно отметить сочетанием LR только клетки множества $B(\lambda, \mu)$. Следовательно, отмеченные диаграммы θ со свойством $\omega(\theta) = \omega$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами множества $B(\lambda, \mu)$, т.е. со стандартным базисом внешней алгебры $\Lambda^\bullet E$ векторного пространства E , натянутого на векторы $\xi_1, \dots, \xi_n$, пронумерованные элементами множества $B(\lambda, \mu)$. Вектор $\xi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \xi_{i_k}$ с $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq k$ соответствует диаграмме θ с клетками $i_1, \dots, i_k \in B(\lambda, \mu)$, отмеченными сочетанием LR.

Возьмем диаграмму $\theta \in Y_{m,n}(p, a + q, b + q)$, такую, что $\omega(\theta) = \omega$. По лемме 3.8 эта диаграмма соответствует G -модулю в $\Lambda^p W^* \otimes \mathrm{Sym}^{a+q} U^* \otimes \mathrm{Sym}^{b+q} V^*$, где $\mathrm{wt}(\theta_0) = p$. Ограничение отображения $\Lambda^p W^* \rightarrow \Lambda^{p-1} W^* \otimes W^*$ на слагаемое $\Sigma_{\theta_0} U^* \otimes \Sigma_{\theta'_0} V^*$ разлагается в сумму произведений отображений $\Sigma_{\theta_0} U^* \rightarrow \Sigma_{\nu} U^* \otimes U^*$ и $\Sigma_{\theta'_0} V^* \rightarrow \Sigma_{\nu'} V^* \otimes V^*$ по всем поддиаграммам $\nu \subset \theta_0$, полученным удалением одной клетки из θ_0 .

Отображение $W^* \otimes \mathrm{Sym}^{a+q} U^* \otimes \mathrm{Sym}^{b+q} V^* \rightarrow \mathrm{Sym}^{a+q+1} U^* \otimes \mathrm{Sym}^{b+q+1} V^*$, ограниченное на слагаемое, соответствующее ν , является тензорным произведением канонических отображений $U^* \otimes \mathrm{Sym}^{a+q} U^* \rightarrow \mathrm{Sym}^{a+q+1} U^*$ и $V^* \otimes \mathrm{Sym}^{b+q} V^* \rightarrow \mathrm{Sym}^{b+q+1} V^*$. Наконец, заметим, что композиция дифференциала, ограниченного на $\Sigma_\theta W^*$, с проекцией на $\Sigma_\vartheta W^*$ не равна нулю тогда и только тогда, когда ϑ получается из θ , если отметить сочетанием LR еще одну клетку.

Комплекс изоморфен

$$\Sigma_{4,3,2,2,1}U^* \otimes \Sigma_{5,3,3,1}V^* \otimes \Lambda^{\bullet}\mathbb{k}^3(1).$$

Мы описали изотипические компоненты комплекса Кошуля. Оказывается, они все являются обрезанными комбинаторными кубами. Эти комплексы ациклически ровно в том случае, когда размерность куба положительна и куб не обрезан. Опишем изотипические компоненты, которые являются 0-кубами или k -ми обрезанными кубами для $k > 0$.

Определение 4.3. Положим

$$l^{a,b}(\lambda) = \max\{k \mid (a+k, b+k) \in \lambda\} + 1.$$

Например, $l^{0,0}(\lambda) = l(\lambda)$ и $l^{k,k}(\lambda) = l(\lambda) - k$, где $l(\lambda)$ — длина главной диагонали (см. 1.1).

Две следующие леммы полностью описывают 0-кубы в комплексе (9). В лемме 4.4 мы строим комбинаторные 0-кубы в комплексе. В лемме 4.6 мы покажем, что подкомплексы, описанные в предыдущей лемме, исчерпывают все 0-кубы в комплексе (9).

Лемма 4.4. *Фиксируем диаграмму Юнга ν и $a, b \in \mathbb{Z}$, для которых $k = l^{a,b}(\nu) \geq 0$. Тогда изотипическая компонента веса $(\lambda, \mu) = (\mathbf{e}(\nu, a+k), \mathbf{e}(\nu', b+k))$ в комплексе Кошуля (9) изоморфна комбинаторному 0-кубу $(\Sigma_{\lambda}U^* \otimes \Sigma_{\mu}V^*)(k)$.*

Доказательство. Рассмотрим клетку $c = (a+k-1, b+k-1)$ в конце диагонали, начинающейся в (a, b) . Тогда существует $a+k$ столбцов либо содержащих клетку c , либо лежащих левее этой клетки, а также $b+k$ строк либо содержащих клетку c , либо лежащих выше нее. Добавим по клетке, отмеченной буквой L, в конец каждого из первых $a+k$ столбцов и по клетке, отмеченной буквой R, в конец каждой из первых $b+k$ строк. Если $c' = (x, y) \in \nu$ лежит на диагонали или ниже, то существует клетка, отмеченная буквой L, ниже c' . Если $c' = (x, y) \in \nu$ лежит на диагонали или выше, то существует клетка, отмеченная буквой R, справа от c' . Значит, $B(\mathbf{e}(\nu, a+k), \mathbf{e}(\nu', b+k)) = \emptyset$, и утверждение данной леммы очевидно следует из леммы 4.1. $\square$

Пример 4.5. Следующий рисунок иллюстрирует конструкцию, приведенную выше. Рассмотрим диаграмму $\nu = (5, 4, 4, 2)$ внутри жирного контура и $(a, b) = (-2, -1)$. Тогда диагональ, начинающаяся в (a, b) , является множеством клеток, отмеченным точками, $l = 4$. Мы видим, что $\lambda = (5, 4, 4, 2, 2)$ и $\mu = (6, 5, 5, 2)' = (4, 4, 3, 3, 1)$, и изотипическая компонента веса (λ, μ) в $K^{\bullet}$ равна $(\Sigma_{5,4,4,2,2}U^* \otimes \Sigma_{4,4,3,3,1}V^*)(4)$.

Лемма 4.6. *Пусть (λ, μ) — вес группы G , такой, что изотипическая компонента веса (λ, μ) является комбинаторным 0-кубом в комплексе Кошуля (9). Тогда существует диаграмма ν , удовлетворяющая предположениям леммы 4.4, для которой $\lambda = \mathbf{e}(\nu, a+k)$ и $\mu' = \mathbf{e}(\nu', b+k)$.*

Доказательство. Пусть θ — диаграмма $\lambda \cup \mu'$, где клетки из $\lambda - \mu'$ отмечены буквой L, а клетки из $\mu' - \lambda$ отмечены буквой R. По построению $\theta_L \cap \theta_R = \emptyset$. Поскольку $\text{pr}_{(\lambda, \mu)}(K^\bullet) = \Sigma_\lambda U^* \otimes \Sigma_\mu V^* \otimes \Lambda^{\geq k} \mathbb{K}^n(-k)$ является комбинаторным 0-кубом, по предложению 4.1

- $n = |B(\lambda, \mu)| = 0$;
- $k = a - |\lambda - \mu'| = b - |\mu' - \lambda| \leq 0$;
- в каждом столбце не более одной клетки из $\lambda - \mu'$;
- в каждой строке не более одной клетки из $\mu' - \lambda$.

Из последних двух условий следует существование $l = |\lambda - \mu'|$ столбцов с буквой L и $r = |\mu' - \lambda|$ строк с буквой R.

Обозначим через $\xi_i = (x_i, y_i)$ для $i = 1, \dots, s$ клетки диаграммы $\nu = \lambda \cap \mu'$, для которых $(x_i + 1, y_i) \notin \nu$ и $(x_i, y_i + 1) \notin \nu$ (т. е. угловые клетки диаграммы ν). Поскольку $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$, можно считать, что $x_1 < \dots < x_s$. Поэтому $y_1 > \dots > y_n$. Множество $B(\lambda, \mu)$ состоит из клеток $\xi_i = (x_i, y_i)$, для которых $(x_i, y_i + 1) \notin \lambda - \mu'$ и $(x_i + 1, y_i) \notin \mu' - \lambda$. Поскольку $|B(\lambda, \mu)| = 0$, для каждой клетки ξ_i в $(x_i, y_i + 1)$ существует буква L или в $(x_i + 1, y_i)$ — буква R.

Допустим, что $(x_t + 1, y_t) \in \theta_R$ и $(x_{t+1}, y_{t+1} + 1) \in \theta_L$ для некоторого t . Поскольку $\theta_0 \cup \theta_L = \lambda$ и $\theta_0 \cup \theta_R = \mu'$ являются диаграммами Юнга, клетки выше $(x_t + 1, y_t)$, не принадлежащие θ_0 , принадлежат θ_R , а клетки слева от $(x_{t+1}, y_{t+1} + 1)$, не принадлежащие θ_0 , принадлежат θ_L . Таким образом, $(x_t + 1, y_{t+1} + 1) \in \theta_L \cap \theta_R = \emptyset$.

На рисунке выше клетка $(x_t + 1, y_{t+1} + 1)$ отмечена точкой. Если клетка $(x_t, y_t + 1)$ содержит L, то в каждом столбце левее ξ_t есть клетка с L. Если клетка $(x_t + 1, y_t)$ содержит R, то в каждом столбце выше ξ_t есть клетка с R.

Значит, если $(x_t + 1, y_t) \in \theta_R$, то $(x_{t'}, y_{t'} + 1) \notin \theta_L$ и $(x_{t'} + 1, y_{t'}) \in \theta_R$ для $t' > t$. Аналогичным образом, если $(x_t, y_t + 1) \in \theta_L$, то $(x_{t'} + 1, y_{t'}) \notin \theta_R$ и $(x_{t'}, y_{t'} + 1) \in \theta_L$ для $t' < t$. Имеет место один двух следующих случаев:

- $(x_t + 1, y_t) \in \theta_R$ и $(x_t, y_t + 1) \in \theta_L$ для некоторого t ;
- $(x_t, y_t + 1) \in \theta_L$, $(x_{t+1}, y_{t+1} + 1) \notin \theta_L$, $(x_t + 1, y_t) \notin \theta_R$ и $(x_{t+1} + 1, y_{t+1}) \in \theta_R$ для некоторого t .

Эти случаи изображены на следующем рисунке:

Допустим, что имеет место первый случай. Тогда $(x_{t'} + 1, y) \in \theta_R$ для любого $t' \geq t$ при $y_{t'+1} < y \leq y_{t'}$ и $y \geq 0$ (т.е. в конце каждой строки не ниже y_t есть клетка, содержащая R) и $(x, y_{t'} + 1) \in \theta_L$ для любого $t' \leq t$ при $x_{t'-1} < x \leq x_{t'}$ и $x \geq 0$ (т.е. в конце каждого столбца не правее x_t есть клетка, содержащая L). С другой стороны, θ_L и θ_R не могут иметь других клеток. В противном случае мы получим клетку в $\theta_L \cap \theta_R$. Тогда $(x_t, y_t) = (|\lambda - \mu'|, |\mu' - \lambda|) = (l, r)$, и для $k = a - l = b - r$ имеем $l^{a,b}(\nu) = -k$.

Допустим, что имеет место второй случай. Мы видим по крайней мере x_t клеток с L и по крайней мере y_{t+1} клеток с R. Это значит, что $l \geq x_t$ и $r \geq y_{t+1}$. В одном из этих условий выполнено равенство, иначе клетка $(x_t + 1, y_{t+1} + 1)$ содержит LR. Предположим, что $r = y_{t+1}$ (второй случай аналогичен). Если $l > x_t$, то существует еще $l - x_t$ клеток с L, и они могут быть расположены только в строке $y_{t+1} + 1$.

Очевидно, что в обоих случаях имеем $\lambda = e(\nu, a + k)$ и $\mu = e(\nu', b + k)$. $\square$

Следствие 4.7. Если $a \leq 0$ и $b \leq 0$, то в комплексе Кошуля (9) нет изотипической компоненты, являющийся k -м обрезанным комбинаторным кубом для $k > 0$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого веса $\omega = (\lambda, \mu)$ группы G изотипическая компонента есть k -й обрезанный комбинаторный куб $\text{pr}_\omega(K^\bullet) = \Sigma_\omega W^* \otimes \Lambda^{\geq k} \mathbb{K}^n(-k) \neq 0$ для некоторого n . Тогда он имеет ненулевую компоненту степени 0. Но эта компонента лежит в $\Lambda^\bullet W^* \otimes \text{Sym}^a U^* \otimes \text{Sym}^b V^*$. Поэтому она содержит a букв L и b букв R в каждой $\theta \in Y_{m,n}^\omega(w, a, b)$, где $w = \text{wt}(\lambda \cap \mu')$. Здесь $Y_{m,n}^\omega(w, a, b)$ обозначает подмножество таких $\theta \in Y_{m,n}(w, a, b)$, что $\omega(\theta) = \omega$. Тогда $a = b = 0$ и $\theta_L = \theta_R = \emptyset$. Это означает, что $k = 0$. $\square$

Теперь докажем теорему 1.2.

Доказательство теоремы 1.2. По следствию 2.4 требуется вычислить группы когомологий комплекса (9) представлений группы G в случае $a = b = 0$. По следствию 4.7 среди изотипических компонент комплекса (9) нет обрезанных кубов. Тогда только комбинаторные 0-кубы дают вклад в группы когомологий. По леммам 4.4 и 4.6 изотипическая компонента веса (λ, μ) группы G является 0-кубом степени k , если и только если существует диаграмма ν , для которой $\lambda = e(\nu, a + k)$, $\mu = e(\nu, b + k)$ и $l^{a,b}(\nu) = k$. Но $a = b = 0$, поэтому $l^{a,b}(\nu) = l(\nu)$. $\square$

Замечание 4.8. Правая часть формулы из теоремы 1.2 кажется не зависящей от m и n . Но $\dim U^* = m$ и $\dim V^* = n$. Поэтому если диаграмма λ имеет более m строк или диаграмма μ имеет более n строк, то $U_\lambda^* \otimes V_\mu^* = 0$.

Обозначим через $\tilde{S}(w, a, b, k)$ множество отмеченных диаграмм θ , для которых $\text{wt}(\theta_0) + k = w$, $|\theta_L| = a$, $|\theta_R| = b$ и $|\theta_L \cap \theta_R| = k$. Если изотипическая компонента веса ω в (9) изоморфна $\Sigma_\theta W^* \otimes \Lambda^{\geq k} E(-k)$ для $k > 0$, векторного пространства E размерности N и $\omega = \omega(\theta)$, то $\theta \in \tilde{S}(w, a, b, k)$. Для каждого такого комбинаторного куба существует канонический элемент θ , где каждая клетка, лежащая в $B(\theta)$, отмечена сочетанием LR. Обозначим множество таких отмеченных диаграмм через $S(w, a, b, k)$. Тогда каждый k -й обрезанный комбинаторный N -куб $\Sigma_\theta W^* \otimes \Lambda^{\geq k} E(-k)$ соответствует единственному элементу $\theta \in S(w, a, b, k)$, где $N = B(\theta)$.

Теорема 4.9. *Рассмотрим вложение Сегре $X = \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}(V) \subset \mathbb{P}(U \otimes V)$. Пусть $a \geq -m$ и $b \geq -n$. Тогда существует резольвента*

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{1,k+1}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-1-k) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} R_{0,k}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-k) \longrightarrow \mathcal{O}_X(a,b) \longrightarrow 0,$$

где $m = \dim U$, $n = \dim V$

$$R_{p,p+q}^{a,b} = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{l^{a,b}(\nu)=q \\ \text{wt}(\nu)=p}} U_{\mathbf{e}(\nu,a+q)}^* \otimes V_{\mathbf{e}(\nu',b+q)}^*, & q > 0 \text{ или } p = q = 0; \\ \bigoplus_{\theta \in S(a,b,p,k)} (U_{\lambda(\theta)}^* \otimes V_{\mu(\theta)}^*)^{\oplus \binom{|B(\theta)|-1}{k}}, & q = 0, p > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Доказательство. Рассмотрим стандартную резольвенту диагонали (4). Как в доказательстве леммы 2.10, построим резольвенту для $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(a,b)$. По лемме 2.10 для $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(a,b)$ мы имеем

$$R_{p,p+q}^{a,b} = H^q(\mathbb{P}^N, \Omega_{\mathbb{P}(W^*)}^p(p) \otimes i_* \mathcal{O}_X(a,b)) \cong (\text{Tor}_p^S(\mathbb{k}, F(\mathcal{O}_X(a,b))))_q,$$

где правую часть можно вычислить при помощи комплекса Кошуля (9).

Есть два типа изотипических компонент, дающих вклад в группы когомологий комплекса Кошуля $K^\bullet$ (9). Это комбинаторные 0-кубы и обрезанные комбинаторные кубы. По леммам 4.4 и 4.6, если изотипическая компонента веса (λ, μ) является комбинаторным 0-кубом и дает вклад в $H^q((K^\bullet)_p)$, то $\nu = \lambda \cap \mu$, $\text{wt}(\nu) = p$, $\lambda = \mathbf{e}(\nu, q+l)$ и $\mu' = \mathbf{e}(\nu', q+l)$, где $l = l^{a,b}(\mu)$ и $(K^\bullet)_p$ — p -я однородная компонента комплекса $K^\bullet$. Это соответствует первой строке в (10).

Теперь опишем обрезанные комбинаторные кубы. Каждый элемент $\theta \in S(a,b,p,k)$ соответствует подмодулю $(\Sigma_\theta W^*)^{\oplus \binom{|B(\theta)|-1}{k}}$ в пространстве сизигий $R_{p,p}^{a,b}$. $\square$

Поскольку теорема 4.9 и все необходимые леммы функториальны по векторным пространствам U и V , мы можем применить те же рассуждения в относительной ситуации. Это доказывает следующий результат, обобщающий теорему 4.9.

Теорема 4.10. *Пусть B — гладкое алгебраическое многообразие, на котором заданы векторные расслоения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Рассмотрим относительное вложение Сегре $\mathcal{X} = \mathbb{P}_B(\mathcal{U}) \times_B \mathbb{P}_B(\mathcal{V}) \subset \mathbb{P}_B(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})$. Пусть $a \geq -\text{rk}(\mathcal{U})$ и $b \geq -\text{rk}(\mathcal{V})$. Тогда пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(a,b)$ имеет следующую резольвенту:*

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{R}_{1,k+1}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-1-k) \longrightarrow \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{R}_{0,k}^{a,b} \otimes \mathcal{O}(-k) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(a,b) \longrightarrow 0,$$

где

$$\mathcal{R}_{p,p+q}^{a,b} = \begin{cases} \bigoplus_{\substack{l^{a,b}(\nu)=q \\ \text{wt}(\nu)=p}} \Sigma_{\mathbf{e}(\nu,a+q)} \mathcal{U}^* \otimes \Sigma_{\mathbf{e}(\nu',b+q)} \mathcal{V}^*, & q > 0 \text{ или } p = q = 0; \\ \bigoplus_{\theta \in S(a,b,p,k)} (\Sigma_{\lambda(\theta)} \mathcal{U}^* \otimes \Sigma_{\mu(\theta)} \mathcal{V}^*)^{\oplus \binom{|B(\theta)|-1}{k}}, & q = 0, p > 0. \end{cases}$$

Замечание 4.11. На прямой сумме пространств сизигий существует естественная структура алгебры. Рассмотрим комплекс Кошуля $K^\bullet$ вложения Сегре

(определенный в (9)) и выберем эквивариантные проекцию p и вложение i :

$$\mathcal{A} = K^\bullet \begin{matrix} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{i} \end{matrix} H^\bullet(K^\bullet),$$

где $p \circ i = \text{Id}$. Обозначим умножение на комплексе Кошуля через π . Тогда умножение на сизигиях можно задать формулой

$$\varpi(x, y) = p(\pi(i(x), i(y))).$$

Положим $Y = \bigcup_{p,q} Y_{m,n}(p, q, q)$. Тогда $\mathcal{A} = \bigoplus_{\theta \in Y} \Sigma_\theta W^*$. Обратим внимание, что каждый G -подмодуль в прямой сумме пространств сизигий входит в сумму с кратностью 1. Кроме того, в алгебре $\Lambda^\bullet W^*$ каждый G -модуль встречается с кратностью 1. Значит, умножение

$$\varpi: \bigoplus_{\theta_1} \Sigma_{\theta_1} W^* \otimes \bigoplus_{\theta_2} \Sigma_{\theta_2} W^* \longrightarrow \bigoplus_{\theta_3} \Sigma_{\theta_3} W^*$$

можно задать структурными константами $\varpi_{\theta_1, \theta_2}^{\theta_3}$.

Рассмотрим три отмеченные диаграммы $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in Y$. По теореме 1.2 имеем $\omega(\theta_i) = (\mathbf{e}(\nu_i, s_i), \mathbf{e}(\nu'_i, s_i))$, где $s_i = l(\nu_i)$. Тогда $\varpi_{\theta_1, \theta_2}^{\theta_3} \neq 0$, если и только если $s_1 + s_2 = s_3$ и $\nu_3 \subseteq \nu_1 \otimes \nu_2$ во внешней алгебре $\Lambda^\bullet W^*$. (Напомним, что $\Lambda^\bullet W^* = \bigoplus_\nu U_\nu^* \otimes V_\nu^*$.)

Очевидно, что если $s_3 \neq s_1 + s_2$ или $\nu_3 \not\subseteq \nu_1 \otimes \nu_2$, то в силу однородности и эквивариантности умножения $\varpi_{\theta_1, \theta_2}^{\theta_3} = 0$. Допустим, что $s_3 = s_1 + s_2$ и $\nu_3 \subseteq \nu_1 \otimes \nu_2$. Тогда $\varpi_{\theta_1, \theta_2}^{\theta_3} \neq 0$, так как G -подмодуль $\Sigma_{\theta_3} W^*$ лежит в $\varpi(\Sigma_{\theta_1} W^*, \Sigma_{\theta_2} W^*)$, имеет кратность 1 в комплексе Кошуля $K^\bullet$ и в сизигиях и проекция p поэтому его не зануляет.

Приложение А. Примеры сизигий

Пример А.1. Рассмотрим вложение Серге $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$. Существует три диаграммы ширины не более 2 и высоты не более 1. Тогда алгебра сизигий состоит из трех $\text{GL}(2) \times \text{GL}(3)$ -модулей:

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\quad} & \emptyset & \mathbb{k} = R_{0,0} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline & R \\ \hline L & \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \Lambda^2 U^* \otimes \Lambda^2 V^* = R_{1,2} \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & R \\ \hline L & & \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\quad} & \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \Sigma_{2,1} U^* \otimes \Lambda^3 V^* = R_{2,3} \end{array}$$

Имеем $R_{1,2} = \Lambda^2 \mathbb{k}^2 \otimes \Lambda^2 \mathbb{k}^3$, $R_{2,3} = \Sigma_{2,1} \mathbb{k}^2 \otimes \Lambda^3 \mathbb{k}^3$, и умножение в алгебре сизигий нулевое.

В частности, существует следующая резольвента:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^2 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^3 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Пример А.2. Рассмотрим вложение Серге $X = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^{11}$. Существует 10 диаграмм ширины не более 3 и высоты не более 2. Алгебра сизигий состоит из десяти $\text{GL}(3) \times \text{GL}(4)$ -модулей:

Имеем

$$\begin{aligned}
 R_{1,2} &= \Lambda^2 \mathbb{k}^3 \otimes \Lambda^2 \mathbb{k}^4, & R_{2,3} &= \Sigma_{2,1} \mathbb{k}^3 \otimes \Lambda^3 \mathbb{k}^4 \oplus \Lambda^3 \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{1,2} \mathbb{k}^3, \\
 R_{3,4} &= \Sigma_{3,1} \mathbb{k}^3 \otimes \Lambda^4 \mathbb{k}^4 \oplus \Sigma_{2,1,1} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1} \mathbb{k}^4, \\
 R_{4,5} &= \Sigma_{3,1,1} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,1,1,1} \mathbb{k}^4, & R_{4,6} &= \Sigma_{2,2,2} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2} \mathbb{k}^4, \\
 R_{5,7} &= \Sigma_{3,2,2} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2,1} \mathbb{k}^4, & R_{6,8} &= \Sigma_{3,3,2} \mathbb{k}^3 \otimes \Sigma_{2,2,2,2} \mathbb{k}^4.
 \end{aligned}$$

Существуют только следующие ненулевые отображения умножения между этими модулями:

$$\begin{aligned}
 R_{1,2} \times R_{3,4} &\rightarrow R_{4,6}, & R_{1,2} \times R_{4,5} &\rightarrow R_{5,7}, & R_{2,3} \times R_{2,4} &\rightarrow R_{4,6}, \\
 R_{2,3} \times R_{3,5} &\rightarrow R_{5,7}, & R_{2,3} \times R_{4,6} &\rightarrow R_{6,8}, & R_{3,4} \times R_{3,4} &\rightarrow R_{6,8}.
 \end{aligned}$$

В частности, имеется следующая резольвента:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-7)^3 \longrightarrow \mathcal{O}(-6)^{12} \longrightarrow \mathcal{O}(-5)^{12} \oplus \mathcal{O}(-4)^{24} \\ \longrightarrow \mathcal{O}(-3)^{60} \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{52} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{18} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Приложение В. Примеры резольвент пучков

Пример В.1. Рассмотрим вложение Серге $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$ и пучок $\mathcal{O}_X(-1, 1)$. Тогда существует 6 изотипических компонент, являющихся 0-кубами, и нет обрезанных кубов. Ниже изображены веса этих модулей:

Получается следующая резольвента:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-5) \rightarrow \mathcal{O}(-4)^6 \rightarrow \mathcal{O}(-3)^{15} \rightarrow \mathcal{O}(-2)^{16} \rightarrow \mathcal{O}(-1)^6 \rightarrow \mathcal{O}_X(-1, 1) \rightarrow 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. L. Gorodentsev, A. S. Khoroshkin, A. N. Rudakov, *On syzygies of highest weight orbits*, in: Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 221, 2007, 79–120.
- [2] G. Ottaviani, R. Paoletti, *Syzygies of Veronese embeddings*, Compositio Math., **125**:1 (2001), 31–37; <http://arxiv.org/abs/math/9811131>.
- [3] A. Snowden, *Syzygies of Segre embeddings and Δ -modules*, Duke Math. J., **162**:2 (2013), 225–277; <http://arxiv.org/abs/1006.5248>.
- [4] W. Fulton, *Young Tableaux*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [5] M. Green, *Koszul cohomology and the geometry of projective varieties*, I, II, J. Differential Geom., **19**, **20** (1984), 125–171, 279–289.
- [6] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Гомологическая алгебра*, в кн.: Алгебра–5, Итоги науки и техн. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 38, ВИНТИ, М., 1989, 5–233.
- [7] G. Lancaster, J. Towber, *Representation-functors and flag-algebras for the classical groups*, J. Algebra, **59**:1 (1979), 16–38.

- [8] Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **36**:4 (1972), 749–764.
- [9] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory. A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [10] A. Polyshchuk, L. Positselski, *Quadratic Algebras*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [11] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 133, Springer-Verlag, New York, 1995.

Факультет математики НИУ ВШЭ
Независимый московский университет
e-mail: i.v.netay@gmail.com

Поступило в редакцию
12 декабря 2011 г.