Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Арнольд, Комплексный лагранжев грассман-
иан, *Функц. анализ и его прил.*, 2000, том 34, вы-
пуск 3, 63–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa312>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:56:56

Комплексный лагранжев грассманиан

© 2000. В. И. Арнольд

Многообразие лагранжевых подпространств векторного симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$ есть $U(n)/O(n)$ (см. [1]). Естественно возникает вопрос о комплексном и кватернионном вариантах этих понятий (см. [2]). В настоящей работе показано, что комплексным аналогом является многообразие унитарных матриц $U(n)$. Это многообразие оказывается компактификацией пространства эрмитовых матриц в таком же смысле, в каком вещественное лагранжево многообразие Грассмана компактифицирует пространство симметрических матриц.

1. Комплексификация теоремы Дарбу. В комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ вместо $\mathbb{C}$ -симплектической структуры рассмотрим следующий ее аналог.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Симплектоидной структурой* в $\mathbb{C}^n$ называется вещественная симплектическая структура Ω , инвариантная относительно умножения на комплексные числа, по модулю равные 1: $\Omega(\lambda\xi, \lambda\eta) = \Omega(\xi, \eta)$ при $|\lambda| = 1$.

ТЕОРЕМА. *Такая структура Ω существует и задается формулой $\Omega = \sum \pm x_k \wedge y_k$ в подходящей системе координат $z_k = x_k + iy_k$ комплексного векторного пространства $\mathbb{C}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножения на e^{it} образуют однопараметрическую группу линейных симплектических преобразований в $\mathbb{R}^{2n}$, т. е. гамильтонов поток с квадратичным гамильтонианом H . Вещественным линейным симплектическим преобразованием такой гамильтониан приводится к форме

$$H = \sum (\pm(p_k^2 + q_k^2)/2), \quad \Omega = \sum p_k \wedge q_k,$$

так как собственные частоты равны ± 1 вследствие 2π -периодичности колебаний.

Инвариантные координатные плоскости (p_k, q_k) — комплексные прямые (так как колебания состоят в умножении на e^{it}). Симплектические ориентации $p_k \wedge q_k$ этих плоскостей могут совпадать либо не совпадать с комплексными ориентациями (заданными реперами вида $\xi, i\xi$). Если комплексная координата на плоскости (p_k, q_k) есть $z_k = x_k + iy_k$, то $x_k \wedge y_k = c_k p_k \wedge q_k$. Для $z_k(t) = e^{it}\xi_k$ имеем $\dot{z}_k = iz_k$, $\dot{x}_k = -y_k$, $\dot{y}_k = x_k$, а для $H = \pm(p_k^2 + q_k^2)/2$ имеем $\dot{p}_k = \mp q_k$, $\dot{q}_k = \pm p_k$; поэтому $p_k \pm iq_k = c_k(x_k + iy_k) = c_k z_k$. Линейной заменой $Z_k = c_k z_k$ добиваемся, чтобы $p_k \pm iq_k = Z_k = X_k + iY_k$, так что $dp_k \wedge dq_k = \pm dX_k \wedge dY_k$, т. е. мы привели Ω к искомой канонической форме.

2. Приспособленная $\mathbb{C}$ -симплектическая структура. Рассмотрим билинейную форму $S(\xi, \eta) = \Omega(i\xi, \eta)$, где Ω есть $\mathbb{C}$ -симплектоидная структура. Форма S симметрическая, так как $S(\eta, \xi) = \Omega(i\eta, \xi) = \Omega(-\eta, i\xi) = -\Omega(\eta, i\xi) = \Omega(i\xi, \eta) = S(\xi, \eta)$. Сигнатура соответствующей квадратичной формы $S(\xi, \xi)$ является (единственным) инвариантом $\mathbb{C}$ -симплектоидной структуры (она определяется числом минусов в нормальной форме в теореме).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Приспособленной $\mathbb{C}$ -симплектической структурой в $\mathbb{C}^{2n}$ называется симплектоидная структура, для которой сигнатура квадратичной формы S равна нулю (т.е. в нормальной форме число минусов равно числу плюсов).*

По теореме такая структура единственна (с точностью до комплексного линейного преобразования).

ПРИМЕР. Обозначим слагаемые в разложении вектора $\xi \in \mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}_1^n \oplus \mathbb{C}_2^n$ через $x \in \mathbb{C}_1^n$, $y \in \mathbb{C}_2^n$ и аналогичные слагаемые для вектора η через $v \in \mathbb{C}_1^n$, $w \in \mathbb{C}_2^n$.

Будем обозначать знаком $\langle \cdot, \cdot \rangle$ эрмитово скалярное произведение векторов из $\mathbb{C}_1^n$ на векторы из $\mathbb{C}_2^n$ (например, $\langle x, w \rangle = \sum x_k \overline{w_k}$).

Рассмотрим в $\mathbb{C}^{2n}$ эрмитову форму $\omega(\xi, \eta) = \langle x, w \rangle + \langle y, v \rangle \in \mathbb{C}$. Очевидно, $\omega(\eta, \xi) = \overline{\omega(\xi, \eta)}$, $\omega(\lambda\xi, \eta) = \lambda\omega(\xi, \eta)$; поэтому $\omega(\lambda\xi, \lambda\eta) = \omega(\xi, \eta)$ при $|\lambda| = 1$, так что форма ω S^1 -инвариантна.

Обозначим вещественную и мнимую части формы ω через S и Ω , так что $S(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$, $\Omega(\xi, \eta) \in \mathbb{R}$,

$$\omega(\xi, \eta) = S(\xi, \eta) + i\Omega(\xi, \eta).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Структура Ω является приспособленной $\mathbb{C}$ -симплектической структурой в $\mathbb{C}^{2n}$.*

Вследствие уже доказанной единственности наша формула доставляет нормальную форму любой приспособленной $\mathbb{C}$ -симплектической структуры.

По определению формы ω

$$S(\xi, \eta) = \operatorname{Re} x \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} x \operatorname{Im} w + \operatorname{Re} y \operatorname{Re} v + \operatorname{Im} y \operatorname{Im} v = S(\eta, \xi),$$

$$\Omega(\xi, \eta) = \operatorname{Im} x \operatorname{Re} w - \operatorname{Re} x \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} y \operatorname{Re} v - \operatorname{Re} y \operatorname{Im} v = -\Omega(\eta, \xi),$$

$$\Omega(i\xi, \eta) = \operatorname{Re} x \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} x \operatorname{Im} w + \operatorname{Re} y \operatorname{Re} v + \operatorname{Im} y \operatorname{Im} v = S(\xi, \eta);$$

поэтому

$$S(i\xi, \eta) = \Omega(-\xi, \eta) = -\Omega(\xi, \eta).$$

Ясно, что Ω — кососимметрическая невырожденная форма, а S — симметрическая форма сигнатуры 0 (тоже невырожденная): равенство сигнатуры нулю видно, например из формулы

$$4S(\xi, \eta) = \|x + w\|^2 - \|x - w\|^2 + \|y + v\|^2 - \|y - v\|^2.$$

Предложение доказано.

Введем обозначения для n -компонентных векторов

$$x - y = X, \quad x + y = Y, \quad v - w = V, \quad v + w = W.$$

Мы построили новое разложение $\mathbb{C}^{2n} = \mathbb{C}_3^n \oplus \mathbb{C}_4^n$ ($X \in \mathbb{C}_3^n$, $Y \in \mathbb{C}_4^n$, $V \in \mathbb{C}_3^n$, $W \in \mathbb{C}_4^n$ — новые «компоненты» векторов ξ и η). Заметим, что $2x = X + Y$, $2y = -X + Y$, $2v = V + W$, $2w = -V + W$. Следовательно, форма ω имеет вид

$$4\omega(\xi, \eta) = 4\langle x, w \rangle + 4\langle y, v \rangle = 2\langle Y, W \rangle - 2\langle X, V \rangle. \quad (*)$$

3. Лагранжевы плоскости. Подпространство L $\mathbb{C}$ -размерности n в $\mathbb{C}^{2n}$ называется Ω -лагранжевым, если $\Omega(\xi, \eta) = 0$ для любых векторов ξ, η из L . Оно называется ω -лагранжевым, если $\omega(\xi, \eta) = 0$ для любых векторов ξ, η из L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Подпространство Ω -лагранжево, если и только если оно ω -лагранжево.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже видели выше, что $\omega(\xi, \eta) = \Omega(i\xi, \eta) + i\Omega(\xi, \eta)$. Поскольку подпространство комплексное, $i\xi$ принадлежит ему вместе с ξ ; поэтому если $\Omega = 0$, то и $\omega = 0$. Если же $\omega = 0$, то и ее мнимая часть Ω тоже есть 0 (как и ее вещественная часть, S).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пересечение любого лагранжева подпространства L с плоскостью $x = y$ (т. е. $X = 0$) нулевое.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\omega(\xi, \xi) = 2\langle x, x \rangle = 0$ для любого ξ из $L \cap (x = y)$; поэтому $x = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. *Любое лагранжево подпространство L в $\mathbb{C}^{2n}$ является графиком некоторого комплексно-линейного оператора $U: \mathbb{C}_3^n \rightarrow \mathbb{C}_4^n$, т. е. задается уравнением $Y = UX$.*

Действительно, по предыдущему предложению L является сечением расслоения $\mathbb{C}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}_3^n$ со слоем $\mathbb{C}_4^n$.

ТЕОРЕМА. *График оператора U является лагранжевым тогда и только тогда, когда оператор U является унитарным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (*)

$$4\omega(\xi, \eta) = 2\langle Y, W \rangle - 2\langle X, V \rangle.$$

Если $Y = UX$, $W = UV$, то условие лагранжевости ($\omega = 0$) принимает вид

$$\langle UX, UV \rangle = \langle X, V \rangle$$

для любых X, V из $\mathbb{C}_3^n$, что и означает унитарность оператора U .

СЛЕДСТВИЕ. *Многообразие лагранжевых подпространств в $\mathbb{C}^{2n}$ диффеоморфно группе унитарных матриц $U(n)$.*

Диффеоморфизм сопоставляет матрице U график оператора U .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если комплексная плоскость является графиком оператора $y = Ax$, то условие лагранжевости $\omega(\xi, \eta) = \langle x, w \rangle + \langle y, v \rangle = 0$ принимает вид $\langle x, Av \rangle + \langle Ax, v \rangle = 0$, т. е. $A^* = -A$ (оператор косоэрмитов). Связь между операторами A и U дается преобразованием Кэли (уже встречавшимся по этому поводу в [1]):

$$A = (U - 1)/(U + 1), \quad U = (1 + A)/(1 - A).$$

Таким образом, унитарная группа оказывается компактификацией векторного (вещественного) пространства косоэрмитовых матриц (соответствующих унитарным матрицам без собственного числа -1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Функци. анализ и его прил., 1, вып. 1, 1–14 (1967). 2. Arnold V. I. In: Mathematics: Frontiers and Perspectives (Arnold V., Atiyah M., Lax P., Mazur B., eds.), IUM, Amer. Math. Soc., 2000, pp. 403–416.

Математический институт им. В. А. Стеклова и
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Поступило в редакцию
22 мая 2000 г.