Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. В. Абрамов, Система результатов как набор коэффициентов одного результата, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 3, 82–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 03:37:12

Система результатов как набор коэффициентов одного результата*

© 2013. Я. В. АБРАМОВ

1. Введение. Пусть $\mathbb{k}$ — алгебраически замкнутое поле. Рассмотрим следующую классическую задачу.

Задача. Дана система однородных полиномиальных уравнений:

$$\begin{cases} f_0(x_0, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x_0, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$m \geq n, \quad \deg f_i = N_i, \quad f_j(x) = \sum_{\sum_i s_i = N_j} a_{j,s_0, \dots, s_n} x_0^{s_0} \cdots x_n^{s_n}, \quad a_{j,s_0, \dots, s_n} \in \mathbb{k}.$$

Как определить, есть ли у нее ненулевое решение в $\mathbb{k}^{n+1}$?

В [5] доказано, что наборы многочленов $(f_0, \dots, f_m)$ (каждый из которых рассматривается с точностью до умножения на ненулевую константу), для которых система (1) имеет ненулевое решение, составляют проективное алгебраическое подмногообразие в $\mathbb{P}(S^{N_0}(\mathbb{k}^{n+1})) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{N_m}(\mathbb{k}^{n+1}))$, а именно, существует конечный набор многочленов $\{R_l(a)\}$ с целыми коэффициентами от наборов коэффициентов $a = (\dots, a_{j,s_0,s_1,\dots,s_n}, \dots, a_{k,t_0,t_1,\dots,t_n}, \dots)$ многочленов f_j , такой, что каждый многочлен $R_l(a)$ однороден по коэффициентам каждого многочлена f_j и у системы (1) есть ненулевое решение тогда и только тогда, когда $R_l(a) = 0$ для любого l .

Мы будем называть это многообразие *результантным многообразием*.

Определение 1. Набор многочленов $\{R_l(a) \in \mathbb{Z}[a_{j,s}]_{j,s}\}$, множество общих нулей которого в $\mathbb{P}(S^{N_0}(\mathbb{k}^{n+1})) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{N_m}(\mathbb{k}^{n+1}))$ есть результантное подмногообразие, называется *однородной системой результантов*.

Пример 1.1. Пусть $\deg f_j = 1$, $j = 0, \dots, m$, $f_j(x) = \sum_i a_{ji} x_i$. Тогда однородная система результантов — это множество максимальных миноров матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В частном случае задачи (1), когда число уравнений равно числу неизвестных, $m = n$, известно (современное изложение см. в [3]), что результантное

*Работа была частично поддержана лабораторией алгебраической геометрии НИУ-ВШЭ, грант РФ 11.G34.31.0023, и грантами РФФИ 10-01-00836, 12-01-33101 и 12-01-31233.

многообразие неприводимо и задается как множество нулей одного неприводимого многочлена с целыми коэффициентами. Мы будем обозначать этот многочлен через $R(f_0, \dots, f_n) \in \mathbb{Z}[a]$ и называть *однородным результатом* $n + 1$ многочленов от $n + 1$ переменных.

Пример 1.2. Пусть $f(x, y) = \sum_i a_i x^i y^{n-i}$, $g(x, y) = \sum_i b_i x^i y^{m-i}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Тогда

$$R(f(x, y), g(x, y)) = \text{Res}(f(1, z), g(1, z)),$$

где Res — это хорошо известный детерминант Сильвестра

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix}}_{m+n} \left. \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} m \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} n \end{matrix} \right\}$$

Пусть X — проективное многообразие размерности n . Пусть $L_0, \dots, L_m$ ($m \geq n$) — линейные расслоения на X . Пусть $F_j \in H^0(X, L_j)$, $j = 0, \dots, m$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} F_0(x) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_m(x) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В [3] доказано, что в случае, когда $m = n$ и все L_i очень обильны, набор сечений $(F_0, \dots, F_n)$ (каждое из которых рассматривается с точностью до умножения на ненулевую константу), для которых система (2) имеет решение, составляют неприводимую замкнутую гиперповерхность в $\mathbb{P}(H^0(X, L_0)) \times \dots \times \mathbb{P}(H^0(X, L_n))$, т.е. существует неприводимый многочлен $\mathcal{R}(F_0, \dots, F_n)$ (однородный по координатам на каждом $H^0(X, L_j)$) на $\bigoplus_{j=0}^n H^0(X, L_j)$, такой, что у системы (2) есть решение тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(F_0, \dots, F_n) = 0$. Такой многочлен называется *смешанным результатом* сечений $F_0, \dots, F_n$ расслоений $L_0, \dots, L_n$ и обозначается через $R_{L_0, \dots, L_n}(F_0, \dots, F_n)$. По аналогии с однородной системой результатов вводится и *смешанная система результатов* сечений $F_0, \dots, F_m$ расслоений $L_0, \dots, L_m$, число $m + 1$ которых больше $\dim X + 1$ (или системы (2)).

Следующие два примера показывают, почему важно изучать смешанные системы результатов.

Пример 1.3. Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$, $Y \subset \mathbb{P}^m$ — квазипроективные многообразия и $f: X \rightarrow Y$ — регулярный морфизм. Обозначим через $R_1(y_0, \dots, y_m), \dots, R_N(y_0, \dots, y_m)$ смешанную систему результатов набора сечений $y_j f^*(s_i) - y_i f^*(s_j) \in H^0(X, f^* \mathcal{O}_{\overline{Y}}(1))$, $0 \leq i < j \leq m$, для $\binom{m+1}{2}$ одинаковых расслоений $f^* \mathcal{O}_{\overline{Y}}(1)$ на многообразии X , где $s_0, \dots, s_m$ — какой-нибудь базис в $H^0(\overline{Y}, \mathcal{O}_{\overline{Y}}(1))$, а $[y_0 : \dots : y_m]$ — точка в $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(H^0(\overline{Y}, \mathcal{O}_{\overline{Y}}(1))^*)$. Тогда замыкание образа $f(X) \subset \mathbb{P}^m$ является множеством нулей многочленов $R_k(y_0, \dots, y_m)$, $k = 1, \dots, N$.

Основным результатом настоящей работы является формула, выражающая однородную систему результатов общей системы (1) в виде коэффициентов разложения одного однородного результата подходящей системы, у которой число уравнений равно числу неизвестных и которая явно строится по данной системе (1).

Благодарности. Я очень благодарен А. Л. Городенцеву и Б. Штурмфельсу за полезные обсуждения в связи с этой статьей.

2. Формулировки результатов о результатах. 2.1. *Смешанные системы результатов линейных систем сечений расслоений.*

Определение 2. Будем говорить, что расслоение E на X имеет достаточно много сечений, если отображение вычисления $H^0(X, E) \rightarrow E|_x$ сюръективно для каждой точки $x \in X$.

Пусть $L_0, \dots, L_m$ и $F_0, \dots, F_m$ — те же, что и выше. Рассмотрим такие очень обильные линейные расслоения $B_0, \dots, B_n$, что при всех i, j линейные расслоения $C_{ij} = L_j^* \otimes B_i$ имеют достаточно много сечений. Такая система всегда существует, если все L_i очень обильны, например $C_{ij} = \bigotimes_{k \neq j} L_k$, $B_i = \bigotimes_k L_k$.

Тогда мы имеем следующую теорему:

Теорема 1. Пусть для каждого $i = 0, \dots, n$ задано подпространство

$$V_i \subset \text{Hom} \left(\bigoplus_j L_j, B_i \right) = \bigoplus_j H^0(X, C_{ij}),$$

такое, что каноническое отображение свертки $V_i \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \bigoplus_j C_{ij}$ сюръективно. Тогда набор коэффициентов $r_\omega(F_0, \dots, F_m)$ смешанного результата сечений расслоений $B_0, \dots, B_n$

$$R = R_{B_0, \dots, B_n}(\varphi_0(F_0, \dots, F_m), \dots, \varphi_n(F_0, \dots, F_m)) = \sum_\omega r_\omega(F_0, \dots, F_m) \varphi^\omega,$$

рассматриваемого как многочлен от $(\varphi_0, \dots, \varphi_n) \in V_0 \oplus \dots \oplus V_n$, является смешанной системой результатов системы (2).

2.2. *Однородные системы результатов полиномиальных систем.* Применительно к исходной задаче (1) теорема 1 приводит к следующим результатам. Зафиксируем некоторые неотрицательные целые числа m_i и k_{ij} , такие, что $m_i = k_{ij} + N_j$, где $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$. Рассмотрим однородные многочлены

$$A_{ij}(x) = \sum_{\sum_l s_l = k_{ij}} b_{i,j,s_0, \dots, s_n} x_0^{s_0} \cdots x_n^{s_n}$$

степени k_{ij} с коэффициентами в поле $\mathbb{K} = \mathbb{k}(\dots, b_{i,j,s_0, \dots, s_n}, \dots, b_{k,l,t_0, \dots, t_n}, \dots)$. Обозначим набор коэффициентов многочленов A_{ij} через $b = (\dots, b_{i,j,s_0, \dots, s_n}, \dots, b_{k,l,t_0, \dots, t_n}, \dots)$

Рассмотрим следующий однородный результат $n+1$ многочленов степеней $m_0, \dots, m_n$ от $n+1$ неизвестных $x_0, \dots, x_n$ с коэффициентами в поле $\mathbb{K} = \mathbb{k}(b)$:

$$R \left(\sum_{j=0}^m A_{0j} f_j, \sum_{j=0}^m A_{1j} f_j, \dots, \sum_{j=0}^m A_{nj} f_j \right) = \sum_\omega \ell_\omega(a) b^\omega, \quad (3)$$

где $\ell_\omega(a)$ — коэффициенты этого многочлена при одночленах b^ω .

Теорема 2. Коэффициенты $\ell_\omega(a)$ составляют однородную систему результатов системы (1).

Количество результатных уравнений в этой системе равно количеству различных одночленов от переменных b в разложении (3), и этот набор результатных уравнений заведомо избыточен. Его можно уменьшить при помощи следующего обобщения теоремы 2:

Теорема 3. Пусть для каждого $i = 0, \dots, n$ в $\bigoplus_{j=0}^m S^{k_{ij}}(\mathbb{K}^{n+1})$ задано подпространство V_i , такое, что для любого $x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$ отображение вычисления, переводящее набор многочленов $(A_{i0}, A_{i1}, \dots, A_{im})$ в точку $(A_{i0}(x), A_{i1}(x), \dots, A_{im}(x)) \in \mathbb{K}^{m+1}$, сюръективно отображает V_i на $\mathbb{K}^{m+1}$. Тогда система (1) имеет ненулевое решение в $\mathbb{K}^{n+1}$, если и только если

$$R = R\left(\sum_{j=0}^m A_{0j}f_j, \sum_{j=0}^m A_{1j}f_j, \dots, \sum_{j=0}^m A_{nj}f_j\right) \equiv 0$$

как многочлен на $\bigoplus_{i=0}^n V_i$. Таким образом, коэффициенты многочлена R в каком-либо базисе пространства $\bigoplus_{i=0}^n V_i$ образуют однородную систему результатов системы (1).

Пример 2.1. Примером набора V_i , удовлетворяющего условию теоремы 3, является $V_i = \bigoplus_j \{\sum_l a_l x_l^{k_{ij}} \mid a_l \in \mathbb{K}\}$.

Следствие. Пусть $\deg f_0 \geq \deg f_1 \geq \dots \geq \deg f_m$ и $k_{ij} = \deg f_i - \deg f_j$, и пусть для каждого $i = 0, \dots, n$ в $\bigoplus_{j=n+1}^m S^{k_{ij}}(\mathbb{K}^{n+1})$ задано подпространство V_i , такое, что для любого $x \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus 0$ отображение вычисления, переводящее набор многочленов $(A_{i,n+1}, A_{i,n+2}, \dots, A_{i,m})$ в точку $(A_{i,n+1}(x), A_{i,n+2}(x), \dots, A_{i,m}(x)) \in \mathbb{K}^{m-n}$, сюръективно отображает V_i на $\mathbb{K}^{m-n}$. Тогда система (1) имеет ненулевое решение, если и только если

$$R\left(f_0 + \sum_{j=n+1}^m A_{0j}f_j, f_1 + \sum_{j=n+1}^m A_{1j}f_j, \dots, f_n + \sum_{j=n+1}^m A_{nj}f_j\right) \equiv 0$$

как многочлен на $\bigoplus_{i=0}^n V_i$.

Замечание. В работе [2] рассмотрен аналогичный метод построения однородных систем результатов как набора коэффициентов одного результата для случая двух однородных переменных. Получаемая система результатов состоит из меньшего количества многочленов, чем получилось у нас.

3. Доказательства. Теоремы 2 и 3 следуют из теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Предположим противное. Для $x \in X$ положим

$$H_{i,x} = \left\{ (A_{ij})_j \in V_i \mid \sum_{j=0}^m A_{ij}(x) \otimes f_j(x) = 0 \right\} \quad (4)$$

и $H_x = \bigoplus_{i=0}^n H_{i,x}$. Условие $R \equiv 0$ равносильно тому, что $\bigoplus_{i=0}^n V_i = \bigcup_{x \in X} H_x$. Если x не является решением системы (2), то $H_{i,x}$ — это гиперплоскость, задаваемая одним ненулевым линейным уравнением (см. (4)) в V_i и H_x имеет коразмерность $n+1$ как линейное подпространство в $V = \bigoplus_{i=0}^n V_i$. Если система (2) не имеет решения, то V является объединением n -параметрического семейства подпространств коразмерности $n+1$. Противоречие.

4. Задача о том, когда одна орбита лежит в замыкании другой. Пусть G — неприводимая аффинная алгебраическая группа, $X \subset \mathbb{A}^l$ — квазиаффинное алгебраическое многообразие и имеется действие $G : X$.

В работе [4] представлен алгоритм выяснения, когда одна орбита действия группы G лежит в замыкании другой, для случая, когда X — конечномерное линейное представление группы G . Здесь мы представим аналогичный алгоритм для общего случая. Этот алгоритм, например, позволяет определить, когда две точки лежат на одной орбите. В самом деле, $y \in Gx$ тогда и только тогда, когда $y \in \overline{Gx}$ и $x \in \overline{Gy}$.

Как следует из существования разложения Леви, G как многообразие изоморфно $G_{\text{red}} \times \mathbb{A}^r$, где G_{red} — редуктивная группа. Из разложения Брюа следует, что G_{red} содержит в себе открытое плотное подмножество, изоморфное $(\mathbb{A}^*)^n \times \mathbb{A}^p$. Таким образом, G содержит открытое плотное подмножество U , изоморфное $(\mathbb{A}^*)^n \times \mathbb{A}^m$. Пусть x — точка на X . Тогда замыкание $\overline{Gx}$ орбиты Gx совпадает с замыканием множества $Ux = \{g \cdot x \mid g \in U\}$. Если $u \in U$, то будем использовать для вектора $u \cdot x \in X \subset \mathbb{A}^l$ обозначение $u \cdot x = F(u) = (F_1(u), \dots, F_l(u))$. Тогда $F_i(u)$ — многочлен Лорана от $u \in U \cong (\mathbb{A}^*)^n \times \mathbb{A}^m$.

Пусть A — выпуклый многогранник с целыми вершинами в $\mathbb{Z}^{n+m}$ и $M = \{m_1, \dots, m_T\}$ — множество всех целых точек внутри него. Рассмотрим в $\mathbb{P}^{T-1}$ отображение $f_A : u \mapsto [u^{m_1} : \dots : u^{m_T}]$. Замыкание его образа $f_A(U)$ является торическим многообразием, которое мы обозначим через X_A . Сечения пучка $\mathcal{O}_{X_A}(1)$ можно отождествить с многочленами Лорана с носителями в A . Тогда для $\dim A + 1$ многочленов Лорана $s_0, \dots, s_{\dim A}$ с носителями в A можно рассмотреть их смешанный результат $R_A(s_0, \dots, s_{\dim A})$.

Положим $F_0(u) = 1$. Пусть A_i — носитель многочлена $F_i(u)$ в $\mathbb{Z}^{n+m}$. Обозначим через Δ_{ij} для $0 \leq i < j \leq l$ выпуклую оболочку множества $A_i \cup A_j$. Пусть Σ_{ij} для $0 \leq i < j \leq l$ — сумма Минковского, $\Sigma_{ij} = \sum_{(s,t) \neq (i,j)} \Delta_{st}$. Положим $\Delta = \sum_{i < j} \Delta_{ij}$.

Рассмотрим многочлены Лорана $A_{ij,k}(u) = \sum_{t \in \Sigma_{ij}} a_{ijk,t} u^t$ для $0 \leq i < j \leq l$, $k = 0, \dots, \dim \Delta$ с коэффициентами в поле $\mathbb{K}(\dots, a_{ijk,t}, \dots, a_{pqr,w}, \dots)$.

Положим $y_0 = 1$. Тогда, согласно примеру 1.3 и теореме 1, замыкание множества Ux задается системой уравнений на $y_1, \dots, y_l$

$$R_{\Delta} \left(\sum_{0 \leq i < j \leq l} A_{ij,0}(u)(y_i F_j(u) - y_j F_i(u)), \sum_{0 \leq i < j \leq l} A_{ij,1}(u)(y_i F_j(u) - y_j F_i(u)), \dots, \sum_{0 \leq i < j \leq l} A_{ij,\dim \Delta}(u)(y_i F_j(u) - y_j F_i(u)) \right) = \sum_{\omega} S_{\omega}(y) a^{\omega} \equiv 0.$$

5. Пример получаемой однородной системы результатов. Будем считать, что характеристика поля равна 0 или больше 12. Пусть $n = 2$. Для системы вида (1), где все $N_i = 2$, можно положить $k_{ij} = 0$. Тогда однородная система результатов — это набор коэффициентов многочлена

$$R \left(\sum_i a_i f_i, \sum_i b_i f_i, \sum_i c_i f_i \right) = \sum_{\nu_a, \nu_b, \nu_c} \lambda_{\nu_a, \nu_b, \nu_c}(f) a^{\nu_a} b^{\nu_b} c^{\nu_c}.$$

Однородный результат трех квадратичных многочленов трех однородных переменных имеет мультистепень $(4, 4, 4)$, т. е. суммарная его степень равна 12.

Обозначим его полную поляризацию через $\tilde{R}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_{12})$. Тогда однородная система результатов состоит из всевозможных подстановок векторов $\xi_i = (f_{p_i}, f_{q_i}, f_{r_i})$ в полную поляризацию однородного результата.

В статье [1] приведено несколько явных выражений для однородного результата трех многочленов второй степени от трех однородных переменных. Таким образом, в нашем случае можно выписать в явном виде соответствующую систему результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Morozov, Sh. Shakirov, *New and old results in resultant theory*, <http://arxiv.org/abs/0911.5278>. [2] M. J. Encarnacion, *Appl. Algebra Eng. Comm. Comput.*, **9:3** (1998), 243–245. [3] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinskiy, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1994. [4] V. L. Popov, *Two orbits: When is one in the closure of the other?* <http://arxiv.org/abs/0808.2735v7>. [5] Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*, Наука, М., 1979.

Лаборатория алгебраической геометрии НИУ ВШЭ
e-mail: zroslov@gmail.com

Поступило в редакцию
30 апреля 2012 г.

УДК 517.956

Об экстремумах зонных функций в периодических волноводах*

© 2013. Д. И. Борисов, К. В. Панкрашкин

Одним из важных вопросов теории периодических дифференциальных операторов является вопрос о наличии лакун в их спектре. Помимо математического интереса, это мотивировано, в частности, приложениями таких операторов к изучению распространения волн в периодических средах. В случае периодических операторов Штурма–Лиувилля классическим является результат о том, что концами спектральных лакун могут служить только периодические и антипериодические собственные значения. В многомерном случае аналогичное свойство часто предполагалось выполненным по умолчанию, более точно, часто подразумевалось, что края лакун должны являться значениями зонных функций при особых значениях квазиимпульса, лежащих на границе либо в центре зоны Бриллюэна. Вместе с тем общая теория не исключает наличия экстремумов зонных функций и при промежуточных значениях квазиимпульса, более того, имеется большое количество физических работ, изучающих так называемый эффект расщепления концов зон (split band edge), т. е. достижение зонными функциями своих экстремальных значений в нескольких внутренних точках зоны Бриллюэна. Это свойство играет важную роль в замедлении волн в фотонных кристаллах, см., например, [2], [4], [5]. Недавно появились работы, обсуждающие расположение экстремумов зонных функций на строгом математическом уровне и содержащие построения соответствующих примеров с привлечением

*Работа первого автора была частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00118, Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.», контракт 02.740.11.0612, и грантом FCT No. ptcd/mat/101007/2008.