Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, К. В. Панкрашкин, Об экстремумах зонных функций в периодических волновых-
дах, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, вы-
пуск 3, 87–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3122>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользова-
тельским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:30:50

Обозначим его полную поляризацию через $\tilde{R}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots, \xi_{12})$. Тогда однородная система результатов состоит из всевозможных подстановок векторов $\xi_i = (f_{p_i}, f_{q_i}, f_{r_i})$ в полную поляризацию однородного результата.

В статье [1] приведено несколько явных выражений для однородного результата трех многочленов второй степени от трех однородных переменных. Таким образом, в нашем случае можно выписать в явном виде соответствующую систему результатов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Morozov, Sh. Shakirov, *New and old results in resultant theory*, <http://arxiv.org/abs/0911.5278>. [2] M. J. Encarnacion, *Appl. Algebra Eng. Comm. Comput.*, **9:3** (1998), 243–245. [3] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinskiy, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, Boston, 1994. [4] V. L. Popov, *Two orbits: When is one in the closure of the other?* <http://arxiv.org/abs/0808.2735v7>. [5] Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*, Наука, М., 1979.

Лаборатория алгебраической геометрии НИУ ВШЭ
e-mail: zroslov@gmail.com

Поступило в редакцию
30 апреля 2012 г.

УДК 517.956

Об экстремумах зонных функций в периодических волноводах*

© 2013. Д. И. Борисов, К. В. Панкрашкин

Одним из важных вопросов теории периодических дифференциальных операторов является вопрос о наличии лакун в их спектре. Помимо математического интереса, это мотивировано, в частности, приложениями таких операторов к изучению распространения волн в периодических средах. В случае периодических операторов Штурма–Лиувилля классическим является результат о том, что концами спектральных лакун могут служить только периодические и антипериодические собственные значения. В многомерном случае аналогичное свойство часто предполагалось выполненным по умолчанию, более точно, часто подразумевалось, что края лакун должны являться значениями зонных функций при особых значениях квазиимпульса, лежащих на границе либо в центре зоны Бриллюэна. Вместе с тем общая теория не исключает наличия экстремумов зонных функций и при промежуточных значениях квазиимпульса, более того, имеется большое количество физических работ, изучающих так называемый эффект расщепления концов зон (split band edge), т. е. достижение зонными функциями своих экстремальных значений в нескольких внутренних точках зоны Бриллюэна. Это свойство играет важную роль в замедлении волн в фотонных кристаллах, см., например, [2], [4], [5]. Недавно появились работы, обсуждающие расположение экстремумов зонных функций на строгом математическом уровне и содержащие построения соответствующих примеров с привлечением

*Работа первого автора была частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00118, Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг.», контракт 02.740.11.0612, и грантом FCT No. ptcd/mat/101007/2008.

достаточно сложных комбинаторных структур ([1], [3]). Данные статьи и послужили мотивацией для настоящей работы. Наш основной результат состоит в построении примера классического периодического дифференциального оператора в евклидовой области простой геометрии, в спектре которого содержатся лакуны, концы которых достигаются зонными функциями во внутренних точках зоны Бриллюэна. При этом как положение этих точек, так и количество таких лакун можно выбрать произвольными за счет вариации параметров модели.

Требуемая модель вводится как пара несимметричных волноводов, соединенных между собой периодической системой малых окон на общей границе. На внешних стенках поставлены условия Дирихле, а на общей границе — условия Неймана. В качестве оператора выбирается лапласиан. Показано, что при некоторых соотношениях между периодом расположения окон и шириной волноводов и для достаточно малых окон такой оператор имеет спектральные лакуны, концы которых достигаются на промежуточных значениях квазиимпульса. На физическом уровне строгости уже было замечено, что расщепление концов зон может возникать при сцеплении нескольких $\mathbb{Z}$ -периодических структур с различными характеристиками, см., например, [5], и, насколько известно авторам, настоящая работа содержит первый строгий результат подобного типа.

Опишем строгую постановку задачи и основной результат. Пусть $d_+ := \pi$, $d_- = d > 0$, h и ε — параметры, такие, что $0 \leq \varepsilon < h$. Параметр h считаем фиксированным, параметр ε — малым. Волноводы моделируются парой бесконечных прямых полос:

$$\Pi_+ := \mathbb{R} \times (0, d_+), \quad \Pi_- := \mathbb{R} \times (-d_-, 0), \quad \Pi := \mathbb{R} \times (-d_-, d_+).$$

Через H^ε обозначим оператор в $L_2(\Pi)$, действующий как лапласиан с краевыми условиями Дирихле на прямых $x_2 = \pm d_\pm$ и краевыми условиями Неймана на прямой $x_2 = 0$ за исключением отрезков $\varpi_n^\varepsilon := (2nh - \varepsilon, 2nh + \varepsilon) \times \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$. При $\varepsilon = 0$ мы имеем просто $H^0 = H_+ \oplus H_-$, где $H_\pm$ — лапласианы в волноводах $\Pi_\pm$ с краевыми условиями Дирихле на прямых $x_2 = \pm d_\pm$ и краевыми условиями Неймана на прямой $x_2 = 0$. Всюду далее предполагаем, что $d < \pi$. Поскольку $\sigma(H_\pm) = [\pi^2/(4d_\pm^2), +\infty)$, спектр оператора H^0 совпадает с полуосью $[1/4, +\infty)$.

Обозначим через Π^h элементарную ячейку, заданную равенством $\Pi^h := \Pi \cap \{x = (x_1, x_2) : |x_1| < h\}$. Ввиду периодичности по x_1 мы можем применить теорию Флоке–Блоха, которая приводит к оператору $H^\varepsilon(k)$ в $L_2(\Pi^h)$, задаваемому дифференциальным выражением

$$H^\varepsilon(k) = \left(i \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{k}{2h} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (1)$$

и краевыми условиями

$$u|_{\Gamma_D^h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{\Gamma_N^{h,\varepsilon}} = 0, \quad u|_{x_1=-h} = u|_{x_1=h}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=-h} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=h}, \quad (2)$$

где $\Gamma_D^h := \{x = (x_1, d_+) : |x_1| < h\} \cup \{x = (x_1, -d_-) : |x_1| < h\}$, $\Gamma_N^{h,\varepsilon} := \{x = (x_1, 0) : \varepsilon < |x_1| < h\}$. Переменная k в предыдущих формулах обычно называется квазиимпульсом либо блоховским параметром. Для каждого k из зоны Бриллюэна $(-\pi, \pi]$ спектр оператора $H^\varepsilon(k)$ дискретен. Обозначим через $E_l^\varepsilon(k)$, $l \in \mathbb{N}$, его собственные значения, взятые с учетом кратности и занумерованные в неубывающем порядке, $E_l^\varepsilon(k) \leq E_{l+1}^\varepsilon(k)$. Функции $k \mapsto E_l^\varepsilon(k)$ называются

зонными функциями (либо законами дисперсии, либо дисперсионными соотношениями). Они 2π -периодичны, непрерывны и четны. Спектр оператора H^ε есть объединение образов этих функций,

$$\sigma(H^\varepsilon) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} B_l^\varepsilon, \quad B_l^\varepsilon = E_l^\varepsilon((-\pi, \pi]).$$

Отрезок $B_l^\varepsilon =: [\alpha_l^-, \alpha_l^+]$ называется l -й спектральной зоной оператора H^ε . Если при некотором $l \in \mathbb{N}$ выполнено строгое неравенство $\alpha_l^+ < \alpha_{l+1}^-$, то интервал $(\alpha_l^+, \alpha_{l+1}^-)$ называется лакуной оператора H^ε .

Для формулировки основных результатов нам потребуются некоторые дополнительные обозначения. Положим $\Pi_\pm^h := \Pi_\pm \cap \{x : |x_1| < h\}$. В пространствах $L_2(\Pi_\pm^h)$ рассмотрим операторы $H_\pm(k)$, заданные дифференциальным выражением (1) с краевыми условиями (2), где в условии Неймана мы полагаем $\Gamma_N^{h,0} := \{x = (x_1, 0) : |x_1| < h\}$. Собственными значениями этих операторов являются соответственно числа

$$E_{m,p}^\pm(k) = \left(\frac{k + 2\pi m}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{d_\pm} \right)^2 \left(p + \frac{1}{2} \right)^2, \quad m \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3)$$

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что найдутся $k_0 \in (0, \pi)$ и $m, n \in \mathbb{Z}$, для которых выполнены неравенства*

$$E_0 := E_{n,0}^+(k_0) = E_{m,0}^-(k_0) < \frac{9}{4}, \quad \frac{\partial E_{n,0}^+}{\partial k}(k_0) \cdot \frac{\partial E_{m,0}^-}{\partial k}(k_0) < 0. \quad (4)$$

Тогда для достаточно малых ε в спектре оператора H^ε имеется лакуна $(\alpha_l(\varepsilon), \alpha_r(\varepsilon))$, концы которой имеют асимптотику

$$\alpha_j(\varepsilon) = E_0 - \frac{\tau_j}{4h|\ln \varepsilon|} + O(|\ln \varepsilon|^{-2}), \quad j = l, r,$$

где $\tau_l := 2\sqrt{\zeta(1-\beta^2)} - \beta(\zeta-1) - \zeta - 1$, $\tau_r := -2\sqrt{\zeta(1-\beta^2)} - \beta(\zeta-1) - \zeta - 1$, $\zeta := \pi/d$, $\beta := (\pi(m+n) + k_0)/(\pi(n-m))$. Зонные функции $E_l^\varepsilon(k)$ и $E_r^\varepsilon(k)$, описывающие точки спектра левее и правее лакуны $(\alpha_l(\varepsilon), \alpha_r(\varepsilon))$, достигают своих экстремальных значений $\alpha_l(\varepsilon) \equiv \max_{|k| \leq \pi} E_l^\varepsilon(k)$ и $\alpha_r(\varepsilon) \equiv \min_{|k| \leq \pi} E_r^\varepsilon(k)$ в точках $\pm k_l(\varepsilon)$ и $\pm k_r(\varepsilon)$ соответственно:

$$E_l^\varepsilon(\pm k_l(\varepsilon)) = \alpha_l(\varepsilon), \quad E_r^\varepsilon(\pm k_r(\varepsilon)) = \alpha_r(\varepsilon).$$

Имеют место асимптотики

$$k_{l/r}(\varepsilon) = k_0 + \frac{\sigma_{l/r}}{\ln \varepsilon} + O(|\ln \varepsilon|^{-3/2}),$$

$$\sigma_l = -\frac{\beta h}{\pi(n-m)} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta^2}} + \frac{(1-\zeta)h}{2\pi(n-m)}, \quad \sigma_r = \frac{\beta h}{\pi(n-m)} \sqrt{\frac{\zeta}{1-\beta^2}} + \frac{(1-\zeta)h}{2\pi(n-m)}.$$

Отметим, что в силу определения функций $E_{m,0}^-$ и $E_{n,0}^+$ условия (4) могут быть выполнены только в случае, когда по крайней мере одно из чисел m и n отлично от нуля и, кроме того, эти числа имеют разные знаки. Поэтому параметр β в условии теоремы определен корректно и удовлетворяет неравенству $|\beta| < 1$. Отсюда, в частности, следует вещественность чисел τ_l и τ_r .

Выполнение условий (4) требует некоторых соотношений между параметрами h и d . В частности, при достаточно малых h это условие не выполнено ни в одной точке. Элементарный анализ соотношений (3) позволяет получить такое достаточное условие:

Следствие 2. Пусть выполнены условия

$$h > \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{\sqrt{(2\pi/h)^2 + 1}} < d < \pi.$$

Тогда найдется $k_0 \in (0, \pi)$, для которого условия (4) выполнены с $n = -1$ и $m = 0$ и оператор H^ε имеет при достаточно малых ε лауну, лежащую в $O(1/\ln \varepsilon)$ -окрестности точки E_0 , причем прилегающие к этой лауне зонные функции достигают экстремальных значений в $O(1/\ln \varepsilon)$ -окрестности точки k_0 .

Отметим, что за счет подходящего выбора параметров d и h можно добиться выполнения условий теоремы 1 при любом наперед заданном значении квазиимпульса $k_0 \in (0, \pi)$. Аналогично можно добиться наличия любого наперед заданного числа различных точек k_0 в интервале $(1/4, 9/4)$, каждая из которых будет удовлетворять условиям (4). Каждая из них будет порождать свою лауну в силу теоремы 1. Поэтому за счет подходящего выбора параметров d и h на интервале $(1/4, 9/4)$ можно открыть любое наперед заданное число лакун, причем для каждой из них будет верно утверждение теоремы 1; значения k_0 , отвечающие различным лагунам, будут, вообще говоря, различными.

Настоящая работа была выполнена летом 2011 г. во время визита Д. И. Борисова в Южно-Парижский университет, которому он благодарен за оказанное гостеприимство.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] P. Exner, P. Kuchment, B. Winn, J. Phys. A, **43**:47 (2010), id 474022. [2] A. Figotin, I. Vitebsky, Phys. Rev. A, **76**:5 (2007), id 053839. [3] J. Harrison, P. Kuchment, A. Sobolev, B. Winn, J. Phys. A, **40**:27 (2007), 7597–7618. [4] S. Mahmoodian, A. A. Sukhorukov, S. Ha et al., Optics Express, **18**:25 (2010), 25693–25701. [5] G. Mumcu, K. Sertel, J. L. Volakis, I. Vitebskiy, A. Figotin, IEEE Trans. Antennas Propagation, **53**:12 (2005), 4026–4034.

Институт математики с вычислительным центром РАН
Башкирский педагогический университет им. М. Акмуллы
e-mail: borisovdi@yandex.ru

Поступило в редакцию
29 ноября 2011 г.

Laboratoire de mathématiques, Université Paris-Sud
e-mail: konstantin.pankrashkin@math.u-psud.fr

УДК 517.98

Теорема о представлении для квантовых систем

© 2013. А. Доси

Локально выпуклая версия операторной системы в ее конкретной форме введена в [3]. Такие системы являются унитарными эрмитовыми подпространствами унитарной полинормированной C^* -алгебры

$$C^*_\mathcal{E}(\mathcal{D}) = \{T \in L(\mathcal{D}) : p_\alpha T \subseteq T p_\alpha, T p_\alpha \in \mathcal{B}(H), \alpha \in \Lambda\}$$