Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 4, 18–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:55:31

О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа*

© 2013. А. А. Владимирова, И. А. Шейпак

Рассматриваются вторая и третья граничные задачи для уравнения Штурма–Лиувилля, весовой функцией в котором выступает обобщенная производная самоподобной функции канторовского типа. На основе изучения осцилляционных свойств собственных функций указанных задач существенно уточняются известные асимптотики их спектра. А именно, устанавливается, что фигурирующая в известной формуле

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln \lambda) + o(1)]$$

функция s раскладывается в произведение убывающей экспоненты и неубывающей чисто сингулярной функции (и, тем самым, не является постоянной).

§1. Введение

1. В настоящей статье продолжается начатое в работе [1] систематическое изучение спектральных асимптотик граничной задачи

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0, \tag{1.2}$$

где вес ρ представляет собой самоподобную сингулярную меру. Центральные результаты работы [1] состоят в следующем. Считаящая функция $N: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$ собственных значений задачи (1.1), (1.2) имеет при $\lambda \rightarrow +\infty$ асимптотику

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot [s(\ln \lambda) + o(1)], \tag{1.3}$$

где *спектральный порядок* $D \in (0, 1/2)$ определяется параметрами самоподобия меры ρ , а s — некоторая зависящая от выбора этой меры непрерывная периодическая функция. В случае так называемого *неарифметического* самоподобия меры ρ коэффициент s заведомо является постоянным.

Основу для установления указанных результатов образует теория восстановления [2, гл. XI]. Аналогичные утверждения известны также для спектральных задач на самоподобных областях и областях с самоподобной границей ([3], [4]). Отметим дополнительно, что ряд менее точных, нежели указанные в [1], результатов о поведении собственных значений задачи (1.1), (1.2) встречался в литературе и ранее (см., например, [5], [6]).

Результаты работы [1] позднее были развиты в двух направлениях. К первому относятся, в частности, работы [7] и [8], в которых был рассмотрен случай незнакоопределенного веса $\rho \in W_2^{-1}[0, 1]$, представляющего собой обобщенную производную некоторой самоподобной функции $P \in L_2[0, 1]$. На этом пути было

*Работа поддержана РФФИ, гранты 13-01-00705 и 13-01-12476.

установлено, что в случае строгой положительности спектрального порядка¹⁾ D функции P считающие функции $N_{\pm}$ соответственно положительных и отрицательных собственных значений задачи (1.1), (1.2) имеют при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ асимптотику

$$N_{\pm}(\lambda) = |\lambda|^D \cdot [s_{\pm}(\ln |\lambda|) + o(1)],$$

где $s_{\pm}$ — некоторые зависящие от выбора веса ρ непрерывные периодические функции. Спектральный порядок D при этом явно выражается через параметры самоподобия функции P . В случае неарифметичности типа самоподобия функции P коэффициенты $s_{\pm}$ заведомо являются постоянными.

Ко второму направлению относится, например, работа [9], в которой были подвергнуты исследованию граничные задачи со знакоопределенным сингулярным весом для обыкновенных дифференциальных операторов произвольного порядка.

Среди прочего в работе [9] была сформулирована гипотеза о том, что функция s является непостоянной для произвольного неравномерного веса с арифметически самоподобной первообразной. В работе [7] на основе результатов численных экспериментов было показано, что функция s действительно не может быть постоянной в том простейшем случае, когда функция P представляет собой канторову лестницу. Одной из основных целей настоящей статьи является проводимое традиционными теоретическими методами доказательство справедливости указанной гипотезы (и даже некоторых более сильных утверждений) для произвольной функции P , имеющей *канторовский тип* самоподобия. Точные определения соответствующих понятий будут даны далее.

Отметим, что в случае $D = 0$ асимптотика собственных значений задачи (1.1), (1.2) имеет вид, коренным образом отличный от (1.3) (см. [10]). Однако для целей настоящей статьи это обстоятельство не имеет значения.

2. В отличие от работ [1], [7] и [8], в настоящей статье мы будем опираться не на теорию восстановления, а на осцилляционную теорию для задач Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами, развитую в недавних работах [11] и [12]²⁾. При этом основной упор будет делаться нами на изучение осцилляционных свойств собственных функций не первой, а второй и третьей граничных задач для уравнения (1.1). Именно для таких задач будет установлено наличие эффекта *спектральной периодичности*³⁾, играющего ключевую роль при последующем уточнении характеристик асимптотики (1.3). Получаемые на таком пути результаты об асимптотическом поведении спектра, однако, оказываются справедливыми и для произвольных самосопряженных граничных условий.

Формальная граничная задача

$$-y'' - \lambda \rho y = 0, \tag{1.4}$$

$$y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0 \tag{1.5}$$

будет далее рассматриваться в качестве условного обозначения задачи о спектре

¹⁾В общем случае, когда знакоопределенность самоподобной функции $P \in L_2[0, 1]$ не требуется, ее спектральный порядок D может принимать произвольное значение из полуинтервала $[0, 1)$.

²⁾Отдельного упоминания заслуживает также работа [13], в которой изучались свойства нулей собственных функций фрактальных операторов Штурма–Лиувилля, определенных для более узкого, нежели рассматриваемый нами, класса самоподобных мер.

³⁾Оно было анонсировано в тезисах [14].

линейного операторного пучка $T_\rho: \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{B}(W_2^1[0, 1], W_2^{-1}[0, 1])$ вида

$$\langle T_\rho(\lambda)y, y \rangle = \int_0^1 |y'|^2 dx - \lambda \langle \rho, |y|^2 \rangle + \gamma_0 |y(0)|^2 + \gamma_1 |y(1)|^2 \quad (\lambda \in \mathbb{C}, y \in W_2^1[0, 1]). \quad (1.6)$$

3. Статья имеет следующую структуру. В §2 приводятся необходимые для дальнейшего сведения о самоподобных функциях канторовского типа и связанных с ними сингулярных граничных задачах. В §3 устанавливается спектральная периодичность для некоторых из таких граничных задач. В §4, носящем вспомогательный характер, устанавливается применяемый в дальнейшем критерий сингулярности монотонной функции. Близкие к материалу этого параграфа результаты об аппроксимации гладких функций сплайнами известны в литературе (см., например, [16]), однако найти источники, содержащие этот критерий в нужной для наших целей форме, нам не удалось. В §5 проводится основанное на использовании спектральной периодичности уточнение характеристик коэффициента s из асимптотики (1.3). Наконец, в §6 приводятся иллюстрирующие явление спектральной периодичности расчетные данные.

Поясняющие изложение ссылки приводятся в квадратных скобках. В общем случае они содержат указание на номер параграфа и пункта настоящей статьи. В случае, когда ссылка дается внутри одного параграфа, указание его номера опускается.

§2. Самоподобные функции канторовского типа

1. Пусть фиксировано некоторое натуральное число $\varkappa > 1$, а также два вещественных числа $a \in (0, 1/\varkappa)$ и $b := (1 - \varkappa a)/(\varkappa - 1)$. Свяжем с этими числами набор точек $\alpha_{2k} := k(a + b)$ и $\alpha_{2k+1} := \alpha_{2k} + a$, где $k \in \{0, \dots, \varkappa - 1\}$. Функцию $f \in C[0, 1]$, удовлетворяющую равенствам $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, мы будем называть *самоподобной функцией канторовского типа* с параметрами $\varkappa$, a и b , если при любом выборе индекса $k \in \{1, \dots, \varkappa - 1\}$ она постоянна на интервале $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$ и при любом выборе индекса $k \in \{0, \dots, \varkappa - 1\}$ функция $f_k \in C[0, 1]$ вида

$$f_k(x) := \varkappa f(\alpha_{2k} + ax)$$

совпадает с функцией f с точностью до аддитивной постоянной.

В частности, классическая канторова лестница представляет собой самоподобную функцию канторовского типа с параметрами $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$.

На основе известных результатов ([7], [17]) легко устанавливается, что каждый допустимый набор параметров $\varkappa$, a и b определяет единственную самоподобную функцию. Более того, эта функция является арифметически самоподобной с шагом $\nu = \ln(\varkappa/a)$, а ее спектральный порядок определяется равенством $D = \nu^{-1} \ln \varkappa \in (0, 1/2)$.

Легко проверить, что для любой самоподобной функции f канторовского типа функция $1 - f(1 - \cdot)$ представляет собой самоподобную функцию канторовского типа с теми же параметрами $\varkappa$, a и b , что и исходная. Таким образом, справедливо следующее утверждение:

1.1. Пусть $f \in C[0, 1]$ — самоподобная функция канторовского типа. Тогда выполняется тождество

$$f(x) = 1 - f(1 - x) \quad (x \in [0, 1]).$$

2. В отличие от случая задачи Дирихле, где вес $\rho \in \overset{\circ}{W}_2^{-1}[0, 1]$ полностью задается своей квадратично суммируемой обобщенной первообразной P , в случае задачи Неймана для определения веса $\rho \in W_2^{-1}[0, 1]$ формулой

$$\langle \rho, y \rangle = - \int_0^1 P \bar{y}' dx + P \bar{y}|_0^1 \quad (y \in W_2^1[0, 1])$$

дополнительно требуется указать «граничные значения» $P(0)$ и $P(1)$. Если обобщенная первообразная P является непрерывной, то на роль таких значений естественным образом выбираются «обычные» граничные значения функции P . Соответственно квадратичная форма (1.6) операторов $T_\rho(\lambda)$ из пучка, отвечающего граничной задаче (1.4), (1.5), где вес ρ представляет собой обобщенную производную самоподобной функции P канторовского типа, принимает вид

$$\langle T_\rho(\lambda)y, y \rangle = \int_0^1 \{|y'|^2 + \lambda P(|y|^2)'\} dx + \gamma_0 |y(0)|^2 + (\gamma_1 - \lambda) |y(1)|^2. \quad (2.1)$$

2.1. При любом выборе значения $\lambda \in \mathbb{R}$ и функции $y \in \ker T_\rho(\lambda)$ выполняются соотношения $y \in C^1[0, 1]$ и

$$(y' + \lambda P y)' = \lambda P y', \quad (2.2)$$

а также понимаемые прямым образом граничные условия (1.5). При любом выборе значения $\lambda \in \mathbb{R}$ и функции $y \in C^1[0, 1]$, удовлетворяющей уравнению (2.2) и граничным условиям (1.5), выполняется соотношение $y \in \ker T_\rho(\lambda)$.

Доказательство. Выполнение при любом выборе функции $z \in \overset{\circ}{W}_2^1[0, 1]$ равенства $\langle T_\rho(\lambda)y, z \rangle = 0$ означает [(2.1)], что функция $y' + \lambda P y \in L_2[0, 1]$ почти всюду совпадает с некоторой абсолютно непрерывной первообразной функции $\lambda P y' \in L_2[0, 1]$. Тогда, поскольку $P \in C[0, 1]$, функция $y' \in L_2[0, 1]$ почти всюду совпадает с некоторой непрерывной функцией, что влечет за собой соотношения $y \in C^1[0, 1]$ и $y' + \lambda P y \in C^1[0, 1]$. Выполнение равенства $\langle T_\rho(\lambda)y, z \rangle = 0$ для линейных функций z означает тогда [(2.1)] выполнение равенств (1.5).

Справедливость второй части утверждения легко проверяется непосредственным вычислением. $\square$

2.2 [12, утверждение 11]. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи (1.4), (1.5). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ собственное значение λ_n является простым, причем любая отвечающая ему собственная функция не обращается в нуль на границе отрезка $[0, 1]$ и имеет внутри этого отрезка в точности n различных нулей.

3. Легко видеть [(2.1)], что замена коэффициентов γ_0 и γ_1 в граничных условиях (1.5) приводит к возмущению каждого из операторов $T_\rho(\lambda)$ некоторым оператором ранга 2. Из общей вариационной теории пучков самосопряженных операторов (см., например, [18], а в неявном виде также [19, п. 95]) поэтому следует, что считающие функции собственных значений различных третьих граничных задач, отвечающих одному и тому же уравнению (1.4), не могут различаться более, чем на 2. Аналогичная связь имеется между считающими функциями третьей граничной задачи и задачи Дирихле, квадратичная форма

которой получается из квадратичной формы третьей граничной задачи сужением на подпространство коразмерности 2. Таким образом, асимптотическая формула (1.3) не зависит от типа граничных условий.

§3. Спектральная периодичность

1. Имеют место следующие три факта:

1.1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающей уравнению (1.4) граничной задаче

$$y'(0) = y'(1) = 0. \quad (3.1)$$

Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\lambda_{\varkappa n} = (\varkappa/a) \lambda_n. \quad (3.2)$$

Доказательство. Зафиксируем отвечающую собственному значению λ_n собственную функцию y_n , не обращающуюся в нуль на границе отрезка $[0, 1]$ и имеющую внутри него в точности n различных нулей [п. 2.2.2]. Сопоставим ей нетривиальную функцию $z \in C[0, 1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) для любого $k \in \{1, \dots, \varkappa - 1\}$ функция z постоянна на интервале $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$,

(2) для любого $k \in \{0, \dots, \varkappa - 1\}$ функция z_k вида $z_k(x) := z(\alpha_{2k} + ax)$ совпадает с функцией y_n с точностью до мультипликативной постоянной.

Граничные условия (3.1) гарантируют [п. 2.2.1] непрерывную дифференцируемость функции z и выполнение равенств $z'(0) = z'(1) = 0$. Кроме того, факт самоподобия функции P позволяет легко проверить, что функция $z' + (\varkappa/a) \lambda_n Pz$ абсолютно непрерывна, причем ее производная почти всюду совпадает с непрерывной функцией $(\varkappa/a) \lambda_n Pz'$. Таким образом [п. 2.2.1], функция z представляет собой собственную функцию граничной задачи (1.4), (3.1), отвечающую собственному значению $(\varkappa/a) \lambda_n$. При этом она имеет на интервале $(0, 1)$ в точности $\varkappa n$ различных нулей, что и означает [п. 2.2.2] выполнение равенства (3.2). $\square$

1.2. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений отвечающей уравнению (1.4) граничной задаче

$$by'(0) - 2y(0) = by'(1) + 2y(1) = 0,$$

а $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ — аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи

$$by'(0) - 2ay(0) = by'(1) + 2ay(1) = 0.$$

Тогда независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\lambda_{\varkappa(n+1)-1} = (\varkappa/a) \mu_n.$$

Доказательство проводится аналогичным доказательству утверждения 1.1 способом. Основное отличие заключается в том, что используемые при «сшивке» копий исходной собственной функции горизонтальные отрезки заменяются на наклонные с нулями в центрах соответствующих интервалов $(\alpha_{2k-1}, \alpha_{2k})$.

1.3. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи (1.4), (3.1), а $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ —

аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи

$$y'(0) = by'(1) + 2ay(1) = 0. \quad (3.3)$$

Тогда в случае четности параметра $\varkappa$ независимо от выбора индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$\lambda_{\varkappa(n+1/2)} = (\varkappa/a) \mu_n.$$

Доказательство также проводится аналогичным доказательству утверждения 1.1 способом. При этом учитывается то обстоятельство [п. 2.1.1, (2.1)], что для любой собственной функции y_n граничной задачи (1.4), (3.3) функция $y_n(1 - \cdot)$ представляет собой собственную функцию отвечающей тому же уравнению граничной задачи

$$by'(0) - 2ay(0) = y'(1) = 0.$$

Собственная функция z граничной задачи (1.4), (3.1) составляется при этом из чередующихся копий функций y_n и $y_n(1 - \cdot)$, «спливаемых» наклонными и горизонтальными отрезками попеременно.

§4. Критерий сингулярности

1. Имеют место следующие три факта:

1.1. Пусть A и B — два различных вещественных числа, а $f \in L_2[0, 1]$ — неубывающая функция, при почти всех $x \in [0, 1]$ удовлетворяющая неравенствам $A \leq f(x) \leq B$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется ступенчатая функция f_n с не более чем 2^n точками разрыва на интервале $(0, 1)$, тождественно равная A на некоторой правой окрестности точки 0, тождественно равная B на некоторой левой окрестности точки 1 и удовлетворяющая неравенству

$$\|f - f_n\|_{L_2[0,1]} < 2^{-n} \cdot (B - A).$$

Доказательство. Предположим сначала, что функция f непрерывна, строго возрастает и удовлетворяет равенствам $f(0) = A$ и $f(1) = B$. Зафиксируем точки $\tau_k \in [0, 1)$, где $k \in \{0, \dots, 2^n\}$, определенные условиями $f(\tau_k) = A + k \cdot (B - A)/(2^n + 1)$, и рассмотрим ступенчатую функцию f_n , принимающую на каждом из полуинтервалов $[\tau_k, \tau_{k+1})$, где $k < 2^n$, значение $f(\tau_k)$, а также значение B на отрезке $[\tau_{2^n}, 1]$. При почти всех $x \in [0, 1]$ выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| \leq (B - A)/(2^n + 1)$, что означает справедливость оценки

$$\|f - f_n\|_{L_2[0,1]} \leq (2^n + 1)^{-1}(B - A).$$

Для завершения доказательства теперь достаточно учесть, что произвольную неубывающую и существенно ограниченную константами A и B функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать в смысле метрики пространства $L_2[0, 1]$ непрерывной функцией описанного выше вида. $\square$

1.2. Пусть $f \in L_2[0, 1]$ — ограниченная неубывающая сингулярная функция. Тогда найдется последовательность $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ неубывающих ступенчатых функций, удовлетворяющая при $n \rightarrow \infty$ асимптотическому соотношению

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2)\|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1),$$

где через $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ обозначена последовательность множеств точек разрыва функций f_n .

Доказательство. Зафиксируем произвольное вещественное число $\varepsilon > 0$ и представим [20, теорема 13.3] сингулярную функцию f в виде суммы двух ограниченных неубывающих функций g и h со следующими свойствами:

(1) найдется вещественное число C , почти всюду на отрезке $[0, 1]$ удовлетворяющее соотношениям $C \leq g(x) \leq C + \varepsilon$,

(2) найдется система $\{\Gamma_k\}_{k=1}^m$ попарно не пересекающихся интервалов, содержащая все точки роста функции h и имеющая не превосходящую ε^2 суммарную длину.

Обозначим через a_k длины интервалов Γ_k , а через d_k — приращения функции h на этих интервалах. Согласно утверждению 1.1, при любом $n \in \mathbb{N}$ найдется ступенчатая функция h_n со следующими свойствами:

- (1) все точки разрыва функции h_n содержатся в объединении интервалов Γ_k ,
- (2) на каждом из интервалов Γ_k , где $k \in \{1, \dots, m\}$, функция h_n имеет не более $2^n d_k + 1$ точек разрыва,
- (3) выполняются неравенства

$$\|h - h_n\|_{L_2[0,1]}^2 \leq \sum_{k=1}^m (2^{n-1} d_k + 1/2)^{-2} 4a_k d_k^2 \leq 4^{2-n} \sum_{k=1}^m a_k \leq 4^{2-n} \varepsilon^2.$$

Аналогичным образом, найдется имеющая на интервале $(0, 1)$ не более 2^n точек разрыва ступенчатая функция g_n со свойством $\|g - g_n\|_{L_2[0,1]} < 2^{1-n} \varepsilon$. При этом функция $f_n := h_n + g_n$ имеет не более

$$2^n \left(1 + \sum_{k=1}^m d_k \right) + m$$

точек разрыва на интервале $(0, 1)$ и аппроксимирует в смысле среднего квадратичного функцию f с точностью не хуже $2^{3-n} \varepsilon$. Соответственно, при достаточно больших значениях n произведение увеличенного на 2 числа точек разрыва функции f_n и величины $\|f - f_n\|_{L_2[0,1]}$ заведомо допускает оценку $8\varepsilon \cdot (2 + B - A)$, где A и B — произвольным образом фиксированные нижняя и верхняя существенные грани функции f . Ввиду произвольности выбора величины $\varepsilon > 0$ полученные результаты означают справедливость доказываемого утверждения. $\square$

1.3. Пусть $f \in L_2[0, 1]$ — ограниченная неубывающая функция, $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность неубывающих ступенчатых функций, а $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^\infty$ — последовательность множеств точек разрыва функций f_n . Пусть также при $n \rightarrow \infty$ выполняется асимптотическое соотношение

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2)\|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1).$$

Тогда монотонная функция f является сингулярной.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что при любом выборе индекса $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} &\neq 0, \\ 2(n+1)^4 (\#\mathfrak{A}_n + 2)\|f - f_n\|_{L_2[0,1]} &< 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Это и будет далее предполагаться.

Введем в рассмотрение функции $\varphi_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ вида

$$\varphi_n(x) := \inf(1, \|f - f_n\|_{L_2[0,1]}^{-1} \operatorname{dist}(x, \mathfrak{A}_n \cup \{0, 1\})). \quad (4.2)$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция φ_n является абсолютно непрерывной, и абсолютная величина ее производной φ'_n почти всюду мажорируется величиной $\|f - f_n\|_{L_2[0,1]}^{-1}$. Кроме того, при любом $n \in \mathbb{N}$ функция φ_n тождественно равна 1 на некотором открытом множестве, мера дополнения которого не превосходит $[(4.1)]$ величины $(n+1)^{-4}$. Соответственно, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_n df &= \int_0^1 \varphi_n df_n + \int_0^1 \varphi_n d(f - f_n) = \int_0^1 \varphi_n d(f - f_n) \\ &= - \int_0^1 (f - f_n) \varphi'_n dx \leq \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} \cdot \|\varphi'_n\|_{L_2[0,1]} \leq (n+1)^{-2} \end{aligned}$$

(второе и третье равенства справедливы в силу (4.2)), а также

$$\int_0^1 (1 - \varphi_n) dx \leq (n+1)^{-4},$$

означающие сходимость числовых рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \varphi_n df, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (1 - \varphi_n) dx.$$

Тогда, согласно теореме Б. Леви, множество точек сходимости функционального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ пренебрежимо по линейной мере Лебега и обладает дополнением, пренебрежимым по мере с функцией распределения f . $\square$

§5. Уточнение характеристик спектра

1. Основной целью настоящего параграфа является установление следующего факта:

1.1. Коэффициент s из асимптотики (1.3) допускает представление

$$s(t) = e^{-Dt} \sigma(t) \quad (t \in [0, \nu]),$$

где σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

Этот факт обладает, в частности, таким тривиальным следствием:

1.2. Коэффициент s из асимптотики (1.3) не является постоянной функцией.

Действительно, постоянность функции s равносильна выполнению на отрезке $[0, \nu]$ тождества $\sigma(t) \equiv \operatorname{const} \cdot e^{Dt}$, означающего абсолютную непрерывность функции σ .

2. При доказательстве утверждения 1.1 нами будет использоваться следующий факт:

2.1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи

$$-y'' - \lambda y = 0, \quad (5.1)$$

$$y'(0) = y'(1) = 0, \quad (5.2)$$

а $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ — аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи

$$y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0,$$

где $\gamma_0, \gamma_1 \geq 0$. Тогда числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln \mu_n - \ln \lambda_n|$$

сходится¹⁾.

Доказательство. Обозначим через $J: W_2^{-1}[0, 1] \rightarrow W_2^1[0, 1]$ изометрию

$$(Jy, z)_{W_2^1[0, 1]} = \langle y, z \rangle \quad (y \in W_2^{-1}[0, 1], z \in W_2^1[0, 1]),$$

корректность определения которой гарантируется теоремой о представлении функционала в гильбертовом пространстве [15, §10.2]. Зафиксируем также произвольное значение $\varepsilon > 0$. Из равенства (1.6) вытекает, что квадратичная форма оператора $JT_\rho(-\varepsilon): W_2^1[0, 1] \rightarrow W_2^1[0, 1]$, отвечающего граничной задаче (5.1), (5.2), является положительной. При этом оператор $JT_\rho(-\varepsilon) - 1$ с квадратичной формой

$$([JT_\rho(-\varepsilon) - 1]y, y)_{W_2^1[0, 1]} \equiv \int_0^1 |y|^2 d(\varepsilon P - x) + \gamma_0 |y(0)|^2 + \gamma_1 |y(1)|^2 \quad [(2.1)]$$

является, ввиду того, что вложение пространства $W_2^1[0, 1]$ в пространство $C[0, 1]$ вполне непрерывно, вполне непрерывным. Соответственно, $JT_\rho(-\varepsilon)$ представляет собой равномерно положительный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $W_2^1[0, 1]$. Введя обозначение $S := [JT_\rho(-\varepsilon)]^{-1/2}$, находим теперь, что последовательности $\{\lambda_n + \varepsilon\}_{n=0}^\infty$ и $\{\mu_n + \varepsilon\}_{n=0}^\infty$ образуют соответственно спектры линейных пучков

$$1 - \lambda S J \rho S, \quad (5.3)$$

$$(1 + K) - \lambda S J \rho S, \quad (5.4)$$

где K — неотрицательный оператор конечного ранга с квадратичной формой

$$(Ky, y)_{W_2^1[0, 1]} = \gamma_0 |[Sy](0)|^2 + \gamma_1 |[Sy](1)|^2 \quad (y \in W_2^1[0, 1]).$$

Символ ρ использован в (5.3) и (5.4) для обозначения действующего из $W_2^1[0, 1]$ в $W_2^{-1}[0, 1]$ ограниченного оператора умножения на обобщенную весовую функцию. Согласно [22, утверждение 11], полученные результаты означают, что последовательность частичных сумм числового ряда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{\mu_n + \varepsilon}{\lambda_n + \varepsilon} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{\mu_n}{\lambda_n} + \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu_n} \right) - \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_n} \right) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [\ln \mu_n - \ln \lambda_n + O(n^{-1/D})] \end{aligned} \quad [(1.3)]$$

¹⁾С точки зрения конструктивного математического анализа данное утверждение не вполне корректно [21, п. 4], однако для дальнейшего изложения это обстоятельство не имеет значения.

является неубывающей и ограниченной. Отсюда, с учетом неравенства $D < 1$, немедленно вытекает доказываемое утверждение. $\square$

Отметим, что близкие к использованным нами при доказательстве утверждения 2.1 результаты о регуляризованных произведениях собственных значений рассматривались также в работе [23].

3. Перейдем теперь к доказательству собственно утверждения 1.1. Через $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ при этом мы, как и при доказательстве утверждения 2.1, будем обозначать последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений задачи (5.1), (5.2).

Из асимптотики (1.3) и упомянутых в разд. 2.1 равенств $\nu = \ln(\varkappa/a)$ и $D = \nu^{-1} \ln \varkappa$ вытекает, что при почти всех $t \in [0, \nu]$ выполняется равенство $\sigma(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k(t)$, где $\sigma_k(t) := \varkappa^{-k} N(e^{k\nu+t})$. Заметим также, что при любом $k \in \mathbb{N}$ для всех $t \in [0, \nu]$, удовлетворяющих при некотором $n \in \mathbb{N}$ неравенствам

$$\lambda_{\varkappa(n+1)-1} < e^{(k+1)\nu+t} < \lambda_{\varkappa(n+1)},$$

значения функций σ_k и σ_{k+1} совпадают [п. 3.1.1], а для почти всех прочих $t \in [0, \nu]$ различаются не более чем на $\varkappa^{-k}$. Наконец, комбинируя утверждения 3.1.1 и 3.1.2 о спектральной периодичности для двух типов третьих граничных задач с утверждением 2.1, устанавливаем факт ограниченности последовательности частичных сумм ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln \lambda_{\varkappa(n+1)-1} - \ln \lambda_{\varkappa n}|.$$

Таким образом, при $k \rightarrow \infty$ мера множеств $\{t \in [0, \nu] : \sigma_{k+1}(t) \neq \sigma_k(t)\}$ имеет асимптотику $o(1)$. Соответственно, справедливы оценки $\|\sigma_{k+1} - \sigma_k\|_{L_2[0, \nu]} = o(\varkappa^{-k})$, а тогда и вытекающая из них асимптотика $\|\sigma_k - \sigma\|_{L_2[0, \nu]} = o(\varkappa^{-k})$. С учетом того факта, что число точек разрыва функций σ_k заведомо [(1.3)] допускает при $k \rightarrow \infty$ оценку класса $O(\varkappa^k)$, это и означает [п. 4.1.3] справедливость доказываемого утверждения.

§6. Примеры

1. Все таблицы из настоящего параграфа содержат данные, относящиеся к уравнению Штурма–Лиувилля, весовой функцией в котором выступает обобщенная производная канторовой лестницы.

В табл. 1 представлены результаты численных расчетов для первых девяти положительных собственных значений задачи Неймана. Данные этой таблицы иллюстрируют утверждение 3.1.1.

В табл. 2 представлены результаты численных расчетов для первых пяти собственных значений граничной задачи $y'(0) - 2y(0) = y'(1) + 2y(1) = 0$. Четвертый столбец содержит собственные значения граничной задачи $y'(0) - 6y(0) = y'(1) + 6y(1) = 0$. Данные этой таблицы иллюстрируют утверждение 3.1.2.

В табл. 3 представлены результаты численных расчетов для первых пяти собственных значений граничной задачи $y'(0) = y'(1) + 2y(1) = 0$. Четвертый столбец содержит взятые из табл. 1 собственные значения задачи Неймана. Данные этой таблицы иллюстрируют утверждение 3.1.3.

Для получения приведенного иллюстративного материала нами была использована вычислительная методика, описанная в работе [24].

Таблица 1. Оценки первых собственных значений задачи Неймана для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$.

n	λ_n	$6\lambda_n$	λ_{2n}
1	$7,0974 \pm 10^{-4}$	$42,584 \pm 10^{-3}$	$42,584 \pm 10^{-3}$
2	$42,584 \pm 10^{-3}$	$255,51 \pm 10^{-2}$	$255,51 \pm 10^{-2}$
3	$61,344 \pm 10^{-3}$	$368,06 \pm 10^{-2}$	$368,06 \pm 10^{-2}$
4	$255,51 \pm 10^{-2}$	$1533,0 \pm 10^{-1}$	$1533,0 \pm 10^{-1}$
5	$272,98 \pm 10^{-2}$	$1637,9 \pm 10^{-1}$	$1637,9 \pm 10^{-1}$
6	$368,06 \pm 10^{-2}$	$2208,4 \pm 10^{-1}$	$2208,4 \pm 10^{-1}$
7	$383,55 \pm 10^{-2}$	$2301,3 \pm 10^{-1}$	$2301,3 \pm 10^{-1}$
8	$1533,0 \pm 10^{-1}$	$9198,2 \pm 10^{-1}$	$9198,2 \pm 10^{-1}$
9	$1548,0 \pm 10^{-1}$	$9288,3 \pm 10^{-1}$	$9288,3 \pm 10^{-1}$

Таблица 2. Оценки первых собственных значений задачи $y'(0) - 2y(0) = 0$, $y'(1) + 2y(1) = 0$ для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$.

n	μ_n	$6\mu_n$	λ_{2n+1}
0	$3,2983 \pm 10^{-4}$	$19,790 \pm 10^{-3}$	$19,790 \pm 10^{-3}$
1	$12,558 \pm 10^{-3}$	$75,349 \pm 10^{-3}$	$75,349 \pm 10^{-3}$
2	$48,946 \pm 10^{-3}$	$293,67 \pm 10^{-2}$	$293,67 \pm 10^{-2}$
3	$65,832 \pm 10^{-3}$	$394,99 \pm 10^{-2}$	$394,99 \pm 10^{-2}$
4	$261,64 \pm 10^{-2}$	$1569,8 \pm 10^{-1}$	$1569,8 \pm 10^{-1}$

Таблица 3. Оценки первых собственных значений задачи $y'(0) = 0$, $y'(1) + 2y(1) = 0$ для случая $\varkappa = 2$, $a = b = 1/3$

n	μ_n	$6\mu_n$	λ_{2n+1}
0	$1,1829 \pm 10^{-4}$	$7,0974 \pm 10^{-4}$	$7,0974 \pm 10^{-4}$
1	$10,224 \pm 10^{-3}$	$61,344 \pm 10^{-3}$	$61,344 \pm 10^{-3}$
2	$45,497 \pm 10^{-3}$	$272,98 \pm 10^{-2}$	$272,98 \pm 10^{-2}$
3	$63,925 \pm 10^{-3}$	$383,55 \pm 10^{-2}$	$383,55 \pm 10^{-2}$
4	$258,01 \pm 10^{-2}$	$1548,0 \pm 10^{-1}$	$1548,0 \pm 10^{-1}$

Авторы выражают признательность проф. А. И. Назарову за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Solomyak, E. Verbitsky, *On a spectral problem related to self-similar measures*, Bull. London Math. Soc., **27**:3 (1995), 242–248.
- [2] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2, Мир, М., 1967.
- [3] J. Kigami, M. L. Lapidus, *Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals*, Comm. Math. Phys., **158**:1 (1993), 93–125.
- [4] M. Levitin, D. Vassiliev, *Spectral asymptotics, renewal theorem, and the Berry conjecture for a class of fractals*, Proc. London Math. Soc., **72**:1 (1996), 188–214.
- [5] T. Uno, I. Hong, *Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation $d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0$* , Japan. J. Math., **29** (1959), 152–164.

- [6] T. Fujita, *A fractional dimension, self-similarity and a generalized diffusion operator*, in: Probabilistic Methods in Mathematical Physics (Katata/Kyoto, 1985), Proc. Taniguchi Intern. Symp., Academic Press, Boston, MA, 1987, 83–90.
- [7] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Самоподобные функции в пространстве $L_2[0, 1]$ и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*, Матем. сб., **197**:11 (2006), 13–30.
- [8] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Индефинитная задача Штурма–Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов*, Труды МИАН, **255** (2006), 88–98.
- [9] А. И. Назаров, *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2 -норме относительно самоподобной меры*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **311** (2004), 190–213.
- [10] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Асимптотика собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с дискретным самоподобным весом*, Матем. заметки, **88**:5 (2010), 662–672.
- [11] А. А. Шкаликов, Ж. Бен Амара, *Осцилляционные теоремы для задач Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями*, Вестник МГУ, сер. 1: матем., мех., 2009, № 3, 40–43.
- [12] А. А. Владимиров, *К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **49**:9 (2009), 1609–1621.
- [13] E. J. Bird, S.-M. Ngai, A. Teplyaev, *Fractal Laplacians on the unit interval*, Ann. Sci. Math. Québec, **27**:2 (2003), 135–168.
- [14] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Особенности условий Неймана в задаче Штурма–Лиувилля с сингулярным весом*, в кн.: Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная 103-летию И. Г. Петровского. Сб. тезисов, МГУ, М., 2004, 238–239.
- [15] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.
- [16] Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных, *Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций*, Матем. заметки, **7**:1 (1970), 31–42.
- [17] И. А. Шейпак, *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0, 1]$* , Матем. заметки, **81**:6 (2007), 924–938.
- [18] P. Lancaster, A. Shkalikov, Qiang Ye, *Strongly definitizable linear pencils in Hilbert space*, Integral Equation Operator Theory, **17**:3 (1993), 338–360.
- [19] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979.
- [20] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.
- [21] А. А. Марков, *О конструктивной математике*, Труды МИАН, **67** (1962), 8–14.
- [22] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, *Асимптотика собственных значений задачи высшего четного порядка с дискретным самоподобным весом*, Алгебра и анализ, **24**:2 (2012), 104–119.
- [23] А. И. Назаров, *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций*, ТВП, **54**:2 (2009), 209–225.
- [24] А. А. Владимиров, *О вычислении собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с фрактальным индефинитным весом*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **47**:8 (2007), 1350–1355.