Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Я. Казарновский, О действии комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно линейных функциях, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 1, 19–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3125>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:32:32

О действии комплексного оператора Монжа–Ампера на кусочно-линейных функциях*

© 2014. Б. Я. КАЗАРНОВСКИЙ

Рассматривается действие смешанного комплексного оператора Монжа–Ампера $(h_1, \dots, h_k) \mapsto dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_k$ на кусочно-линейных функциях h_i . Язык операторов Монжа–Ампера используется для переноса некоторых результатов о смешанных объемах и тропических многообразиях в более широкий контекст, возникающий при переходе от полиномов к экспоненциальным суммам. В частности, доказано, что значение оператора Монжа–Ампера зависит только от произведения функций h_i .

§1. Результаты

Оператором Монжа–Ампера мы называем отображение $(h_1, \dots, h_k) \mapsto dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_k$ (напомним: для функции g на комплексном многообразии значение 1-формы $d^c g$ на касательном векторе x_t равно $dg(x_t/i)$). Значения оператора рассматриваются как потоки (линейные функционалы на пространстве гладких дифференциальных форм с компактным носителем). Если h_i — непрерывные выпуклые функции в пространстве $\mathbb{C}^n$, то поток $dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_k$ корректно определен [10]. Это значит, что при локально равномерном приближении функций h_i гладкими плюрисубгармоническими (в частности, выпуклыми) функциями последовательность значений операторов Монжа–Ампера слабо сходится к не зависящему от выбора приближения потоку. При этом предельный поток продолжается до функционала на пространстве форм с непрерывными коэффициентами, т. е. является потоком типа меры.

Непрерывную функцию $h: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *кусочно-линейной*, если она является вещественным полиномом первой степени на каждом из конечного множества выпуклых (не обязательно ограниченных) многогранников, объединение которых равно $\mathbb{C}^n$. Любая кусочно-линейная функция является разностью двух выпуклых кусочно-линейных функций. Поэтому оператор Монжа–Ампера на кусочно-линейных функциях определен. Пусть $\mathcal{H}$ — кольцо, порожденное потоками вида h и $dd^c g$, где h, g — кусочно-линейные функции на $\mathbb{C}^n$ (потоки типа меры можно умножать на непрерывные функции).

Теорема 1¹⁾. *Существует дифференцирование δ кольца $\mathcal{H}$, такое, что $\delta(h) = dd^c h$ и $\delta(dd^c h) = 0$ для любой кусочно-линейной функции h .*

Замечание 1. Дифференцирование δ совпадает с отображением dd^c на элементах кольца $\mathcal{H}$ вида $h dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_k$. Но если x, y — вещественная и мнимая части комплексного числа z , рассматриваемые как линейные функции

*Работа поддержана грантом НШ-8462.2010.1.

¹⁾ Утверждение теоремы 1 частично остается справедливым при переходе от кусочно-линейных функций на пространстве $\mathbb{C}^n$ к кусочно-плюригармоническим функциям на произвольном комплексном многообразии [11].

на $\mathbb{C}^1$, то $dd^c(x^2) = 2dxdy$, а $\delta(x^2) = 0$. Вообще, для любого вещественного полинома P от переменных $\operatorname{Re} z_i, \operatorname{Im} z_i$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ выполняется равенство $\delta(P) = 0$.

Теорема 1 вытекает из предложения 1 (см. ниже), доказательство которого приведено в §3.

Следствие 1. $\delta^k(h_1 \cdots h_k) = k! dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_k$.

Следствие 2. Поток $dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_k$ зависит только от произведения кусочно-линейных функций $h_1, \dots, h_k$.

Приближая функции f_i кусочно-линейными и используя непрерывность оператора Монжа–Ампера, получаем следующее соотношение.

Следствие 3. Пусть $f_1, \dots, f_k$ — выпуклые функции и $f = \max_{1 \leq i \leq k} f_i$. Тогда $dd^c(f - f_1) \wedge \cdots \wedge dd^c(f - f_k) = 0$.

Пусть $A_1, \dots, A_n$ — выпуклые тела в пространстве $\mathbb{C}^{n*}$. Обозначим через $h_i(z) = \max_{z^* \in A_i} \operatorname{Re}\langle z, z^* \rangle$ их опорные функции в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Утверждение 1 [2]. Пусть тела A_i лежат в пространстве $\operatorname{Re} \mathbb{C}^{n*}$. Рассмотрим произвольную евклидову метрику на пространстве $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n$, соответствующую эрмитову метрику на пространстве $\mathbb{C}^n$ и двойственную эрмитову метрику на пространстве $\mathbb{C}^{n*}$. Тогда поток $dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_n$ является мерой с носителем на пространстве $\operatorname{Im} \mathbb{C}^n$, равной мере n -мерной евклидовой площади, умноженной на смешанный объем тел $A_1, \dots, A_n$ и на $n!$

Следствие 4. Смешанный объем выпуклых многогранников зависит только от произведения их опорных функций.

Пусть A — выпуклая оболочка k выпуклых тел $A_1, \dots, A_k$. Применяя следствие 3 к опорным функциям, получаем следующее соотношение ([8], [1]).

Следствие 5. Пусть $B_1, \dots, B_{n-k}$ — произвольные выпуклые тела. Тогда $V(A - A_1, \dots, A - A_k, B_1, \dots, B_{n-k}) = 0$, где V — смешанный объем виртуальных выпуклых тел.

Замечание 2. В определении кольца $\mathcal{H}$ можно использовать (вместо кусочно-линейных), например, разности выпуклых однородных функций степени 1. В этом случае теорема 1 неверна, так как для произвольных выпуклых тел неверно, что их смешанный объем зависит только от произведения опорных функций. Действительно, пусть f_1, f_2 — положительно однородные степени 0 линейно независимые функции на плоскости $\mathbb{R}^2$, такие, что функции $f_1 r, f_1^2 r, f_2 r, f_2^2 r, (f_1 + f_2) r, (f_1 + f_2)^2 r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, выпуклы. Рассмотрим выпуклые фигуры A_i, B_i с опорными функциями $f_i r, f_i^2 r$ и единичный круг O с центром в нуле. Тогда если смешанная площадь выпуклых тел зависит только от произведения опорных функций, то $V(A_i, A_i) = V(B_i, O) = \frac{1}{2} \int_{\partial O} f_i^2$ и аналогично $V(A_1 + A_2, A_1 + A_2) = \frac{1}{2} \int_{\partial O} (f_1 + f_2)^2$. Отсюда получаем

$$V^{1/2}(A_1, A_1) + V^{1/2}(A_2, A_2) > V^{1/2}(A_1 + A_2, A_1 + A_2),$$

что противоречит неравенству Брунна–Минковского (т. е. утверждению о вогнутости функции $V^{1/n}(tA + (1-t)B)$ для любых фиксированных n -мерных выпуклых тел A, B).

Замечание 3. Функция вида $\sum_{\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{C}^{n*}, c_\lambda \in \mathbb{C}} c_\lambda \exp\langle z, \lambda \rangle$ называется экспоненциальной суммой (ES), а выпуклая оболочка конечного множества Λ — многогранником Ньютона этой ES. Оператор Монжа–Ампера $dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_k$ от опорных функций многогранников Ньютона системы k ES дает асимптотическое распределение корней этой системы ES [6]. Это распределение является (определение 3 в §2) $(n-k)$ -мерным E -тропическим многообразием. При $k = n$ значение потока $dd^c h_1 \wedge \dots \wedge dd^c h_n$ на характеристической функции единичного шара (называемое смешанным псевдообъемом многогранников ([5]–[7])) дает числовую плотность множества решений системы n ES. Из следствия 2 вытекает, что обе характеристики плотности зависят только от произведения опорных функций многогранников Ньютона.

Ниже (в §3) используются следующие обозначения:

- (1) $\mathcal{T}$ — подкольцо кольца $\mathcal{K}$, порожденное постоянными функциями и потоками вида $dd^c h$;
- (2) $\mathcal{B}$ — кольцо функций на $\mathbb{C}^n$, порожденное кусочно-линейными функциями;
- (3) $\mathcal{B}'$ — симметрическая алгебра пространства кусочно-линейных функций;
- (4) $\mathcal{T}'$ — симметрическая алгебра пространства потоков вида $dd^c h$, где функция h кусочно-линейна, профакторизованная по идеалу, состоящему из элементов степени $> n$;
- (5) $\mathcal{K}' = \mathcal{B}' \otimes \mathcal{T}'$ — тензорное произведение колец;
- (6) δ' — дифференцирование кольца $\mathcal{K}'$, такое, что $\delta'(h \otimes 1) = 1 \otimes dd^c h$ и $\delta'(1 \otimes dd^c h) = 0$, где h — произвольная кусочно-линейная функция;
- (7) $\pi: \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$ — отображение проекции.

Предложение 1 означает, что дифференцирование δ' выживает на факторкольце $\mathcal{K}$ кольца $\mathcal{K}'$.

Предложение 1. Пусть $\pi(F) = 0$. Тогда $\pi\delta'(F) = 0$.

Элементы кольца $\mathcal{K}$ можно рассматривать как некоторые геометрические объекты (ETVP) в пространстве $\mathbb{C}^n$ (§2). ETVP образуют дифференциальное кольцо (§5) с подкольцом $\mathcal{T}$. ETVP, соответствующие потокам из подкольца $\mathcal{T}$, мы называем экспоненциальными тропическими многообразиями (ETV). Если $h(x + \sqrt{-1}y) = h(x)$ при $x, y \in \operatorname{Re} \mathbb{C}^n$, то назовем кусочно-линейную функцию h вещественной. Пусть $\mathcal{K}_{\operatorname{Re}}, \mathcal{T}_{\operatorname{Re}}$ — подкольца колец $\mathcal{K}, \mathcal{T}$, порожденные вещественными кусочно-линейными функциями и соответствующими значениями операторов Монжа–Ампера. В [2], [9] показано, что кольцо $\mathcal{T}_{\operatorname{Re}}$ изоморфно кольцу евклидовых тропических многообразий. Если T — тропическое многообразие в пространстве $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n$, соответствующее потоку $\tau \in \mathcal{T}_{\operatorname{Re}}$, то $\operatorname{supp} \tau = \operatorname{supp} T + \operatorname{Im} \mathbb{C}^n$. Подробное описание геометрии потока $(dd^c h)^k$ для выпуклой кусочно-линейной функции на $\mathbb{C}^n$ помещено в §4 (теорема 4).

Несколько лет назад следствие 4 было сформулировано А. Г. Хованским, заметившим, что для многогранников с целочисленными вершинами оно вытекает из сопоставления результатов работ [3] и [4]. Для произвольных многогранников это следствие доказано в [1]. Основной объект работы [1] — тропическое многообразие с полиномиальными весами. Такие многообразия образуют дифференциальное кольцо. Это кольцо изоморфно подкольцу кольца $\mathcal{K}$, порожденному однородными вещественными кусочно-линейными функциями и значениями оператора Монжа–Ампера на них. Приведенные здесь результаты можно рассматривать как расширение конструкций из [1] до контекста работ [2], [5], [6].

§2. *E*-тропические многообразия

Пусть $1 \leq k \leq 2n$ и X — конечное множество замкнутых выпуклых k -мерных многогранников в $\mathbb{C}^n$. Скажем, что X является k -мерным полиэдральным множеством, если пересечение любых двух многогранников или пусто или является их общей гранью. Любая грань любого из многогранников называется *клеткой*. Скажем, что на полиэдральном множестве X задано *оснащение* степени m , если для любой ориентированной k -мерной клетки $\Delta \in X$ задана нечетная (т. е. меняющая знак при смене ориентации клетки Δ) функция $X_\Delta: \Delta \rightarrow \bigwedge^m \mathbb{C}^n$.

Определение 1. Объединение k -мерных клеток $\Delta \in X$ с ненулевыми формами X_Δ обозначим через $\text{supp } X$ и назовем *носителем* оснащенного полиэдрального множества X . Оснащенные k -мерные полиэдральные множества X, Y с общим носителем назовем *эквивалентными*, если $X_\Delta = Y_\Theta$ на любом k -мерном пересечении k -мерных клеток $\Delta \in X$ и $\Theta \in Y$.

Полиэдральное множество, состоящее из всех $(k-1)$ -мерных клеток оснащенного k -мерного полиэдрального множества X , обозначим через ∂X и зададим его оснащение следующим образом:

$$(\partial X)_\Lambda = \sum_{\Delta \supset \Lambda, \dim \Delta = k} X_\Delta, \quad (1)$$

где ориентации клеток Δ и Λ согласуются как ориентации многогранника и его грани старшей размерности. Оснащенное полиэдральное множество ∂X называется *границей* полиэдрального множества X . Полиэдральное множество X называется *замкнутым*, если $\text{supp } \partial X = \emptyset$. Оснащенное $(k-1)$ -мерное полиэдральное множество ∂X всегда является замкнутым.

Обозначим через E_Δ вещественное подпространство пространства $\mathbb{C}^n$, порожденное разностями точек клетки Δ .

Определение 2. Пусть $k \geq n$ и X — замкнутое k -мерное полиэдральное множество с оснащением степени $2n-k$. Назовем X *тропическим*, если для любой k -мерной клетки Δ

- (1) $X_\Delta = g_\Delta W_\Delta$, где g_Δ — вещественная полиномиальная функция на клетке Δ , а форма W_Δ не зависит от точек клетки;
- (2) ограничение формы W_Δ на пространство E_Δ вещественно;
- (3) форма W_Δ обращается в нуль на любом наборе касательных векторов, содержащем вектор из подпространства $\mathbb{C}_\Delta$, где $\mathbb{C}_\Delta$ — максимальное содержащееся в E_Δ комплексное подпространство пространства $\mathbb{C}^n$.

Назовем клетку Δ *вырожденной*, если $\text{codim}_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_\Delta < \text{codim } E_\Delta$. При $k = 2n, 2n-1$ все k -мерные клетки невырождены. Для невырожденной k -мерной клетки $\dim E_\Delta - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_\Delta = 2n-k = \deg X_\Delta$.

Следствие 6. Пусть Δ — вырожденная k -мерная клетка k -мерного тропического полиэдрального множества X . Тогда $X_\Delta = 0$.

Пусть $X_{\Delta, \mathbb{R}}, W_{\Delta, \mathbb{R}}$ — ограничения форм X_Δ, W_Δ на пространство E_Δ . Формы $X_{\Delta, \mathbb{R}}, W_{\Delta, \mathbb{R}}$ являются нечетными дифференциальными формами на Δ (нечетная форма на многообразии с ориентациями α, β — это пара форм $\omega_\alpha, \omega_\beta$, такая, что $\omega_\alpha = -\omega_\beta$). Сопоставим тропическому полиэдральному множеству X поток типа меры $\tilde{X}$ следующим образом:

$$\bar{X}(\varphi) = \sum_{\Delta \in X, \dim \Delta = k} \int_{\Delta} X_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge \varphi. \quad (2)$$

Следствие 7. *Тропические полиэдральные множества X, Y эквивалентны, если и только если $\bar{X} = \bar{Y}$.*

Определение 3. Класс эквивалентности тропических k -мерных полиэдральных множеств назовем полиномиальным E -тропическим многообразием (ETVP) размерности $k - n$. Назовем ETVP E -тропическим многообразием (ETV), если $g_{\Delta} = 1$ для любой k -мерной клетки Δ .

Следствие 8. *Если $\mathcal{P}$ есть ETVP размерности $k - n$, то $\bar{\mathcal{P}}$ — поток бистепеней $(k - n, k - n)$. Если $\mathcal{P}$ есть ETV размерности > 0 , то поток $\bar{\mathcal{P}}$ замкнут.*

Пример 1. Множество углов (corner locus) кусочно-линейной функции. Пусть носитель $(2n - 1)$ -мерного полиэдрального множества X состоит из точек негладкости кусочно-линейной функции h . Форма X_{Δ} строится так. Локально любая $(2n - 1)$ -мерная клетка Δ полиэдрального множества X является общей границей полупространств A и B , на которых функция h локально совпадает с линейными функциями h_A и h_B . Упорядочение пары полупространств определяет ориентацию клетки (так как пространство $\mathbb{C}^n$ канонически ориентировано). По определению $X_{\Delta, \mathbb{R}} = d^c h_A - d^c h_B$. Класс эквивалентности полиэдрального множества X является ETV размерности $n - 1$. Легко проверить, что $\bar{X} = dd^c h$. Обратно, для любого ETV $\mathcal{P}$ размерности $n - 1$ найдется кусочно-линейная функция h , такая, что $\mathcal{P} = dd^c h$.

Пусть $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ есть ETVP размерности $n - k$. Выберем тропические k -мерные полиэдральные множества X_i из $\mathcal{Q}_i$. При $\kappa_i \in \mathcal{B}$ рассмотрим k -мерное полиэдральное множество X , такое, что

- (1) $\text{supp } X = \text{supp } X_1 \cup \text{supp } X_2$;
- (2) если $\Delta \cap \Xi \neq \emptyset$, где Δ и Ξ — клетки полиэдральных множеств X и X_i , то $\Delta \cap \Xi$ является клеткой полиэдрального множества X ;
- (3) функции κ_1, κ_2 полиномиальны на любой клетке полиэдрального множества X .

Сопоставим k -мерной клетке Δ полиэдрального множества X оснащение, равное сумме умноженных на κ_i оснащений (одной или двух) клеток полиэдральных множеств X_i , содержащих Δ .

Следствие 9. *Полиэдральное множество X является тропическим и $\bar{X} = \kappa_1 \bar{X}_1 + \kappa_2 \bar{X}_2$.*

Содержащий X класс эквивалентности тропических полиэдральных множеств не зависит от произвола конструкции (следствие 7).

Следствие 10. *ETVP образуют модуль над кольцом $\mathcal{B}$, и отображение, сопоставляющее ETVP $\mathcal{P}$ поток $\bar{\mathcal{P}}$, является отображением $\mathcal{B}$ -модулей.*

Определим отображение D_c , действующее (при $m > 0$) из множества m -мерных в множество $(m - 1)$ -мерных ETVP, следующим образом. Пусть $\mathcal{Q}$ есть $(k - n)$ -мерное ETVP и X — тропическое k -мерное полиэдральное множество из класса эквивалентности $\mathcal{Q}$. Для каждой k -мерной клетки Δ полиэдрального множества X рассмотрим вещественный полином f_{Δ} на пространстве $\mathbb{C}^n$, совпадающий с функцией g_{Δ} в точках клетки Δ , и определим на $(k - 1)$ -мерной

клетке Λ k -мерного полиэдрального множества X нечетную дифференциальную форму

$$(D_c X)_{\Lambda, \mathbb{R}} = \sum_{\Delta \supset \Lambda, \dim \Delta = k} d^c f_{\Delta} \wedge W_{\Delta, \mathbb{R}}. \quad (3)$$

Теорема 2. На $(k-1)$ -мерном остове тропического полиэдрального множества X существует единственное задающее структуру тропического полиэдрального множества $D_c X$ оснащение $(D_c X)_{\Lambda}$, такое, что $(D_c X)_{\Lambda, \mathbb{R}}$ задается формулой (3). Соответствующее тропическому полиэдральному множеству $D_c X$ $(k-n-1)$ -мерное ETVR не зависит от произвола конструкции.

Доказательство. Если полином f_{Δ} на грани Δ нулевой, то из условия (3) определения 2 следует, что форма $d^c f_{\Delta} \wedge W_{\Delta}$ обращается в нуль на грани Δ . Поэтому форма $(D_c X)_{\Lambda, \mathbb{R}}$ не зависит от произвола в выборе полиномов f_{Δ} .

Форма $\sum_{\Delta \supset \Lambda, \dim \Delta = k} f_{\Delta} W_{\Delta, \mathbb{R}}$ обращается в нуль в точках клетки Λ (это следствие замкнутости полиэдрального множества X). Поэтому правая часть формулы (3) равна нулю на любом наборе касательных векторов, содержащем вектор из подпространства $\mathbb{C}_{\Lambda}$. Отсюда вытекает, что оснащенное полиэдральное множество $D_c X$ существует, единственно и удовлетворяет условию (3) определения 2.

Правую часть формулы (3) можно рассматривать как границу k -цепи со значениями $d^c f_{\Delta} \wedge W_{\Delta, \mathbb{R}}$ на клетках Δ . Поэтому $(D_c X)_{\Lambda, \mathbb{R}}$ является замкнутой $(k-1)$ -цепью. Отсюда вытекает замкнутость полиэдрального множества D_c .

Условие (2) определения 2 выполнено по построению.

По построению коэффициенты формы $(D_c X)_{\Lambda, \mathbb{R}}$ на клетке Λ полиномиальны. Для таких форм условие (1) вытекает из условий (2) и (3).

Следствие 11. Пусть $\mathcal{Q}$ есть ETV. Тогда $D_c(\mathcal{Q}) = 0$

Следствие 12. Если $\mathcal{Q}$ есть ETV, а h — кусочно-линейная функция, то $D_c(h^k \mathcal{Q}) = kh^{k-1} D_c(h \mathcal{Q})$.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{P}$ есть ETV и h — кусочно-линейная функция. Тогда $\overline{D_c(h \mathcal{P})} = d d^c(h \mathcal{P})$.

Доказательство. Пусть k -мерное полиэдральное множество X принадлежит классу эквивалентности ETV $\mathcal{P}$ и кусочно-линейная функция h линейна на всех клетках полиэдрального множества X . Тогда

$$\begin{aligned} d d^c(h \bar{\mathcal{P}})(\psi) &= - \sum_{\Delta \in X, \dim \Delta = k} \int_{\Delta} h W_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge d d^c \psi \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{\Delta} \int_{\Delta} d(h W_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge d^c \psi) - dh \wedge W_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge d^c \psi \\ &= (-1)^k \sum_{\Delta} \int_{\Delta} dh \wedge W_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge d^c \psi \\ &= (-1)^{k+1} \sum_{\Delta} \int_{\Delta} d^c h \wedge W_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge d \psi = \sum_{\Delta} \int_{\Delta} d(d^c h \wedge W_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge \psi) \\ &= \sum_{\Delta} \sum_{\Lambda \subset \Delta, \dim \Lambda = k-1} \int_{\Lambda} d^c h \wedge W_{\Delta, \mathbb{R}} \wedge \psi = \overline{D_c(h \mathcal{P})}(\psi). \end{aligned} \quad (4)$$

Приведем обоснования каждого из семи равенств из (4):

- 1) определение дифференцирования потока и тождество $dd^c = -d^c d$;
- 2) замкнутость формы $W_{\Delta, \mathbb{R}}$;
- 3) формула Стокса и замкнутость полиэдрального множества $h\mathcal{P}$;
- 4) условие (2) определения 2 и следующее свойство операторов d, d^c : если f — функция, а w — дифференциальная форма бистепени (m, m) на пространстве $\mathbb{C}^{m+1}$, то $df \wedge d^c w = -d^c f \wedge dw$;
- 5) замкнутость форм $d^c h$ и $W_{\Delta, \mathbb{R}}$;
- 6) формула Стокса;
- 7) определение оператора D_c .

§3. Доказательство предложения 1

Предложение 1 вытекает из утверждения (4) теоремы 3.

Теорема 3. (1) Для любого $\tau \in \mathcal{K}$ существует ETVР $\mathcal{P} = \iota(\tau)$, такое, что $\tau = \bar{\mathcal{P}}$. Размерность ETVР $\iota(\tau)$ равна $n - \deg \tau$, где $\deg \tau$ — половина степени τ как дифференциальной формы.

(2) Пусть $\tau \in \mathcal{T}$. Тогда $\iota(\tau)$ является ETV.

(3) Отображение ι является вложением рассматриваемого как $\mathcal{B}$ -модуль кольца $\mathcal{K}$ в $\mathcal{B}$ -модуль всех ETVР.

(4) Отображения $\iota\pi\delta'$ и $D_c\iota\pi$ кольца $\mathcal{K}'$ в множество ETVР совпадают.

Доказательство. По следствию 10 утверждение (1) вытекает из (2), так как элементы кольца $\mathcal{T}$ порождают $\mathcal{B}$ -модуль $\mathcal{K}$.

Докажем утверждение (2), используя индукцию по степени однородного элемента кольца $\mathcal{T}$. В степени 0 отображение ι переводит постоянную функцию $f(z) = c$ в n -мерное ETV, задаваемое $(2n)$ -мерным полиэдральным множеством X с единственной клеткой $\Delta = \mathbb{C}^n$ и 0-формой $X_\Delta = c$.

Пусть при $m < k$ отображение ι переводит элементы степени m в ETV размерности $n - m$. Рассмотрим элемент $\tau = dd^c h \wedge \nu$, где $\nu \in \mathcal{T}^{k-1}$. Тогда $\tau = dd^c(h\nu)$. Отсюда следует (предложение 2), что $\tau = \overline{D_c(h\nu)}$ и, значит, $\iota(\tau) = D_c(h\nu)$. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) вытекает из следствия 9.

На элементах кольца $\mathcal{T}'$ оба отображения из утверждения (4) нулевые (следствие 11). Рассмотрим элемент кольца $\mathcal{K}'$ вида $H^k \otimes \Upsilon$, такой, что $\pi(1 \otimes \Upsilon) = \nu$ и $\pi(H \otimes 1) = h$, где $\nu \in \mathcal{T}$, а функция h кусочно-линейна. Тогда $\pi(H^k \otimes \Upsilon) = h^k \nu$ и

$$\begin{aligned} \iota\pi\delta'(H^k \otimes \Upsilon) &= kh^{k-1}\iota\pi\delta'((H \otimes 1)(1 \otimes \Upsilon)) = kh^{k-1}\iota(dd^c(h\nu)) \\ &= kh^{k-1}D_c(h\nu) = D_c(\iota(h^k\nu)) = D_c\iota\pi(H^k \otimes \Upsilon). \end{aligned}$$

Два первых и последнее равенства — прямые следствия определений, третье — утверждение предложения 2, четвертое — утверждение следствия 12. Теорема доказана.

Следствие 13. $\iota\delta = D_c\iota$

§4. Выпуклые многогранники в пространстве $\mathbb{C}^{n*}$

Здесь подробно описана структура потока $(dd^c h)^k$ для опорной функции h выпуклого многогранника A в пространстве $\mathbb{C}^{n*}$. Носитель потока есть

$(2n - k)$ -мерный остов веера двойственных многограннику A конусов. В случае $A \subset \operatorname{Re} \mathbb{C}^n$ набор соответствующих ETV совпадает с набором тропических многообразий, сопоставляемых многограннику Ньютона в тропической алгебраической геометрии [2].

Замечание 4. Для кусочно-линейных функций h_i поток $dd^c h_1 \wedge \cdots \wedge dd^c h_k$ можно представить как конечную сумму слагаемых вида $\pm (dd^c g_i)^k$, где g_i — *выпуклые* кусочно-линейные функции (для этого следует представить каждую из функций h_i как разность двух выпуклых и использовать формулу поляризации). В окрестности любой точки $z \in \mathbb{C}^n$ выпуклая кусочно-линейная функция g представима в виде $g(z + w) = C + h(w)$, где h — опорная функция некоторого выпуклого многогранника. Поэтому (см. ниже) теорема 4 формально может быть использована для вычисления любого значения оператора Монжа–Ампера.

Для построения соответствующих многограннику A E -тропических многообразий используется следующая конструкция [6]. Пусть E есть N -мерное вещественное векторное пространство с сопряженным пространством E^* , $\Gamma \subset E^*$ — ограниченная область и ω — стандартная симплектическая форма в пространстве $E \oplus E^*$. Рассмотрим прямой образ Ω_Γ формы ω^N при отображении проекции $E \oplus \Gamma \rightarrow E$. Для операции прямого образа необходим выбор ориентации слоя отображения. Назовем *стандартной* ориентацию пространства $E \oplus E^*$, задаваемую формой ω^N . Согласуем выбор ориентаций пространств E и E^* так, чтобы соответствующая ориентация пространства $E \oplus E^*$ являлась стандартной. Тогда *знак формы Ω_Γ меняется с изменением ориентации пространства E* (т.е. форма является нечетной).

Пусть $\mathcal{P}$ — двойственный (относительно спаривания $\operatorname{Re}\langle z, z^* \rangle$) многограннику A веер конусов, а $\mathcal{P}^k$ есть k -мерный остов веера $\mathcal{P}$. Рассмотрим $\mathcal{P}^k$ как k -мерное полиэдральное множество с коническими клетками. При $2n > k \geq n$ построим его оснащение следующим образом. Пусть Δ есть k -мерная клетка k -мерного полиэдрального множества $\mathcal{P}^k$, Γ — двойственная конусу Δ $(2n - k)$ -мерная грань многогранника A , E^* — вещественное подпространство пространства $\mathbb{C}^{n*}$, порожденное разностями точек грани Γ , и $E = E_\Delta / \mathbb{C}_\Delta$. Ограничение спаривания $\omega = \operatorname{Im}\langle z, z^* \rangle$ пространств $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n*}$ до спаривания подпространств $\mathbb{C}_\Delta$ и E^* нулевое. Таким образом, ω задает спаривание пространств E и E^* . Если клетка Δ невырождена, то спаривание $\omega: E \otimes E^* \rightarrow \mathbb{R}$ невырождено. Пусть $W_{\Delta, \mathbb{R}}$ — прообраз определенной выше нечетной внешней формы Ω_Γ при отображении проекции $E_\Delta \rightarrow E$. Здесь ориентации пространств E_Δ и E согласуются при помощи выбора стандартной ориентации ядра $\mathbb{C}_\Delta$ проекции $E_\Delta \rightarrow E$ как комплексного векторного пространства (такое согласование необходимо для операции обратного образа нечетной формы).

Теорема 4. *Оснастим k -мерные клетки Δ полиэдрального множества $\mathcal{P}^k$ определенными выше нечетными формами $W_{\Delta, \mathbb{R}}$. Тогда $\bar{\mathcal{P}}^k = (dd^c h)^{2n-k}$.*

Для вывода теоремы 4 понадобится следующее свойство приведенной выше конструкции формы Ω_Γ .

Лемма 1. *Пусть область Γ является выпуклым многогранником, Π — грань старшей размерности многогранника Γ , $E_\Pi^* \subset E^*$ — подпространство, порожденное разностями точек грани Π , E_Π — ортогональное E_Π^* 1-мерное подпространство пространства E , Ω'_Π — прообраз нечетной внешней формы*

Ω_Π при отображении проекции $E \rightarrow E/E_\Pi$ и стандартном согласовании ориентаций. Тогда

- (i) $\sum_{\text{codim } \Pi=1} \Omega'_\Pi = 0$;
- (ii) $\sum_{\text{codim } \Pi=1} x_\Pi \wedge \Omega'_\Pi = \Omega_\Gamma$ для любого набора $x_\Pi \in \Pi$.

Утверждения (i) и (ii) являются инвариантными формулировками следующих свойств выпуклого многогранника:

- (i) $\sum_\Pi S(\Pi)\eta_\Pi = 0$, где η_Π — вектор единичной внешней нормали, а $S(\Pi)$ — площадь грани Π ;
- (ii) объем N -мерного многогранника, умноженный на N , равен сумме площадей граней, умноженных на длины соответствующих высот.

Пусть Γ пробегает множество $(2n - k + 1)$ -мерных граней многогранника A . Применяя к каждой из них утверждение (i) леммы 1, получаем замкнутость оснащенного полиэдрального множества $\mathcal{P}^k$. Применяя к каждой из таких граней утверждение (ii) леммы 1 и используя определение отображения D_c , получаем следующее утверждение.

Следствие 14. $D_c(h\mathcal{P}^k) = \mathcal{P}^{k-1}$.

Теорема 4 вытекает из сопоставления следствия 14 и предложения 2. Из теоремы 4 вытекает, что псевдообъем многогранника A (см. замечание 3 в §1) равен сумме некоторых чисел, соответствующих n -мерным граням многогранника. В случае $A \subset \text{Re } \mathbb{C}^{n*}$ псевдообъем равен n -мерному объему многогранника, умноженному на $n!\sigma_n$, где σ_n — объем n -мерного шара радиуса 1. В общем случае вычисление таких чисел приводит к следующему результату (здесь предполагается, что многогранник A лежит в пространстве $\mathbb{C}^n$ с фиксированной эрмитовой метрикой).

Утверждение 2 [5]. Псевдообъем многогранника A равен

$$n!\sigma_n \sum_{\Gamma \subset A, \dim \Gamma = n} S(\Gamma)K(\Gamma)\xi(E_\Delta),$$

где $S(\Gamma)$ есть n -мерная площадь грани Γ , $K(\Gamma)$ — внешний угол грани (т. е. часть пространства E_Δ , занимаемая конусом Δ) и $\xi(E_\Delta)$ — коэффициент искажения площади при ортогональной проекции $E_\Delta \rightarrow \sqrt{-1}E_\Delta^\perp$, где $E_\Delta^\perp$ — ортогональное дополнение пространства E_Δ в $\mathbb{C}^n$.

§5. Умножение ETVP

Здесь объясняется, что формальные линейные комбинации ETVP разных размерностей образуют коммутативное градуированное дифференциальное кольцо (кольцо ETVP), а ETVP размерности $n - k$ образуют однородную компоненту этого кольца степени k . Если рассматривать $\mathcal{K}$ как кольцо, градуированное половинами степеней дифференциальных форм, то отображение ι является вложением дифференциальных (следствие 13) градуированных колец.

Пусть $X \cap Y$ — полиэдральное множество, образованное попарными пересечениями клеток полиэдральных множеств X и Y . Скажем, что X и Y трансверсальны, если для любых клеток $\Delta \in X$, $\Xi \in Y$ с непустым пересечением пространства E_Δ и E_Ξ пересекаются трансверсально.

Определение 4. Пусть Δ есть k -мерная клетка тропического k -мерного полиэдрального множества X . Скажем, что нечетная форма X_Δ положительна

(отрицательна), если нечетная форма W_Δ задает функцию объема тел в пространстве $E_\Delta/\mathbb{C}_\Delta$ с положительными (соответственно отрицательными) значениями.

Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ суть ETVР и $\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{Q} < n$. Тогда по определению $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$.

Пусть X и Y — трансверсальные тропические полиэдральные множества размерности p и q , $p + q \geq 3n$ (т. е. сумма размерностей соответствующих ETVР не меньше n) и $\Lambda = \Delta \cap \Xi$, где Λ, Δ, Ξ — клетки старшей размерности полиэдральных множеств $X \cap Y$, X, Y соответственно. Положим $(X \cap Y)_\Lambda = X_\Delta \wedge Y_\Xi$. Очевидно, что $(X \cap Y)_\Lambda$ обращается в нуль на подпространстве $\mathbb{C}_\Lambda$. Припишем форме $(X \cap Y)_\Lambda$ знак, зависящий от ориентации клетки Λ , следующим образом. Будем считать форму $(X \cap Y)_\Lambda$ положительной (определение 4), если формы X_Δ, Y_Ξ обе положительны или обе отрицательны. В противном случае считаем форму $(X \cap Y)_\Lambda$ отрицательной. (Если клетка Λ вырождена, то $(X \cap Y)_\Lambda = 0$.) Легко показать, что полиэдральное множество $X \cap Y$ является тропическим.

Аддитивная группа пространства $\mathbb{C}^n$ действует сдвигами на множестве полиэдральных множеств. При фиксированных X, Y пара полиэдральных множеств $X, z + Y$ трансверсальна при почти всех $z \in \mathbb{C}^n$.

Утверждение 3. Пусть тропические полиэдральные множества X и $z_i + Y$ трансверсальны. Тогда при $z_i \rightarrow 0$ поток $X \cap (z_i + Y)$ стремится к не зависящему от выбора последовательности z_i пределу вида $\overline{Z}$, где Z является тропическим $(p + q - 2n)$ -мерным полиэдральным множеством. Если X и Y — полиэдральные множества из $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, то класс эквивалентности полиэдрального множества Z задает ETVР размерности $p + q - 3n$, называемое произведением ETVР $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ и обозначаемое через $\mathcal{P}\mathcal{Q}$.

Частным случаем конструкции умножения ETVР является подробно описанная конструкция умножения тропических многообразий ([1], [2]).

Утверждение 4. Отображение D_c является дифференцированием кольца ETVР, а отображение ι — вложением дифференциальных колец.

Гипотеза 1 ¹⁾. Образ кольца $\mathcal{T}$ при отображении ι совпадает с кольцом ETV.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Esterov, *Tropical varieties with polynomial weights and corner loci of piecewise polynomials*, Mosc. Math. J., **12**:1 (2012), 55–76; <http://arxiv.org/abs/1012.5800>.
- [2] Б. Я. Казарновский, *c-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий*, Изв. РАН, сер. матем., **67**:3 (2003), 23–44.
- [3] Д. Н. Бернштейн, *Число корней системы уравнений*, Функц. анализ. и его прил., **9**:3 (1975), 1–4.
- [4] M. Brion, *Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry*, in: Parameter spaces (Warsaw, 1994), Banach Center Publ., vol. 36, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1996, 25–44.
- [5] Б. Я. Казарновский, *О нулях экспоненциальных сумм*, Докл. АН СССР, **257**:4 (1981), 804–808.

¹⁾ Доказательство этой гипотезы опубликовано (см. B. Kazarnovskii, *Exponential tropical varieties and complex Monge–Ampère operator*, <http://arxiv.org/abs/1212.5503>; расширенный вариант готовится к печати в Изв. РАН).

- [6] Б. Я. Казарновский, *Многогранники Ньютона и корни систем экспоненциальных сумм*, Функц. анализ и его прил., **18**:4 (1984), 40–49.
- [7] S. Alesker, *Hard Lefschetz theorem for valuations, complex integral geometry, and unitarily invariant valuations*, J. Differential Geom., **63**:1 (2003).
- [8] G. G. Gusev, *Euler characteristic of the bifurcation set for a polynomial of degree 2 or 3*, <http://arxiv.org/abs/1011.1390>.
- [9] Б. Я. Казарновский, *Мультипликативная теория пересечений и комплексные тропические многообразия*, Изв. РАН, сер. матем., **71**:4 (2007), 19–68.
- [10] E. Bedford, B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampère equations*, Invent. Math., **37**:1 (1976), 1–44.
- [11] B. Kazarnovskii, *On piecewise pluriharmonic functions*, <http://arxiv.org/abs/1206.3741>.

Институт проблем передачи информации РАН
им. А. А. Харкевича
e-mail: kazbori@iitp.ru

Поступило в редакцию
30 июня 2011 г.