Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Александров, Кратный вычет и весовая фильтрация на логарифмическом комплексе де Рама, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 4, 1–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 05:16:17

УДК 515.17

Кратный вычет и весовая фильтрация на логарифмическом комплексе де Рама

© 2013. А. Г. АЛЕКСАНДРОВ

В статье изучается кратный вычет логарифмических дифференциальных форм с полюсами на приводимом дивизоре, вычислены ядро и образ отображения кратного вычета. В качестве одного из приложений получено описание весовой фильтрации на логарифмическом комплексе де Рама для дивизоров, неприводимые компоненты которых локально задаются регулярной последовательностью голоморфных функций. В частности, это позволяет вычислять смешанную структуру Ходжа на когомологиях дополнения для некоторых типов дивизоров без использования теорем о разрешении особенностей и стандартной редукции к случаю нормальных пересечений.

Введение

Понятие весовой фильтрации на логарифмическом комплексе де Рама для дивизоров с нормальными пересечениями на неособом многообразии было введено Делинем [6] в 1972 г. при описании смешанной структуры Ходжа (ССХ) на когомологиях дополнения дивизора. С той поры эта теория интенсивно развивается во многих направлениях для самых разных типов многообразий и теорий когомологий, при этом практически все известные варианты обобщений основаны на редукции рассматриваемой ситуации к случаю дивизора с нормальными пересечениями, использованию общих теорем о разрешении особенностей и функториальности понятия ССХ.

В настоящей статье изучается кратный вычет логарифмических дифференциальных форм и с его помощью получено естественное описание весовой фильтрации на логарифмическом комплексе де Рама для дивизоров, неприводимые компоненты которых локально задаются регулярной последовательностью голоморфных функций. В частности, это позволяет вычислить ССХ на когомологиях дополнения для некоторых типов дивизоров, не прибегая к упомянутой выше редукции.

В первых двух параграфах рассматриваются некоторые свойства логарифмических дифференциальных форм с полюсами вдоль приводимого дивизора. В §§3 и 4 обсуждается понятие кратного вычета относительно полного пересечения для мероморфных дифференциальных форм с простыми полюсами вдоль дивизора. В следующих двух параграфах вычисляются ядро и образ отображения кратного вычета для логарифмических дифференциальных форм. В заключительном §7 полученные результаты применяются для описания весовой фильтрации на логарифмическом комплексе де Рама и обсуждаются некоторые приложения.

§1. Логарифмический комплекс де Рама

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие размерности $m \geq 1$, Ω_X^q , $q \geq 0$, — пучки ростков голоморфных дифференциальных q -форм на

X и $D \subset X$ — (локально главный) дивизор Картье. В окрестности любой точки $x \in D$ росток (D, x) задается голоморфной функцией $h \in \mathcal{O}_{X,x}$: если $z = (z_1, \dots, z_m)$ — локальная система координат в окрестности этой точки, то $h(z) = 0$ — локальное уравнение дивизора D в x , так что $\mathcal{O}_{D,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}/(h)$.

Слои когерентного аналитического пучка *логарифмических дифференциальных форм* $\Omega_X^q(\log D)$, $q \geq 0$, состоят из ростков мероморфных q -форм на X с полюсами вдоль D , таких, что $h\omega$ и $hd\omega$ голоморфны в точке x , т.е. $h \cdot \Omega_{X,x}^q(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^q$ и $h \wedge d\Omega_{X,x}^q(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^{q+1}$. Ясно, что второе условие эквивалентно включению $dh \wedge \Omega_{X,x}^q(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^{q+1}$.

По определению $\Omega_X^0(\log D) \cong \mathcal{O}_X$ и существуют естественные вложения $\Omega_X^q \subseteq \Omega_X^q(\log D)$, которые для всех $x \notin D$ индуцируют изоморфизмы $\Omega_{X,x}^q \cong \Omega_{X,x}^q(\log D)$, $q \geq 0$. Кроме того, $\Omega_{X,x}^m(\log D) \cong \mathcal{O}_{X,x}(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m/h)$.

Семейство $\mathcal{O}_X$ -модулей $\Omega_X^q(\log D)$, $q \geq 0$, снабженное дифференциалом d , индуцированным дифференцированием де Рама, заданным на $\Omega_X^\bullet$, образует *возрастающий комплекс*, который называется *логарифмическим комплексом де Рама*. Далее, пучки логарифмических дифференциальных форм — это $\mathcal{O}_X$ -модули конечного типа, а их прямая сумма $\bigoplus_{q=0}^m \Omega_X^q(\log D)$ образует внешнюю $\mathcal{O}_X$ -алгебру, замкнутую относительно действия d .

§2. Логарифмические формы с полюсами на приводимом дивизоре

Для простоты будем далее предполагать, что дивизор $D \subset X$ приведен, т.е. кратности всех его неприводимых компонент равны единице. Тогда в окрестности любой точки $x \in D$ локальное уравнение дивизора D задается ростком голоморфной функции $h \in \mathcal{O}_{X,x}$ без *кратных* множителей.

Рассмотрим несколько простых свойств логарифмических дифференциальных форм с полюсами на D , которые будут использоваться в дальнейшем. Сначала напомним, что $\mathcal{O}_X$ -модуль векторных полей, *логарифмических* вдоль дивизора $D \subset X$, состоит из ростков голоморфных векторных полей $\mathcal{V} \in \text{Der}(\mathcal{O}_X)$ на X , таких, что $\mathcal{V}(h)$ принадлежит идеалу $(h)\mathcal{O}_X$. В частности, $\mathcal{V}$ касается дивизора D в его неособых точках. Этот модуль обозначается через $\text{Der}_X(\log D)$. Далее, стягивание дифференциальных форм вдоль векторных полей индуцирует совершенное спаривание (см. [13]):

$$\text{Der}_X(\log D) \times \Omega_X^1(\log D) \rightarrow \mathcal{O}_X. \quad (1)$$

Утверждение 1. *Предположим, что D_i — это компоненты несократимого (не обязательно неприводимого) разложения дивизора D , заданные функциями h_i , $i = 1, \dots, k$, так что $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$. Тогда*

$$\text{Der}_X(\log D_1) \cap \dots \cap \text{Der}_X(\log D_k) = \text{Der}_X(\log D).$$

Доказательство. Проверим это свойство локально. Очевидно, что левая часть содержится в правой. Обратно, пусть $\mathcal{V} \in \text{Der}_{X,x}(\log D)$. Тогда

$$\mathcal{V}(h) = \sum_{i=1}^k (h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_k) \mathcal{V}(h_i) = fh,$$

где $f \in \mathcal{O}_{X,x}$. После деления на h_i обеих частей второго равенства получаем, что функция $(h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_k) \mathcal{V}(h_i)/h_i$ голоморфна, т.е. h_i делит $\mathcal{V}(h_i)$. Следовательно, $\mathcal{V}(h_i) \in (h_i)\mathcal{O}_{X,x}$ для всех $i = 1, \dots, k$. $\square$

Следующее утверждение можно рассматривать как один из возможных дуальных вариантов утверждения 1 относительно спаривания (1).

Утверждение 2. *При тех же условиях предположим, что $\Omega_X^1(\log D)$ локально порождается замкнутыми формами. Тогда существует изоморфизм*

$$\Omega_X^1(\log D_1) + \cdots + \Omega_X^1(\log D_k) \cong \Omega_X^1(\log D).$$

Доказательство. Ввиду теоремы 2.9 из работы [13] условие замкнутости образующих модуля $\Omega_{X,x}^1(\log D)$ эквивалентно изоморфизму

$$\sum_{i=1}^k \mathcal{O}_{X,x} \frac{dh_i}{h_i} + \Omega_{X,x}^1 \cong \Omega_{X,x}^1(\log D).$$

С другой стороны, $\frac{dh_i}{h_i} \in \Omega_{X,x}^1(\log D_i)$ и $\sum_{i=1}^k \Omega_X^1(\log D_i) \hookrightarrow \Omega_X^1(\log D)$ — естественное вложение. Отсюда следует утверждение. $\square$

Предложение 1. *Пусть $\widehat{D}_i = D_1 \cup \cdots \cup D_{i-1} \cup D_{i+1} \cup \cdots \cup D_k$, $i = 1, \dots, k$. Тогда в условиях предыдущих утверждений существуют естественные вложения*

$$h_i \Omega_{X,x}^\bullet(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^\bullet(\log \widehat{D}_i), \quad dh_i \wedge \Omega_{X,x}^\bullet(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^{\bullet+1}(\log \widehat{D}_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

Другими словами, внешнее умножение на форму dh_i , равно как и умножение на функцию h_i , «гасит» полюсы логарифмической формы $\omega \in \Omega_{X,x}^\bullet(\log D)$, расположенные на компоненте D_i .

Доказательство. Рассмотрим случай $k = 2$. Пусть $i = 1$ и $x \in D_1 \cap D_2$. Покажем, что имеет место первое включение, т. е. $h_2 \Omega_{X,x}^\bullet(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^\bullet(\log D_1)$. По условию $h_1(h_2\omega) = h\omega \in \Omega_{X,x}^\bullet$. Далее,

$$dh \wedge (h_2\omega) = h_2 dh_1 \wedge (h_2\omega) + h_1 dh_2 \wedge (h_2\omega) = h_2 dh_1 \wedge (h_2\omega) + dh_2 \wedge (h\omega).$$

Так как дифференциальная форма $dh \wedge \omega \in \Omega_{X,x}^\bullet$ голоморфна, то $dh \wedge (h_2\omega)$ — также голоморфная форма. Аналогично, $dh_2 \wedge (h\omega) \in \Omega_{X,x}^\bullet$. Следовательно, $h_2 dh_1 \wedge (h_2\omega) = h_2^2 dh_1 \wedge \omega \in \Omega_{X,x}^\bullet$. Пусть $dh_1 \wedge \omega = \vartheta/h_2^2$, где $\vartheta \in \Omega_{X,x}^\bullet$. Теперь заметим, что $\frac{dh_1}{h_1} \in \Omega_{X,x}^\bullet(\log D)$, так что $\frac{dh_1}{h_1} \wedge \omega \in \Omega_{X,x}^\bullet(\log D)$ ввиду $\wedge$ -замкнутости. Поэтому, $\frac{dh_1}{h_1} \wedge \omega = \frac{\vartheta}{h_1 h_2^2} \in \Omega_{X,x}^\bullet(\log D)$, т. е. $\frac{\vartheta}{h_2} \in (h) \Omega_{X,x}^\bullet(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^\bullet$. Следовательно, $\vartheta \in (h_2) \Omega_{X,x}^\bullet$, или $dh_1 \wedge \omega = \vartheta'/h_2$, где $\vartheta' \in \Omega_{X,x}^\bullet$. Таким образом, $h_2(dh_1 \wedge \omega) = dh_1 \wedge (h_2\omega) \in \Omega_{X,x}^\bullet$, т. е. $dh_1 \wedge (h_2\omega)$ — голоморфная форма. Значит, $h_2\omega \in \Omega_{X,x}^\bullet(\log D_1)$, что и требовалось доказать.

Существование второго включения доказывается аналогично. Действительно, дифференциальная форма $h_1(dh_2 \wedge \omega) \in \Omega_{X,x}^\bullet$ голоморфна, поскольку она представляется в виде разности $dh \wedge \omega - h_2 dh_1 \wedge \omega$, в которой первая форма голоморфна по условию, а голоморфность второй установлена при доказательстве первого включения. Далее,

$$dh_1 \wedge (dh_2 \wedge \omega) = d(h_1 dh_2 \wedge \omega) + h_1(dh_2 \wedge d\omega).$$

Так как форма $h_1 dh_2 \wedge \omega$ голоморфна, то и ее дифференциал также голоморфен. Наконец,

$$h_1(dh_2 \wedge d\omega) = dh \wedge d\omega - h_2(dh_1 \wedge d\omega).$$

Форма $dh \wedge d\omega$ голоморфна по предположению, так как внешняя алгебра $\Omega_{X,x}^\bullet(\log D)$ замкнута относительно дифференцирования де Рама d , а потому $d\omega \in \Omega_{X,x}^\bullet(\log D)$. Как и при доказательстве первого включения, получаем, что $h_2(dh_1 \wedge d\omega)$ — голоморфная форма. Отсюда следует, что $h_1(dh_2 \wedge d\omega)$, равно как и $h_1(dh_2 \wedge \omega)$, — голоморфные формы. Таким образом, $dh_2 \wedge \omega \in \Omega_{X,x}^\bullet(\log D_1)$, что и требуется. Общий случай $k > 2$ разбирается аналогично. $\square$

Замечание 1. Такими же рассуждениями можно показать, что для всех $i = 1, \dots, k$ существуют вложения

$$(h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_k) \Omega_{X,x}^\bullet(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^\bullet(\log D_i),$$

$$d(h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_k) \wedge \Omega_{X,x}^{\bullet-1}(\log D) \subseteq \Omega_{X,x}^\bullet(\log D_i).$$

Аналогичные включения имеются для дивизоров, составленных из произвольных наборов различных компонент (без повторений) несократимого представления дивизора D .

Утверждение 3. *Предположим, что компоненты несократимого разложения приведенного дивизора D локально задаются регулярной $\mathcal{O}_{X,x}$ -последовательностью функций h_i , $i = 1, \dots, k$. Тогда*

$$\Omega_X^\bullet(\log \widehat{D_1}) \cap \cdots \cap \Omega_X^\bullet(\log \widehat{D_k}) = \Omega_X^\bullet$$

и существует точная последовательность комплексов

$$0 \longrightarrow \Omega_X^\bullet \longrightarrow \bigoplus \Omega_X^\bullet(\log \widehat{D_i}) \longrightarrow \sum \Omega_X^\bullet(\log \widehat{D_i}) \longrightarrow 0.$$

Доказательство. Достаточно установить справедливость равенства локально. Ясно, что правая часть содержится в левой. Рассмотрим дифференциальную q -форму ω из левой части. Тогда $(h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_k) \omega \in \Omega_{X,x}^q$ для любого $i = 1, \dots, k$. Следовательно, $\omega \in \bigcap \frac{1}{(h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_k)} \Omega_{X,x}^q$, что эквивалентно включению $h\omega \in (h_1) \Omega_{X,x}^q \cap \cdots \cap (h_k) \Omega_{X,x}^q$. Из простейших свойств регулярных последовательностей вытекает, что при сделанных предположениях пересечение главных идеалов совпадает с их произведением $(h_1 \cdots h_k) \Omega_{X,x}^q$. Отсюда следует, что $\omega \in \Omega_{X,x}^q$, т. е. форма ω голоморфна. $\square$

§3. Разложение мероморфных форм вдоль полного пересечения

Пусть $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ — приведенный приводимый дивизор. Обозначим $\mathcal{O}_X$ -модули мероморфных дифференциальных форм степени $q \geq 1$, образованные дифференциальными q -формами с простыми полюсами и с полюсами произвольного порядка на дивизоре $\widehat{D_j} = D_1 \cup \cdots \cup D_{j-1} \cup D_{j+1} \cup \cdots \cup D_k$, через $\Omega_X^q(\widehat{D_j})$ и $\Omega_X^q(\star \widehat{D_j})$, $j = 1, \dots, k$, соответственно. Будем считать, что $\widehat{D_1} = \emptyset$ при $k = 1$, так что $\Omega_X^q(\widehat{D_1}) = \Omega_X^q(\star \widehat{D_1}) = \Omega_X^q$.

Предположим, что комплексное аналитическое пространство $C = D_1 \cap \cdots \cap D_k$ — полное пересечение. Это означает, что идеал $\mathcal{I}$, задающий C в некоторой окрестности U отмеченной точки, локально порождается регулярной $\mathcal{O}_U$ -последовательностью $(h_1, \dots, h_k)$ и $\dim C = m - k \geq 0$. Будем также предполагать, что пространство $C = C_{\text{red}}$ приведено, другими словами, $\mathcal{I} = \sqrt{\mathcal{I}}$ — радикальный идеал. В частности, из этих условий следует, что дифференциальная

форма $dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k$ степени k не обращается тождественно в нуль ни на одной неприводимой компоненте ростка пространства C . Следующее утверждение вместе с доказательством — это несколько измененная версия соответствующих рассуждений из работ [2], [3].

Теорема 1. Пусть функции $h_i \in \mathcal{O}_U$, $i = 1, \dots, k$, задают локальные уравнения дивизоров D_i в окрестности U точки $x \in C$. Предположим, что мероморфная дифференциальная форма $\omega \in \Omega_U^q(D)$ удовлетворяет условиям

$$dh_j \wedge \omega \in \sum_{i=1}^k \Omega_U^{q+1}(\widehat{D_i}), \quad j = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Тогда существует голоморфная функция g , которая не обращается тождественно в нуль ни на одной неприводимой компоненте полного пересечения C , голоморфная дифференциальная форма $\xi \in \Omega_U^{q-k}$ и мероморфная q -форма $\eta \in \sum_{i=1}^k \Omega_U^q(\widehat{D_i})$, такие, что

$$g\omega = \frac{dh_1}{h_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dh_k}{h_k} \wedge \xi + \eta. \quad (3)$$

Доказательство. В окрестности точки $x \in U$ дифференциальную форму ω можно записать в виде

$$\omega = \frac{1}{h_1 \cdots h_k} \sum_{|I|=q} a_I(z) \cdot dz_I,$$

где $I := I^q = (i_1, \dots, i_q)$, $1 \leq i_1, \dots, i_q \leq m$, — мульти-индекс, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_q}$ и $a_I(z) \in \mathcal{O}_U$ — множество коэффициентов, кососимметрических относительно I . Очевидно, что условия (2) эквивалентны включениям

$$dh_j \wedge \sum_I a_I(z) \cdot dz_I \in \sum_{\ell=1}^k h_\ell \Omega_U^{q+1}, \quad j = 1, \dots, k,$$

которые приводят к следующей системе соотношений между коэффициентами a_I и частными производными функций h_j :

$$\sum_{\ell=1}^q (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_j}{\partial z_{i_\ell}} a_{I \setminus i_\ell} = b_{jI}^1 h_1 + \cdots + b_{jI}^k h_k, \quad j = 1, \dots, k, \quad (4)$$

с голоморфными $b_{jI}^1, \dots, b_{jI}^k \in \mathcal{O}_U$.

Зафиксируем мульти-индекс $J^p = (j_1, \dots, j_p)$, $1 \leq j_1, \dots, j_p \leq m$, $1 \leq p \leq k$, и обозначим соответствующий минор якобиевой матрицы $\text{Jac}(h_1, \dots, h_k) = \|\partial h_i / \partial z_j\|$ через

$$\Delta_{J^p} = \Delta_{j_1 \dots j_p} = \det \left\| \frac{\partial h_i}{\partial z_{j_r}} \right\|_{1 \leq i, r \leq p}.$$

Теперь индукцией по индексу p докажем, что выполняются следующие сравнения:

$$\Delta_{J^p} a_{I^q} \equiv \sum_{K \subset I^q, |K|=p} \text{sgn} \left(\begin{matrix} I^q \\ K, I^q \setminus K \end{matrix} \right) \Delta_{K A(J^p, I^q \setminus K)} \pmod{(\mathcal{I})}, \quad p = 1, \dots, k, \quad (5)$$

где $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_U$ — идеал, порожденный регулярной последовательностью $(h_1, \dots, h_k)$. Сначала рассмотрим случай $p = 1$, $J^1 = j_1 = j$. Полагая $I = I^{q+1} = (j, I^q) = (j, i_1, \dots, i_q)$ в формуле (4), получаем сравнение

$$\frac{\partial h_1}{\partial z_j} a_{I^q} \equiv \sum_{\ell=1}^q (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_1}{\partial z_{i_\ell}} a_{I \setminus i_\ell} \pmod{(\mathcal{I})},$$

которое совпадает с соотношением (5) при $p = 1$.

Предположим, что сравнение (5) верно при $p - 1$, и докажем его справедливость для p таким образом. Разложение детерминанта Δ_{J^p} по p -й строке приводит к тождеству

$$\Delta_{J^p} a_{I^q} = \sum_{\ell=1}^p (-1)^{p-\ell} \frac{\partial h_p}{\partial z_{j_\ell}} \Delta_{j_1 \dots \widehat{j_\ell} \dots j_p}^{p-1} a_{I^q}.$$

По предположению индукции

$$\Delta_{j_1 \dots \widehat{j_\ell} \dots j_p} a_{I^q} \equiv \sum_{\substack{K' \subset I^q \\ |K'|=p-1}} \operatorname{sgn} \left(\begin{matrix} I^q \\ K', I^q \setminus K' \end{matrix} \right) \Delta_{K'} a_{(j_1 \dots \widehat{j_\ell} \dots j_p, I^q \setminus K')} \pmod{(\mathcal{I})}.$$

Подставляя это соотношение в предыдущее сравнение и меняя порядок суммирования, получаем

$$\Delta_{J^p} a_{I^q} \equiv \sum_{\substack{K' \subset I^q \\ |K'|=p-1}} \operatorname{sgn} \left(\begin{matrix} I^q \\ K', I^q \setminus K' \end{matrix} \right) \Delta_{K'} \sum_{\ell=1}^p (-1)^{p-\ell} \frac{\partial h_p}{\partial z_\ell} a_{(j_1 \dots \widehat{j_\ell} \dots j_p, I^q \setminus K')} \pmod{(\mathcal{I})}.$$

Вторая сумма состоит из p слагаемых, содержащихся в соотношении (4) при $j = p$, $I = (i_1, \dots, i_p, I^q \setminus K')$, а длина этого мульти-индекса равна $q + 1$. Следовательно, эту сумму можно переписать в виде суммы остальных $q - p + 1$ слагаемых с противоположными знаками и элемента из идеала $(h_1, \dots, h_k) \mathcal{O}_U$. Отсюда получается такое сравнение по модулю идеала $\mathcal{I}$:

$$\Delta_{J^p} a_{I^q} \equiv \sum_{\substack{K' \subset I^q \\ |K'|=p-1}} \operatorname{sgn} \left(\begin{matrix} I^q \\ K', I^q \setminus K' \end{matrix} \right) \Delta_{K'} (-1)^{p-1} \sum_{i \in I \setminus K'} (-1)^{\#(i; I \setminus K')} \frac{\partial h_p}{\partial z_i} a_{(j_1 \dots j_p, I^q \setminus K' \setminus i)}, \quad (6)$$

где через $\#(i; I \setminus K')$ обозначается число вхождений индекса i в множество $I \setminus K'$. Упорядочим теперь все пары (K', i) таким образом, чтобы мульти-индекс $K' \cup \{i\}$ совпадал с заданным $K \subset I$. Для любой такой пары соответствующий коэффициент $a_{(j_1 \dots j_p, I^q \setminus K' \setminus i)}$ равен $a_{(J, I^q \setminus K)}$. Тогда вклад упорядоченного выше множества в соотношение (6) будет таким:

$$\begin{aligned} a_{(J^p, I^q \setminus K)} (-1)^{p-1} \sum_{i \in K} \operatorname{sgn} \left(\begin{matrix} I^q \\ K \setminus i, I^q \setminus K, i \end{matrix} \right) (-1)^{\#(i; I^q \setminus K)} \frac{\partial h_p}{\partial z_i} \Delta_{K \setminus i} \\ = \operatorname{sgn} \left(\begin{matrix} I^q \\ K, I^q \setminus K \end{matrix} \right) a_{J^p, I^q \setminus K} \Delta_K. \end{aligned}$$

Это завершает доказательство сравнения (5) для $p \geq 1$.

Остается показать, что можно выбрать функцию g таким образом, что $g \neq 0$ на каждой неприводимой компоненте полного пересечения C . Для этого рассмотрим идеал $\mathcal{G}$ кольца $\mathcal{O}_U$, порожденный всеми минорами $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ максимального порядка якобиевой матрицы $\text{Jac}(h_1, \dots, h_k)$. Поскольку дифференциальная форма $dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k$ не обращается тождественно в нуль на каждой неприводимой компоненте полного пересечения C , образ $\tilde{\mathcal{G}}$ идеала $\mathcal{G}$ в кольце $\mathcal{O}_{C,0}$ не равен $\text{Ann } \mathcal{O}_{C,0}$. Поэтому можно использовать теорему 2.4(1) работы [5], из которой вытекает, что $\mathcal{O}_{C,0}$ -глубина идеала $\tilde{\mathcal{G}}$ не меньше единицы. Следовательно, существует элемент $g \in \mathcal{O}_C$ с требуемым в теореме 1 свойством. $\square$

Замечание 2. Нетрудно проверить, что из формулы (5) следует тождество

$$\Delta_{i_1 \dots i_k} \sum_{|I|=q} a_I dz_I = dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k \wedge \left(\sum_{|I'|=q-k} a_{i_1 \dots i_k I'} dz_{I'} \right) + \nu,$$

где $\nu \in \sum_{j=1}^k h_j \Omega_U^{q-k}$. Таким образом, по аналогии со случаем гиперповерхности (см. [13, лемма (2.8)]) максимальные миноры якобиевой матрицы $\text{Jac}(h_1, \dots, h_k)$ могут рассматриваться как *универсальные знаменатели* для полных пересечений.

Следствие 1. Пусть $\omega \in \Omega_X^q(\log D)$ — дифференциальная форма с логарифмическими полюсами вдоль дивизора D и $C = D_1 \cap \dots \cap D_k$ — полное пересечение. Тогда существует разложение (3) с формой $\eta \in \sum_{i=1}^k \Omega_X^\bullet(\log \widehat{D}_i)$.

Доказательство. Поскольку для логарифмической формы ω условия (2) выполнены ввиду предложения 1 из §2, существует разложение (3), в котором $\eta \in \sum_{i=1}^k \Omega_U^q(\widehat{D}_i)$. Рассмотрим случай $k = 2$. Тогда $\eta = \eta_1/h_1 + \eta_2/h_2$, где $\eta_1, \eta_2 \in \Omega_U^q$. После внешнего умножения на dh обеих частей разложения (3) получаем, что форма $dh \wedge \eta$ голоморфна. Кроме того, поскольку

$$dh \wedge \eta = dh \wedge \left(\frac{\eta_1}{h_1} + \frac{\eta_2}{h_2} \right) = dh_2 \wedge \eta_1 + dh_1 \wedge \eta_2 + h_2 \frac{dh_1}{h_1} \wedge \eta_1 + h_1 \frac{dh_2}{h_2} \wedge \eta_2,$$

сумма последних двух слагаемых — также голоморфная форма. Наконец, умножение этих тождеств на общий знаменатель дает включение

$$h_2^2(dh_1 \wedge \eta_1) + h_1^2(dh_2 \wedge \eta_2) \in (h_1 h_2) \Omega_X^\bullet,$$

т. е. $h_2^2 \alpha + h_1^2 \beta = h_1 h_2 \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_X^\bullet$, и поэтому $h_2^2 \alpha + (h_1 \beta - h_2 \gamma) h_1 = 0$. Поскольку (h_1, h_2) — регулярная последовательность, сравнивая коэффициенты соответствующих форм при фиксированном наборе дифференциалов dz_I , получаем, что $\alpha = h_1 \alpha'$, $\alpha' \in \Omega_X^\bullet$. Это означает, что $dh_1 \wedge \eta_1 \in (h_1) \Omega_X^\bullet$, т. е. $\eta_1/h_1 \in \Omega_X^\bullet(\log D_1)$. Такими же рассуждениями можно проверить, что $\eta_2/h_2 \in \Omega_X^\bullet(\log D_2)$. Аналогично разбирается и общий случай $k > 2$. $\square$

Следствие 2. В условиях теоремы 1 разложение (3) имеет место тогда и только тогда, когда существуют аналитические подмножества $A_j \subset D_j$, $j = 1, \dots, k$, коразмерность которых не меньше 2, такие, что росток формы ω в любой точке $x \in \bigcup_{j=1}^k (D_j \setminus A_j)$ принадлежит пространству

$$\frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_k}{h_k} \wedge \Omega_{U,x}^{q-k} + \sum_{i=1}^k \Omega_{U,x}^q(\widehat{D}_i). \quad (7)$$

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно: следует положить $A_j = D_j \cap \{g = 0\}$, $j = 1, \dots, k$, и использовать разложение из теоремы 1.

Обратное утверждение получается такими рассуждениями. Если для мероморфной формы ω существует представление (7), то $h\omega$ голоморфна вне подмножеств $A_i \subset D_i$, $i = 1, \dots, k$, коразмерности, не меньшей 2. Следовательно, по теореме продолжения Римана дифференциальная форма $h\omega$ голоморфна всюду, так что $h_j\omega \in \Omega_U^q(\widehat{D_j})$, $j = 1, \dots, k$. Далее, $dh_j \wedge \omega$ выражается в виде суммы мероморфных форм ω_i , каждая из которых особа не более чем на $k - 1$ компонентах дивизора $\widehat{D_i}$ и на подмножестве $A_i \subset D_i$ коразмерности, не меньшей 2. Снова, применяя теорему продолжения Римана к $(h_1 \cdots \widehat{h_i} \cdots h_k)\omega_i$, получаем, что форма ω_i имеет особенности *только* на $\widehat{D_i}$. В результате получаем, что $dh_j \wedge \omega \in \sum_{i=1}^k \Omega_U^q(\widehat{D_i})$ для всех $j = 1, \dots, k$. $\square$

Замечание 3. Рассмотрим случай $k = 1$, т.е. D — *приводимый* дивизор с несократимым разложением длины единица. Тогда $C = D$ и представление (3) принимает вид

$$g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta, \quad \xi, \eta \in \Omega_U^\bullet. \quad (8)$$

Таким образом, разложение (3) совпадает с представлением (iii) из основной леммы Сайто (см. [13, (1.1)]).

§4. Кратный вычет мероморфных форм

Обсудим теперь понятие *кратного вычета* мероморфных форм, удовлетворяющих условиям §3. Сначала заметим, что функция g из разложения (3) — это *неделитель* нуля в локальном кольце $\mathcal{O}_{X,x}/(h_1, \dots, h_k)\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{C,x}$. Поэтому можно рассмотреть ограничение формы ξ/g на росток полного пересечения $C = D_1 \cap \dots \cap D_k$.

Определение 1. Ограничение дифференциальной формы ξ/g на полное пересечение C называется *формой кратного вычета* или *кратным вычетом* дифференциальной формы ω и обозначается через

$$\text{Res}_C(\omega) = \left. \frac{\xi}{g} \right|_C.$$

Таким образом, дифференциальная форма кратного вычета принадлежит пространству $\mathcal{M}_C \otimes_{\mathcal{O}_C} \Omega_C^{q-k} \cong \mathcal{M}_{\tilde{C}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}} \Omega_{\tilde{C}}^{q-k}$, $q \geq k$, где $\tilde{C}$ — нормализация C , а $\mathcal{M}_C$ и $\mathcal{M}_{\tilde{C}}$ — квазикогерентные пучки мероморфных функций на C и $\tilde{C}$ соответственно.

Предложение 2. Кратный вычет определен корректно, т.е. определяемая им дифференциальная форма не зависит от выбора представления (3).

Доказательство. Предположим, что $q \geq k$ и q -форма ω обладает двумя локальными представлениями

$$g_\ell \omega = \frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_k}{h_k} \wedge \xi_\ell + \eta_\ell, \quad \ell = 1, 2.$$

Тогда $dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k \wedge (g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1) = h_1 \cdots h_k (g_1 \eta_2 - g_2 \eta_1) \in (h_1, \dots, h_k) \Omega_X^q$, так что

$$dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k \wedge (g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1) \equiv 0 \pmod{(h_1, \dots, h_k)}.$$

Из утверждения i) теоремы из статьи [12] (вариант обобщенной леммы де Рама) при $R = \mathcal{O}_{C,x}$, $M = \Omega_{X,x}^1 \otimes \mathcal{O}_{C,x}$, $e_i = z_i$, $i = 1, \dots, m$, $\omega_j = dh_j$, $j = 1, \dots, k$, $p = q - k \geq 0$, следует, что

$$\mathcal{G}^e(g_1\xi_2 - g_2\xi_1) \subset dh_1 \wedge \Omega_{X,x}^{q-k-1} + \dots + dh_k \wedge \Omega_{X,x}^{q-k-1} + (h_1, \dots, h_k)\Omega_{X,x}^{q-k}, \quad e \in \mathbf{Z}_+,$$

где идеал $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_{X,x}$ порождается всеми минорами $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ максимального порядка якобиевой матрицы $\text{Jac}(h_1, \dots, h_k)$. Как и в конце доказательства теоремы 1, заметим, что, поскольку росток C приведен, образ $\mathcal{G}$ идеала $\mathcal{G}$ в кольце $\mathcal{O}_{C,x}$ не равен $\text{Ann } \mathcal{O}_{C,x}$, а потому $\mathcal{O}_{C,x}$ -глубина идеала $\tilde{\mathcal{G}}$ не меньше единицы. Следовательно, найдется элемент $\Delta \in \tilde{\mathcal{G}}$, не делитель нуля в $\mathcal{O}_{C,x}$, такой, что

$$\Delta^e(g_1\xi_2 - g_2\xi_1) \in dh_1 \wedge \Omega_{X,x}^{q-k-1} + \dots + dh_k \wedge \Omega_{X,x}^{q-k-1} + (h_1, \dots, h_k)\Omega_{X,x}^{q-k}.$$

Поэтому класс элемента $\Delta^e(g_1\xi_2 - g_2\xi_1)$ в $\Omega_{C,x}^{q-k}$ равен нулю. Это и означает, что два элемента $\frac{1}{g_1}\xi_1$ и $\frac{1}{g_2}\xi_2$ определяют один и тот же класс в $\mathcal{M}_{C,x} \otimes_{\mathcal{O}_{C,x}} \Omega_{C,x}^{q-k}$. $\square$

Лемма 1. *Ядро отображения кратного вычета Res_C совпадает с пространством $\sum_{i=1}^k \Omega_X^\bullet(\widehat{D}_i)$.*

Доказательство. Очевидно, что ядро содержит указанную сумму. Докажем обратное включение. Итак, пусть $q \geq k$ и $\text{Res}_C(\omega) = 0$ для некоторой q -формы ω . Тогда существует функция g в разложении (3) теоремы 1, такая, что ограничение мероморфной регулярной формы ξ/g на росток пространства C обращается в нуль. Следовательно, $\xi = g(\sum h_i\xi_i + \sum dh_i \wedge \xi'_i)$, где $\xi_i, \xi'_i \in \Omega_X^\bullet$, и

$$h\omega = dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k \wedge \left(\sum h_i\xi_i \right) + \frac{1}{g} \left(\sum h_i\eta_i \right), \quad \eta_i \in \Omega_X^\bullet.$$

Так как $h\omega$ и первое слагаемое в правой части тождества голоморфны, то g делит $\sum h_i\eta_i$ в $\Omega_X^\bullet$, т.е. $g\eta_0 = \sum h_i\eta_i$, $\eta_0 \in \Omega_X^\bullet$. С другой стороны, $(h_1, \dots, h_k)$ — регулярная последовательность, а g — не делитель нуля в локальной алгебре $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_X/(h_1, \dots, h_k)\mathcal{O}_X$. Поэтому, рассматривая коэффициенты голоморфной формы $\sum h_i\eta_i$ при каждом фиксированном наборе дифференциалов dz_I , получаем, что $\eta_0 \in (h_1, \dots, h_k)\Omega_X^\bullet$. Отсюда следует, что $\omega \in \sum_{i=1}^k \Omega_X^\bullet(\widehat{D}_i)$. $\square$

Замечание 4. Если $m = k$, т.е. $\dim C = 0$ и пространство $C \neq C_{\text{red}}$ не приведено, то тождество из замечания 2 справедливо при $\nu = 0$. В частности, из этого следует, что существует представление (3) с функцией g , заданной некоторым элементом одномерного цоколя локальной алгебры $\mathcal{O}_C$. Хорошо известно, что для 0-мерного полного пересечения цоколь порождается над основным полем детерминантом якобиевой матрицы $\text{Jac}(h)$ (см. [15]), поскольку $dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k = \Delta_{i_1 \dots i_k} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m$. Нетрудно понять, что в этом случае кратный вычет старших дифференциальных m -форм совпадает с так называемым многомерным вычетом, который в контексте теории локальной двойственности Гротендика выражается в терминах проекции элементов некоторого конечномерного пространства на этот цоколь (см. [7]). Поэтому, как в формулировке теоремы 1, так и далее, можно предполагать, что $C = C_{\text{red}}$, поскольку неприведенный нульмерный случай хорошо исследован и подробно описан в литературе.

§5. Регулярные мероморфные дифференциальные формы

Пусть X — комплексное многообразие, $\dim X = m \geq 1$, и аналитическое подмножество $Y \subset X$ в окрестности точки $x \in U \subset X$ задается набором функций $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_U$. Обозначим через Ω_Y^q , $q \geq 0$, пучки ростков *регулярных голоморфных* дифференциальных q -форм на Y , которые задаются как ограничение на Y фактормодуля

$$\Omega_U^q / ((f_1, \dots, f_k)\Omega_U^q + df_1 \wedge \Omega_U^{q-1} + \dots + df_k \wedge \Omega_U^{q-1})|_Y.$$

Тогда обычный дифференциал d наделяет это семейство пучков структурой комплекса, который называется комплексом де Рама на Y и обозначается через $(\Omega_Y^\bullet, d)$.

В этом параграфе будем предполагать, что Y — пространство Коэна–Маколея и $\dim Y = n$. Напомним, что $\mathcal{O}_Y$ -модуль

$$\omega_Y^n = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{m-n}(\mathcal{O}_Y, \Omega_X^m)$$

называется *дуализирующим модулем* Гротендика пространства Y .

Определение 2. Когерентный пучок $\mathcal{O}_Y$ -модулей ω_Y^q , $q \geq 0$, локально задается как множество ростков мероморфных форм ω степени q на Y , таких, что $\omega \wedge \eta \in \omega_Y^n$ для любой $\eta \in \Omega_Y^{n-q}$. Другими словами (см. [4]),

$$\omega_Y^q \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\Omega_Y^{n-q}, \omega_Y^n) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^{m-n}(\Omega_Y^{n-q}, \Omega_X^m).$$

Элементы из ω_Y^q называются *регулярными мероморфными* дифференциальными формами степени q на Y . Известны и другие способы описания таких форм: в терминах нормализации Нётер и следа (см. [10], [4]), в терминах вычетных потоков (см. [2]) и т. д.

Вот некоторые полезные свойства регулярных мероморфных дифференциальных форм:

- 1) $\omega_Y^q = 0$, если $q < 0$ или $q > \dim Y$;
- 2) ω_Y^q не имеет кручения, т. е. $\text{Tors } \omega_Y^q = 0$, $q \geq 0$;
- 3) дифференциал де Рама d , действующий на Ω_Y^q , продолжается на семейство модулей ω_Y^q , $0 \leq q \leq n$, и наделяет это семейство структурой комплекса $(\omega_Y^\bullet, d)$;
- 4) существуют вложения $\omega_Y^q \subseteq j_* j^* \Omega_Y^q$, $q \geq 0$, где $j: Y \setminus Z \rightarrow Y$ — каноническое вложение и $Z = \text{Sing } Y$, причем, если Y — *нормальное* пространство, то $\omega_Y^q \cong j_* j^* \Omega_Y^q$;
- 5) если $\pi: \tilde{Y} \rightarrow Y$ — (конечный) морфизм *нормализации* ростка пространства Y , то отображение прямого образа $\pi_*: \omega_{\tilde{Y}}^\bullet \rightarrow \omega_Y^\bullet$ инъективно; если к тому же росток нормализации гладкий и коразмерность множества точек, в окрестности которых π — локальный изоморфизм, не меньше двух, то отображение π_* — эпиморфизм (см. [4]), и это означает, что $\omega_{\tilde{Y}}^\bullet$ и $\omega_Y^\bullet$ изоморфны и, в частности, $\omega_Y^\bullet \cong \Omega_Y^\bullet$;

6) если Y — простая рациональная особенность типа A_k , D_k , E_6 , E_7 или E_8 , то комплекс $(\omega_Y^\bullet, d)$ *ацикличесен* в положительных размерностях (см. [9, замечание (4.8)(2)]), т. е. $\omega_Y^\bullet$ — это *резольвента* постоянного пучка $\mathbb{C}_Y$.

Предположим теперь, что $Y = C$ — *полное пересечение*, которое в окрестности U точки $x \in C$ задается *регулярной* последовательностью функций $f_1, \dots, f_k$

$\in \mathcal{O}_U$. Тогда $n = m - k$ и

$$\omega_{C,x}^n = \text{Ext}_{\mathcal{O}_{X,x}}^k(\mathcal{O}_{C,x}, \Omega_{X,x}^m) \cong \mathcal{O}_{C,x}(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m / df_1 \wedge \cdots \wedge df_k).$$

Таким образом, дуализирующий модуль Гротендика ω_C^n — локально свободный $\mathcal{O}_C$ -модуль ранга единица. Кроме того, существуют изоморфизмы $\mathcal{O}_X$ -модулей

$$\omega_C^q \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\Omega_C^{n-q}, \mathcal{O}_C) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^k(\Omega_C^{n-q}, \mathcal{O}_X), \quad 0 \leq q \leq n.$$

§6. Кратный вычет и логарифмические формы

Как уже отмечалось (ср. следствие 1), для логарифмических форм с полюсами вдоль дивизора, удовлетворяющего предположениям из §3, существует разложение (3) и, следовательно, корректно определено ограничение кратного вычета Res_C на соответствующее подпространство мероморфных дифференциальных форм.

Лемма 2. В условиях §3 пусть $\omega \in \Omega_X^q(\log D)$ — дифференциальная форма с логарифмическими полюсами вдоль гиперповерхности D и $C = D_1 \cap \cdots \cap D_k$ — полное пересечение. Тогда отображение кратного вычета совместимо с действием дифференциала де Рама.

Доказательство. Применим оператор дифференцирования d к представлению (3) формы ω :

$$\omega = \frac{dh_1}{h_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dh_k}{h_k} \wedge \frac{\xi}{g} + \frac{\eta}{g}.$$

Тогда форма $\text{Res}_C(d\omega)$ и ограничение дифференциала $d(g^{-1}\xi)$ на C равны (с точностью до знака). $\square$

Утверждение следующей теоремы в случае $k = 1$ получено в работе [1].

Теорема 2. В условиях теоремы 1 пусть $C = D_1 \cap \cdots \cap D_k$ — приведенное полное пересечение. Тогда при $p \geq k$ существует точная последовательность $\mathcal{O}_X$ -модулей

$$0 \longrightarrow \sum_{i=1}^k \Omega_X^p(\log \widehat{D}_i) \longrightarrow \Omega_X^p(\log D) \xrightarrow{\text{Res}_C} \omega_C^{p-k} \longrightarrow 0.$$

Доказательство. Сначала вычислим ядро ограничения морфизма кратного вычета Res_C на $\Omega_X^\bullet(\log D)$. Ввиду утверждения 3 из §2 и леммы 1 из §4 для этого достаточно проверить, что

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \cap \Omega_X^\bullet(\widehat{D}_j) = \Omega_X^\bullet(\log \widehat{D}_j)$$

для всех $j = 1, \dots, k$. Поскольку $\Omega_X^\bullet(\log \widehat{D}_j) \subseteq \Omega_X^\bullet(\log D)$, правая часть содержится в левой. Для доказательства обратного включения разберем подробно случай $k = 2$. Итак, пусть $\omega \in \Omega_X^\bullet(\widehat{D}_1) = \Omega_X^\bullet(D_2) \cong \frac{1}{h_2} \Omega_X^\bullet$, т.е. $\omega = \xi/h_2$. Если $\omega \in \Omega_X^\bullet(\log D)$, то $h\omega = h_1\xi \in \Omega_X^\bullet$ и

$$dh \wedge \omega = dh_1 \wedge \xi + dh_2 \wedge (h_1\omega) \in \Omega_X^\bullet.$$

Отсюда следует, что $dh_2 \wedge (h_1\omega) \in \Omega_X^\bullet$, т.е. $dh_2 \wedge (h_1\xi) \in (h_2)\Omega_X^\bullet$. Поэтому $h_1dh_2 \wedge \xi = h_2\eta$, где $\eta \in \Omega_X^\bullet$. Так как h_1, h_2 — регулярная последовательность, то, сравнивая коэффициенты форм $dh_2 \wedge \xi$ и η , получаем, что h_1 делит η и, следовательно, $dh_2 \wedge \xi \in (h_2)\Omega_X^\bullet$, $dh_2 \wedge \omega \in \Omega_X^\bullet$, т.е. $\omega \in \Omega_X^\bullet(D_2) = \Omega_X^\bullet(\widehat{D}_1)$.

Это и требовалось установить. Общий случай $k \geq 2$ разбирается аналогично. Теперь для описания образа морфизма Res_C нужно почти дословно повторить рассуждения из [1, §4] в случае $k = 1$, следуя доказательству теоремы из работы [2]. $\square$

Замечание 5. В обозначениях замечания 3 пусть $k = 1$ и $C = D$. Тогда $\text{Res}_C = \text{Res}_D$ — это отображение вычета, которое описано в [13] и которое обозначается там через res . Далее, в этом случае существуют точные последовательности (см. [1])

$$0 \longrightarrow \Omega_X^q \longrightarrow \Omega_X^q(\log D) \xrightarrow{\text{Res}_D} \omega_D^{q-1} \longrightarrow 0, \quad q \geq 1, \quad (9)$$

пополняющие справа диаграмму (2.5) из работы [13]. Таким образом, в теореме 2 получены аналогичные последовательности для отображения *кратного* вычета.

Следствие 3. *При тех же предположениях существует естественный изоморфизм*

$$\mathcal{H}_{DR}^p(\Omega_X^\bullet(\log D)) \cong \mathcal{H}_{DR}^{p-1}(\omega_D^\bullet),$$

где $\mathcal{H}_{DR}^*$ — функтор когомологий комплексов с дифференциалом де Рама d . В частности, $\Omega_X^\bullet(\log D)$ ацикличен в размерностях $p > 1$, если D — простая рациональная особенность типа A_k , D_k , E_6 , E_7 или E_8 размерности $n \geq 2$.

Доказательство. Поскольку отображение вычета совместимо с дифференциалом d , последовательности (9) индуцируют точную последовательность соответствующих комплексов. Отсюда получаются требуемые изоморфизмы. Далее, как уже отмечалось в §5 (см. свойство 6)), для рациональных особенностей указанных типов комплекс $(\omega_D^\bullet, d)$ ацикличен в положительных размерностях; это дает вторую часть утверждения. Кроме того, так как размерность пространства $\mathcal{H}_{DR}^0(\omega_D^\bullet)$ равна числу неприводимых компонент дивизора D (см. [9, (4.1)]), то $\mathcal{H}_{DR}^1(\Omega_X^\bullet(\log D)) \cong \mathbb{C}$ при $n \geq 2$. Для полноты отметим, что утверждения следствия можно получить и непосредственно с помощью вычислений (см. [8]). $\square$

В заключение этого параграфа рассмотрим важный пример, когда образ кратного вычета порождается *голоморфными* формами. Обозначим через $\Omega_X^p \langle D \rangle \subseteq \Omega_X^p(\log D)$ пространство логарифмических p -форм *главного типа*, так что

$$\Omega_X^p \langle D \rangle = \bigwedge^p \left\langle \frac{dh_1}{h_1}, \dots, \frac{dh_k}{h_k}, dz_1, \dots, dz_m \right\rangle.$$

Легко видеть, что семейство $\Omega_X^p \langle D \rangle$, $p \geq 0$, образует *подкомплекс* $\Omega_X^\bullet \langle D \rangle$ логарифмического комплекса де Рама $\Omega_X^\bullet(\log D)$, замкнутый относительно внешнего дифференцирования и внешнего умножения на dh_i/h_i , $1 \leq i \leq k$. Далее, в разложении из теоремы 1 для любой формы $\omega \in \Omega_X^p \langle D \rangle$, $p \geq k$, можно в качестве функции g выбрать подходящий *обратимый* элемент. Поэтому кратный вычет такой формы *голоморфен*, т. е. $\text{Res}_C(\omega) \in \Omega_C^{p-k}$. Аналогично, если дивизор D таков, что для некоторого $p \geq k$ существует изоморфизм $\Omega_X^p \langle D \rangle \cong \Omega_X^p(\log D)$, то в этом случае образ отображения кратного вычета порождается голоморфными формами степени $p - k$. Такие дивизоры (с некоторыми дополнительными условиями на пересечения компонент) используются при изучении когомологий «скрученного» комплекса де Рама (см. [11]).

§7. Весовая фильтрация

Перейдем теперь к описанию весовой фильтрации на логарифмическом комплексе де Рама для дивизоров, неприводимые компоненты которых локально задаются *регулярной* последовательностью голоморфных функций.

Пусть X — аналитическое многообразие, $D \subset X$ — *приведенный* дивизор и $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ — его разложение на неприводимые компоненты. Простоты ради будем также считать, что D_i , $i = 1, \dots, k$, не имеют *самопересечений*. Для произвольного упорядоченного набора $I = (i_1 \dots i_n)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq k$, длины $n = \#(I)$ рассмотрим следующие ростки:

$$D_I = D_{(i_1 \dots i_n)} = D_{i_1} \cup \dots \cup D_{i_n}, \quad C^I = C^{(i_1 \dots i_n)} = D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_n}.$$

Обозначим через $C^{(n)}$ росток аналитического подпространства многообразия X , заданный объединениями ростков $C^{(i_1 \dots i_n)}$ по всем допустимым наборам, так что $C^{(1)} = D$, $C^{(k)} = C^{(i_1 \dots i_k)} = C$ и т.д. Кроме того, удобно полагать $D_0 = C^0 = \emptyset$.

Определение 3. *Весовая фильтрация*, или *фильтрация весов*, W на логарифмическом комплексе де Рама $\Omega_X^\bullet(\log D)$ локально задается следующим образом:

$$W_n(\Omega_{X,x}^p(\log D)) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \Omega_{X,x}^p, & n = 0, \\ \sum_{\#(I)=p} \Omega_{X,x}^p(\log D_I), & n \geq p, \quad 0 < p < k_x, \\ \sum_{\#(I)=n} \Omega_{X,x}^p(\log D_I), & \text{в оставшихся случаях,} \end{cases}$$

где через k_x обозначается число неприводимых компонент дивизора D , проходящих через точку $x \in X$. Например, первые нетривиальные элементы весовой фильтрации при $k = 3$ можно представить в виде такой таблицы:

W_0	Ω_X^1	Ω_X^2	Ω_X^3	Ω_X^4
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
W_1	$\sum \Omega_X^1(\log D_i)$	$\sum \Omega_X^2(\log D_i)$	$\sum \Omega_X^3(\log D_i)$	$\sum \Omega_X^4(\log D_i)$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
W_2	$\sum \Omega_X^1(\log D_i)$	$\sum \Omega_X^2(\log(D_i \cup D_j))$	$\sum \Omega_X^3(\log(D_i \cup D_j))$	$\sum \Omega_X^4(\log(D_i \cup D_j))$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
W_3	$\sum \Omega_X^1(\log D_i)$	$\sum \Omega_X^2(\log(D_i \cup D_j))$	$\sum \Omega_X^3(\log D)$	$\sum \Omega_X^4(\log D)$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Таким образом, $W_n(\Omega_{X,x}^p(\log D)) = \Omega_{X,x}^p(\log D)$, если $n \geq p \geq k_x$. Далее, W — возрастающая фильтрация и ввиду d - и $\wedge$ -замкнутости внешней алгебры $\Omega_X^\bullet(\log D)$ для всех целых p, q, n, ℓ существуют естественные вложения

$$d(W_n(\Omega_X^\bullet(\log D))) \subset W_n(\Omega_X^\bullet(\log D)),$$

$$W_n(\Omega_X^p(\log D)) \wedge W_\ell(\Omega_X^q(\log D)) \subset W_{n+\ell}(\Omega_X^{p+q}(\log D)).$$

Отметим, что при $n \leq p$ пространство $W_n(\Omega_{X,x}^p(\log D))$ содержит все дифференциальные формы вида

$$\frac{dh_{i_1}}{h_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dh_{i_\ell}}{h_{i_\ell}} \wedge \Omega_{X,x}^{p-\ell}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k, \quad 1 \leq \ell \leq n,$$

где $h_{i_1}, \dots, h_{i_\ell}$ — локальные уравнения компонент дивизора D , содержащих точку $x \in X$. Кроме того,

$$\Omega_{X,x}^n \langle D \rangle \wedge \Omega_{X,x}^{p-n} \subseteq W_n(\Omega_{X,x}^p(\log D)) \subseteq \Omega_{X,x}^n(\log D) \wedge \Omega_{X,x}^{p-n}, \quad n \in \mathbb{Z}, p \geq n.$$

В случае дивизора с нормальными пересечениями $\Omega_X^\bullet \langle D \rangle = \Omega_X^\bullet(\log D)$. Поэтому оба включения в последней формуле превращаются в равенства, а весовая фильтрация на комплексе $\Omega_X^\bullet \langle D \rangle$ задается так:

$$W_n(\Omega_X^p \langle D \rangle) = \Omega_X^n \langle D \rangle \wedge \Omega_X^{p-n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Следующее утверждение можно рассматривать как обобщение изоморфизма (3.1.5.2) из работы [6] для дивизора с нормальными пересечениями на случай дивизора, компоненты которого задаются *регулярной* последовательностью функций.

Пусть $\pi: \tilde{C}^{(n)} \rightarrow C^{(n)}$ — морфизм нормализации, так что $\tilde{C}^{(n)}$ — это несвязная сумма нормализаций $\tilde{C}^{(i_1 \dots i_n)}$ для всех наборов длины $n \geq 1$. Обозначим через ι проекцию $\tilde{C}^{(n)}$ в X , так что $\iota = i \circ \pi$, где $i: C^{(n)} \rightarrow X$ — естественное вложение.

Теорема 3. *Предположим, что дивизор D удовлетворяет условиям теоремы 1 и морфизм нормализации индуцирует изоморфизм комплексов*

$$\pi_*: \omega_{\tilde{C}^{(n)}}^\bullet \cong \omega_{C^{(n)}}^\bullet.$$

Тогда отображение кратного вычета

$$\text{Res}_n^\bullet: W_n(\Omega_X^\bullet(\log D)) \longrightarrow \iota_* \omega_{\tilde{C}^{(n)}}^\bullet[-n],$$

индуцирует изоморфизм комплексов $\mathcal{O}_X$ -модулей

$$\text{Gr}_n^W(\Omega_X^\bullet(\log D)) \cong \iota_* \omega_{\tilde{C}^{(n)}}^\bullet[-n].$$

Доказательство. Сначала отметим, что морфизм нормализации индуцирует изоморфизм π_* , если выполнены условия 5) из §5. Далее, наше утверждение достаточно доказать локально, для ростка (X, x) и для всех $n \leq p$. Для любого упорядоченного набора $I = (i_1 \dots i_n)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq k$, согласно теореме 2, при $D = D_I$ существует точная последовательность комплексов $\mathcal{O}_{X,x}$ -модулей

$$0 \longrightarrow \sum_{\ell=1}^n \Omega_{X,x}^n(\log(\widehat{D_I})_{i_\ell}) \longrightarrow \Omega_{X,x}^\bullet(\log D_I) \xrightarrow{\text{Res}_{C^I}} \omega_{C^I,x}^\bullet[-n] \longrightarrow 0.$$

Из основных свойств регулярных мероморфных дифференциальных форм следует, что $\omega_{\tilde{C}^{(n)}}^\bullet$ изоморфен прямой сумме комплексов $\omega_{\tilde{C}^I}^\bullet$ по всем допустимым наборам $I = (i_1 \dots i_n)$. Далее, любая форма $\omega \in W_n(\Omega_X^\bullet(\log D))$ разлагается в сумму элементов $\omega_I \in \Omega_X^\bullet(\log D_I)$. Определим $\text{Res}_{C^{(n)}}(\omega)$ как сумму вычетов $\text{Res}_{C^I}(\omega_I)$. В итоге получаем точную последовательность $\mathcal{O}_X$ -модулей

$$0 \longrightarrow W_{n-1}(\Omega_X^\bullet(\log D)) \longrightarrow W_n(\Omega_X^\bullet(\log D)) \xrightarrow{\text{Res}_{C^{(n)}}} \iota_* \omega_{\tilde{C}^{(n)}}^\bullet[-n] \longrightarrow 0.$$

Отсюда теперь следует и существование изоморфизмов теоремы 3. □

Следствие 4. *В условиях теоремы 3 существуют естественные изоморфизмы пространств когомологий*

$$\mathcal{H}^i(\text{Gr}_n^W(\Omega_X^\bullet(\log D))) \cong \mathcal{H}^i(\omega_{\tilde{C}^{(n)}}^\bullet)[-n]$$

при $i \geq 1$ и $1 \leq n \leq k$.

Доказательство. Так как нормализация π — конечный, а потому и *аффинный* морфизм, то

$$\mathcal{H}^i(\pi_* \omega_{\tilde{C}(n)}^\bullet) \cong \mathcal{H}^i(\omega_{\tilde{C}(n)}^\bullet), \quad i \geq 1,$$

и нужное утверждение следует из предыдущей теоремы. $\square$

Замечание 6. Анализируя общий случай, когда комплексы $\omega_{\tilde{C}(n)}^\bullet$ и $\omega_{C(n)}^\bullet$ не изоморфны, в формулировке теоремы 3 соответствующие отображения следует заменить на эпиморфизмы.

Замечание 7. Пусть на многообразии X действует (конечная) группа G . Тогда нетрудно показать, что отображение вычета Res_C *совместимо* с действием этой группы в обычном смысле. В этом случае комплекс пучков регулярных мероморфных форм $\omega_{X/G}^\bullet$ на фактормногообразии X/G является *резольвентой* постоянного пучка [9]. Пользуясь простейшими свойствами пучков $\Omega_X^p(\log D)$, ω_C^q и соответствующих подпучков, инвариантных относительно действия группы G , получаем изоморфизм леммы (1.19) из работы [14] для дивизоров с нормальными пересечениями на V -многообразии.

Рассмотрим теперь одно приложение. Каноническая *убывающая* фильтрация Ходжа F на логарифмическом комплексе де Рама $\Omega_X^\bullet(\log D)$ определяется следующим образом:

$$F^n(\Omega_X^p(\log D)) = \begin{cases} \Omega_X^p(\log D), & n \leq p, \\ 0, & n > p. \end{cases}$$

Предположим теперь, что естественные вложения

$$\sum_{\#(I)=p} \Omega_{X,x}^p(\log D_I) \longrightarrow \Omega_{X,x}^p(\log D) \quad (10)$$

— изоморфизмы для всех $1 \leq p < k_x$. Тогда $W_n(\Omega_X^p(\log D)) \cong \Omega_X^p(\log D)$ для всех $n \geq p$, как и в классическом случае дивизоров с нормальными пересечениями (см. (3.1.8) в [6]). Следовательно, в условиях теоремы 3 определен естественный морфизм α из комплекса $\Omega_X^\bullet(\log D)$, снабженного фильтрацией Ходжа F , в тот же комплекс с *убывающей* фильтрацией W , заданной формулой $W^n = W_{-n}$.

Следствие 5. При тех же предположениях упомянутый выше морфизм α — *фильтрованный квазиизоморфизм*, если $\mathcal{H}^i(\omega_{\tilde{C}(n)}^\bullet) = 0$ при $i \neq 0$.

Доказательство такое же, как и в (3.1.8.2) работы [loc. cit.]

Замечание 8. Конечно, для дивизоров с нормальными пересечениями вложения (10) — изоморфизмы для всех $p \geq 1$. Класс дивизоров, для которых $\sum_{i=1}^k \Omega_{X,x}^1(\log D_i) \cong \Omega_{X,x}^1(\log D)$, рассматривается в теореме (2.9) работы [13] (ср. § 2).

Замечание 9. Условия из следствия 5 об обращении в нуль когомологий означают, что комплекс регулярных мероморфных форм на нормализации $\tilde{C}(n)$ *ацикличесок* в положительных размерностях. Наряду со случаем дивизора с нормальными пересечениями, рассмотренного в [6], известно немало типов многообразий, когда это условие выполнено. Среди них — рациональные нормальные

полные пересечения, факторособенности гладких многообразий с действием конечной группы (см. [9]), торические многообразия, некоторые типы квазиоднородных (строго квазиоднородных) многообразий и др.

Замечание 10. Если оба комплекса $\Omega_X^\bullet(\log D)$ и $\Omega_X^\bullet(\star D)$, наделенные стандартной фильтрацией Ходжа, квазиизоморфны (см., например, [8]), то морфизм β из предложения (3.1.8) работы [6] — квазиизоморфизм. Если вдобавок выполнено условие предыдущего следствия, то α — также квазиизоморфизм. Это означает, что во всех случаях, перечисленных в предыдущем замечании, существуют изоморфизмы (3.1.8.2) из работы [loc. cit.]:

$$R^n j_* \mathbf{C} \cong \mathcal{H}^n(j_* \Omega_{X^*}^\bullet) \cong \mathcal{H}^n(\Omega_X^\bullet(\log D)),$$

где X — некоторое многообразие, $X^* = X \setminus D$, $j: X^* \rightarrow X$ — каноническое вложение.

Дальнейший анализ показывает, что при одном из стандартных предположений на объемлющее многообразие X (гладкость, кэлеровость, полнота и др.) бифильтрованный комплекс $(\Omega_X^\bullet(\log D), F, W)$ можно использовать (см. [14, с. 532]) для вычисления канонической смешанной структуры Ходжа на когомологиях дополнения $H^*(X \setminus D, \mathbb{C})$ и на локальных когомологиях $H_C^*(X, \Omega_X^\bullet(\log D))$ без использования теорем о разрешении особенностей и стандартной редукции к случаю нормальных пересечений.

В заключение отметим, что дифференциал d строго совместим [6, (1.1.5)] в степени $k+1$ с весовой фильтрацией W , т.е.

$$d\Omega_X^k(\log D) \cap W_n(\Omega_X^{k+1}(\log D)) = d(W_n(\Omega_X^k(\log D))), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тем самым определена весовая фильтрация на усеченном логарифмическом комплексе де Рама $\tau_{\geq k} \Omega_X^\bullet(\log D)$, которая с помощью отображения кратного вычета индуцирует весовую фильтрацию на комплексе регулярных мероморфных форм *полного пересечения*, причем в этом случае выполнения условий (10) уже не требуется.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. G. Aleksandrov, *Non-isolated hypersurface singularities*, in: Theory of Singularities and Its Applications, Advances in Soviet Mathematics, vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 211–246.
- [2] A. G. Aleksandrov, A. K. Tsikh, *Théorie des résidus de Leray et formes de Barlet sur une intersection complète singulière*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **333**:11 (2001), 973–978.
- [3] A. G. Aleksandrov, A. K. Tsikh, *Multi-logarithmic differential forms on complete intersections*, Ж. Сибирск. федерального ун-та, сер. матем., физ. (изд-во СФУ, Красноярск), **1**:2 (2008), 105–124.
- [4] D. Barlet, *Le faisceau $\omega_X^\bullet$ sur un espace analytique X de dimension pure*, Lecture Notes in Math., vol. 670, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [5] D. A. Buchsbaum, D. S. Rim, *A generalized Koszul complex. II. Depth and multiplicity*, Trans. Amer. Math. Soc., **111** (1964), 197–224.
- [6] П. Делинь, *Теория Ходжа II*, Математика (сб. пер.), **17**:5 (1973), 3–56.
- [7] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии*, т. 2, Мир, М., 1982.
- [8] M. P. Holland, D. Mond, *Logarithmic differential forms and the cohomology of the complement of a divisor*, Math. Scand., **83**:2 (1998), 235–254.

- [9] M. Kersken, *Reguläre Differentialformen*, Manuscripta Math., **46**:1 (1984), 1–25.
- [10] E. Kunz, *Holomorphe Differentialformen auf algebraischen Varietäten mit Singularitäten. I*, Manuscripta Math., **15** (1975), 91–108.
- [11] K. Morita, *On the basis of twisted de Rham cohomology*, Hokkaido Math. J., **27**:3 (1998), 567–603.
- [12] K. Saito, *On a generalization of de-Rham lemma*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **26**:2 (1976), 165–170.
- [13] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, ser. IA, **27**:2 (1980), 265–291.
- [14] J. H. M. Steenbrink, *Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology*, in: Real and Complex Singularities (Proc. Nordic Summer School, Symp. Math., Oslo, 1976), Sijthoff and Noordhoff Publ., Alphen aan den Rijn, 1977.
- [15] H. Wiebe, *Über homologische Invarianten lokaler Ringe*, Math. Ann., **179**:4 (1969), 257–274.

Институт проблем управления РАН
e-mail: ag_aleksandrov@mail.ru

Поступило в редакцию
28 декабря 2011 г.