Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Перепечко, Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 4, 45–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:07:47

УДК 512.745.4

Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5*

© 2013. А. Ю. ПЕРЕПЕЧКО

В работе доказана бесконечная транзитивность действия группы специальных автоморфизмов аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5.

1. Введение

Аффинное алгебраическое многообразие X , определенное над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, называется *гибким*, если касательное пространство к X в произвольной гладкой точке порождается касательными векторами к орбитам действия однопараметрических унитарных групп [3]. В этой работе мы установим гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5.

Известно, что каждому действию одномерной унитарной группы $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(\mathbb{K})$ на X соответствует локально нильпотентное дифференцирование $\delta \in \text{LND}(\mathbb{K}[X])$ алгебры регулярных функций на X . Все такие действия порождают подгруппу *специальных автоморфизмов* $\text{SAut } X \subset \text{Aut } X$.

Говорят, что группа G действует на множестве X *бесконечно транзитивно*, если для любого $m \in \mathbb{N}$ она действует транзитивно на множестве упорядоченных наборов из m попарно различных точек множества X .

Следующая теорема объясняет значение условия гибкости.

Теорема 1 [3, теорема 0.1]. Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие размерности ≥ 2 . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) многообразие X является гибким;
- (2) группа $\text{SAut } X$ действует транзитивно на множестве гладких точек X_{reg} ;
- (3) группа $\text{SAut } X$ действует бесконечно транзитивно на X_{reg} .

В [4] описаны три класса гибких аффинных многообразий, а именно аффинные конусы над многообразиями флагов, невырожденные торические многообразия размерности ≥ 2 и надстройки над гибкими многообразиями. Заметим, что аффинные конусы над поверхностями дель Пеццо степени ≥ 6 являются торическими, а значит, гибкими многообразиями.

В данной работе мы рассматриваем случаи степени 4 и 5. Для степени 5 мы доказываем гибкость аффинных конусов, соответствующих поляризациям по любым очень обильным дивизорам, а для степени 4 — по некоторым, в том числе по антиканоническому дивизору. Как показано соответственно в [5, теорема

*Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (соглашение №8214) и РФФИ (гранты №12-01-00704 и №12-01-31342мол_а).

1.1] и в [8, следствие 1.8], аффинные конусы над антиканоническим вложением поверхностей дель Педро степени 3 и конусы над плюриантканоническим вложением для степени ≤ 2 не обладают ни одним $\mathbb{G}_a$ -действием.

В доказательстве мы используем конструкцию из [7], которая по каждому открытому цилиндрическому подмножеству некоторого специального вида в проективном многообразии Y позволяет построить регулярное действие группы $\mathbb{G}_a$ на аффинном конусе над Y . В терминах трансверсального покрытия такими подмножествами в теореме 5 получено достаточное условие гибкости аффинного конуса над проективным многообразием, применяемое впоследствии к поверхностям дель Педро.

Автор благодарен М. Г. Зайденбергу за постановку задачи и многочисленные обсуждения, И. В. Аржанцеву за ценные замечания и рецензенту за исправление ряда неточностей.

2. Гибкость аффинных конусов

Пусть Y — проективное многообразие, а H — очень обильный дивизор на Y . Поляризация многообразия Y по H задает вложение $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$. Рассмотрим аффинный конус $X = \text{AffCone}_H Y \subset \mathbb{A}^{n+1}$ с вершиной в начале координат $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$, отвечающий этому вложению. На нем имеется естественное действие гомотетиями мультипликативной группы $\mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m(\mathbb{K})$ поля $\mathbb{K}$. Оно задает градуировку алгебры $\mathbb{K}[X]$. Дифференцирование на $\mathbb{K}[X]$ называется *однородным*, если оно переводит однородные элементы в однородные. Подмножество однородных локально нильпотентных дифференцирований обозначают через $\text{HLND}(\mathbb{K}[X])$.

Определение 2 [7, определения 3.1.4, 3.1.7]. Будем говорить, что открытое подмножество U многообразия Y является *цилиндром*, если $U \cong Z \times \mathbb{A}^1$, где Z — гладкое многообразие и $\text{Pic } Z = 0$. Пусть теперь дан дивизор $H \subset Y$. Цилиндр U будем называть *H -полярным*, если $U = Y \setminus \text{supp } D$ для некоторого эффективного дивизора $D \in |dH|$, где $d > 0$.

Определение 3. Подмножество $W \subset Y$ будем называть *инвариантным* относительно цилиндра $U = Z \times \mathbb{A}^1$, если $W \cap U = \pi_1^{-1}(\pi_1(W))$, где $\pi_1: U \rightarrow Z$ — проекция на первую компоненту прямого произведения. Иначе говоря, каждый $\mathbb{A}^1$ -слой цилиндра либо содержится в W , либо не пересекается с W .

Определение 4. Будем говорить, что многообразие Y покрывается *трансверсально* цилиндрами U_i , $i = 1, \dots, s$, если $\bigcup U_i = Y$ и не существует собственного подмножества $W \subset Y$, инвариантного относительно всех U_i .

Ясно, что каждый цилиндр U_i является гладким. Значит, особое многообразие Y не допускает трансверсального покрытия цилиндрами. Ясно также, что $\dim Y \geq 1$. В следующей теореме мы даем достаточное условие гибкости аффинного конуса над проективным вложением $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, отвечающим поляризации H .

Теорема 5. *Предположим, что для некоторого очень обильного дивизора H на гладком проективном многообразии Y существует трансверсальное покрытие H -полярными цилиндрами. Тогда аффинный конус $X = \text{AffCone}_H Y$ является гибким.*

Доказательство. Утверждение очевидно для $X = \mathbb{A}^{n+1}$. Поэтому мы можем считать, что вершина конуса является его единственной особой точкой.

Согласно [7, теорема 3.1.9], каждому цилиндру покрытия Y соответствует однородное $\mathbb{G}_a$ -действие на X . Из явного построения в [7, предложение 3.1.5] видно, что орбиты этого действия при проекции $\pi: X^\times = X \setminus \{0\} \rightarrow Y$ переходят в слои цилиндра на Y , а множество неподвижных точек на X — это прообраз дополнения к цилиндру.

Пусть $G \subset \text{SAut } X$ — подгруппа, порожденная соответствующими $\mathbb{G}_a$ -действиями. Рассмотрим орбиту Gx некоторой точки $x \in X^\times$. Ее образ $\pi(Gx) \subset Y$ будет подмножеством, инвариантным относительно всех цилиндров покрытия. Из условия трансверсальности получаем $\pi(Gx) = Y$. Поскольку группа G порождена однородными действиями, естественное $\mathbb{G}_m$ -действие на X гомотетиями нормализует действие $G: X$ и переводит G -орбиты в G -орбиты. А значит, $X^\times$ является объединением G -орбит, проекция каждой из которых совпадает со всем Y . Следовательно, $X^\times = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{G}_m} \lambda Gx$, где все G -орбиты замкнуты в $X^\times$.

Покажем, что на самом деле имеется одна открытая G -орбита $Gx = X^\times$. Предположим противное. В таком случае $\dim Gx = \dim Y$ и стабилизатор $S \subset \mathbb{G}_m$ орбиты Gx конечен. Более того, поскольку действие $S: Gx$ свободно, для любой точки $x' \in Gx$ пересечение $Gx \cap \mathbb{G}_m x'$ есть S -орбита, состоящая из $|S|$ различных точек. Раздутие конуса X в вершине является тотальным пространством линейного расслоения $[-H]$ на Y . Оно естественным образом пополняется до $\mathbb{P}^1$ -расслоения $\hat{X} \rightarrow Y$. Для общей точки $x' \in Gx$ пересечение $\overline{Gx} \cap \overline{\mathbb{G}_m x'}$, где $\overline{Z}$ обозначает замыкание $Z \subset X^\times$ в $\hat{X}$, совпадает с орбитой Sx . Значит, индекс пересечения $\overline{Gx} \cdot \overline{\mathbb{G}_m x'}$ равен $|S|$. Поскольку индекс пересечения постоянен, для любой точки $x' \in Gx$ имеем $\overline{Gx} \cap \overline{\mathbb{G}_m x'} = Sx' \subset X^\times$. Таким образом, квазиаффинное многообразие $X^\times$ содержит проективное $\overline{Gx}$. Противоречие. Значит, группа G действует на $X^\times$ транзитивно. $\square$

§3. Поверхность дель Педро степени 5

Пусть Y — поверхность дель Педро степени 5. Она получается раздутием четырех точек $P_1, \dots, P_4$ на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, никакие три из которых не лежат на одной прямой [1, теорема IV.2.5]. Поскольку автоморфизмы проективной плоскости действуют транзитивно на таких четверках точек, поверхность единственна с точностью до изоморфизма.

Теорема 6. Пусть H — произвольный очень обильный дивизор на поверхности дель Педро Y степени 5. Тогда аффинный конус $\text{AffCone}_H Y$, отвечающий H , является гибким.

Доказательство проводится в несколько этапов, см. пп. 3.1 и 3.2. Через E_i будем обозначать исключительные дивизоры — прообразы точек раздутия P_i . Пусть e_0 — класс дивизоров, эквивалентных прямой, не проходящей через точки раздутия, а e_i ($i = 1, \dots, 4$) — класс дивизоров, эквивалентных E_i . Эти классы порождают группу Пикара $\text{Pic } Y = \langle e_0, \dots, e_4 \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^5$. Индекс пересечения определяет симметричную билинейную форму на группе Пикара, причем набор $\{e_0, \dots, e_4\}$ является ортогональным базисом с $e_0^2 = 1, e_i^2 = -1$. Классы исключительных дивизоров (или, иначе говоря, (-1) -кривых) исчерпываются классами e_i и $e_0 - e_i - e_j$ для различных $i, j \neq 0$.

По критерию обильности Клеймана [9, теорема 1.4.9] замыкание конуса обильных дивизоров $\text{Ample } Y$ является двойственным к конусу эффективных дивизоров $\overline{\text{NE}}(Y)$. В случае поверхностей дель Пеццо степени < 8 конус $\overline{\text{NE}}(Y)$ порожден исключительными дивизорами, см. [6, теорема 8.2.19]. Следовательно, конус обильных дивизоров задается неравенствами

$$x_0 > 0, \quad x_i < 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (1)$$

$$x_0 + x_i + x_j > 0, \quad 0 \neq i \neq j \neq 0, \quad (2)$$

где $(x_0, \dots, x_4) \in \text{Pic } Y$. У него всего десять экстремальных лучей — это

$$e_0, e_0 - e_j, 2e_0 - \sum_{i \neq 0} e_i, 2e_0 - \sum_{i \neq 0, j} e_i \quad \text{при } j = 1, \dots, 4. \quad (3)$$

Для пяти из них в соответствующей ортогональной гиперплоскости конуса эффективных дивизоров лежит четверка непересекающихся (-1) -кривых. Она задает стягивание $Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, соответствующее выбранному экстремальному лучу.

Каждый луч из оставшихся пяти определяет пучок квадрик на Y . А именно, в ортогональном дополнении к лучу лежат три пары пересекающихся (-1) -кривых, образующих вырожденные слои пучка квадрик. При этом класс слоя пучка лежит на выбранном луче.

3.1. Цилиндры. Зафиксируем стягивание $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ четырех непересекающихся (-1) -кривых $E_1, \dots, E_4$ в точки $P_1, \dots, P_4$ и используем обозначения, введенные выше. Пусть $l_{ij} \subset \mathbb{P}^2$ — прямая, проходящая через точки P_i и P_j . Рассмотрим открытое подмножество $U_1 = \varphi^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus (l_{12} \cup l_{34})) \subset Y$. Это цилиндр, определяемый пучком прямых, проходящих через базисную точку $\text{Bs}(U_1) = l_{12} \cap l_{34}$, причем $U_1 \cong \mathbb{A}_*^1 \times \mathbb{A}^1$, где $\mathbb{A}_*^1 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Аналогично положим $U_2 = \varphi^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus (l_{13} \cup l_{24}))$ и $U_3 = \varphi^{-1}(\mathbb{P}^2 \setminus (l_{14} \cup l_{23}))$, как на рис. 1. Рассмотрим далее стягивания других четверок непересекающихся (-1) -кривых на Y . Всего таких наборов пять, см. рис. 2. Каждому стягиванию соответствует три цилиндра, получаемых аналогично. Заметим, что таким цилиндрам взаимно однозначно соответствуют точки пересечения (-1) -кривых и группа автоморфизмов $\text{Aut } Y \cong S_5$ действует на их множестве транзитивно.

Рис. 1. Расположение цилиндров на графе инцидентности (-1) -кривых на поверхности дель Пеццо степени 5. Серым и черным точкам соответствуют (-1) -кривые, лежащие в дополнении к цилиндру. Ребра, нарисованные пунктиром, отвечают пересечениям (-1) -кривых, принадлежащим цилиндру. Двойному ребру соответствует базисная точка соответствующего цилиндра.

Рис. 2. Черным точкам отвечают стягиваемые четверки (-1) -кривых. По каждому стягиванию строится три цилиндра, как на рис. 1.

Итак, мы определили цилиндры $U_1, \dots, U_{15}$ такого вида, как показано на рис. 1 и 2. Несложно проверить, что каждое пересечение (-1) -кривых лежит в каком-то цилиндре; поэтому $\bigcup U_i = Y$. Мы утверждаем, что не найдется собственного подмножества $W \subset Y$, инвариантного относительно всех 15 цилиндров. Предположим противное: пусть такое W нашлось. Возьмем произвольную точку в W , она содержится в слое S некоторого цилиндра. Тогда W содержит S . Без ограничения общности можно считать, что S — слой цилиндра U_1 . Тогда прямая $l = \overline{\varphi(S)} \subset \mathbb{P}^2$ проходит через базисную точку $\text{Bs}(U_1)$. Поскольку точки $\text{Bs}(U_1)$, $\text{Bs}(U_2)$, $\text{Bs}(U_3)$ не лежат на одной прямой, одна из них не лежит на l . Пусть $\text{Bs}(U_2) \notin l$. Тогда слой S пересекается почти со всеми слоями цилиндра U_2 и множество W содержит почти все слои этого цилиндра, т. е. плотно в Y . Дополнение $Y \setminus W$ также инвариантно относительно всех цилиндров, и по тем же причинам оно плотно в Y , что невозможно.

3.2. Условие полярности. Здесь мы установим, что для любого обильного дивизора H на Y все 15 цилиндров U_i являются H -полярными. Рассмотрим множество эффективных дивизоров $\{\sum_{i=1}^4 \alpha_i E_i + \beta_1 l_{12} + \beta_3 l_{34} \mid \alpha_i, \beta_i > 0\}$, дополнение к носителю которых совпадает с U_1 . В группе Пикара ему соответствует открытый конус C , экстремальные лучи которого суть $e_1, e_2, e_3, e_4, e_0 - e_1 - e_2, e_0 - e_3 - e_4$. Легко проверить, что примитивные векторы обильного конуса (3) выражаются как линейные комбинации с неотрицательными рациональными коэффициентами примитивных векторов конуса C . Следовательно, цилиндр U_1 является H -полярным для любого обильного дивизора H . Действуя автоморфизмами из $\text{Aut } Y$, мы можем перевести U_1 в любой цилиндр. Поэтому все U_i будут H -полярными для любого обильного дивизора H . Применяя теорему 5, приходим к требуемому утверждению. Теорема 6 доказана.

4. Поверхности дель Пеццо степени 4

Каждая поверхность дель Пеццо степени 4 изоморфна раздутию проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ в пяти точках, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Такие поверхности образуют двухпараметрическое семейство.

Через E_i будем обозначать (-1) -кривые — прообразы точек раздутия P_i . Как и прежде, пусть e_0 — класс дивизоров, эквивалентных прямой, не проходящей через точки раздутия, а e_i ($i = 1, \dots, 5$) — класс дивизоров, эквивалентных E_i . Набор $\{e_0, \dots, e_5\}$ является ортогональным базисом в группе Пикара $\text{Pic } Y \cong \mathbb{Z}^6$, причем $e_0^2 = 1, e_i^2 = -1$. Классы исключительных дивизоров исчерпываются классами $e_i, e_0 - e_i - e_j, 2e_0 - \sum_{k \neq 0} e_k$ для различных $i, j \neq 0$. Конус обильных

дивизоров задается неравенствами

$$x_0 > 0, \quad x_i < 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad (4)$$

$$x_0 + x_i + x_j > 0, \quad 0 \neq i \neq j \neq 0, \quad (5)$$

$$2x_0 + x_1 + \dots + x_5 > 0, \quad (6)$$

где $(x_0, \dots, x_5) \in \text{Pic } Y$. Его экстремальные лучи — это

$$e_0, e_0 - e_j, 2e_0 - \sum_{k \neq 0, i} e_k, 2e_0 - \sum_{k \neq 0, i, j} e_k, 3e_0 - \sum_{k \neq 0} e_k - e_i$$

при различных $1 \leq i, j \leq 5$. (7)

Как и в случае поверхности дель Пеццо степени 5, шестнадцать экстремальных лучей соответствуют стягиваниям $Y \rightarrow \mathbb{P}^2$, а десять — пучкам квадрик на Y .

4.1. Цилиндры. Для некоторой (-1) -кривой C_1 рассмотрим стягивание $\sigma_1: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ пяти (-1) -кривых $F_1, \dots, F_5$, пересекающих C_1 , см. рис. 3. Оно корректно определено, поскольку стягиваемые дивизоры не пересекаются. Образ $\sigma_1(C_1)$ — это гладкая квадрика s , проходящая через центры раздутия $Q_1, \dots, Q_5$. Возьмем произвольную прямую $l \subset \mathbb{P}^2$, касающуюся s в точке, отличной от $Q_1, \dots, Q_5$. Пучок квадрик в $\mathbb{P}^2$, порожденный дивизорами s и $2l$, определяет цилиндр $U \cong \mathbb{A}_*^1 \times \mathbb{A}^1 \subset Y$, дополнение к которому есть полный прообраз носителя дивизора $s + 2l$ в $\mathbb{P}^2$. Обозначим через $\mathcal{U}_{C_1}$ семейство таких цилиндров в Y при всевозможных выборах касательной l к s . Заметим, что $Y \setminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{C_1}} U$ есть объединение C_1 и стягиваемых дивизоров F_i ($i = 1, \dots, 5$). С помощью аналогичной конструкции для (-1) -кривых $C_2, \dots, C_5$, образующих с C_1 цикл длины 5 на графе инцидентности, см. рис. 3, мы получаем в итоге пять семейств цилиндров $\mathcal{U}_{C_1}, \dots, \mathcal{U}_{C_5}$. Легко видеть, что их объединение покрывает Y .

Рис. 3. Граф инцидентности (-1) -кривых на поверхности дель Пеццо степени 4. Слева отмечены прообраз квадрики C_1 , задающий семейство цилиндров (серым), и стягиваемые (-1) -кривые (черным). Пунктирным ребрам отвечают пересечения (-1) -кривых, лежащие в цилиндрах семейства. Прочие четыре семейства цилиндров получаются симметричным образом при вращении графа и соответствуют $C_2, \dots, C_5$.

Пусть W — собственное подмножество в Y , инвариантное относительно цилиндров всех семейств, а $w \in W$ — его произвольная точка. Можно считать, что w лежит в цилиндре семейства $\mathcal{U}_{C_1}$. Тогда образ $\sigma_1(W) \subset \mathbb{P}^2$ инвариантен относительно семейства цилиндров $\{\sigma_1(U) \mid U \in \mathcal{U}_{C_1}\}$, каждый из которых является дополнением к квадрике s и ее касательной. Известно, что через две точки на плоскости можно провести квадрику, касающуюся данной. Таким образом, для почти любой точки $x \in \mathbb{P}^2 \setminus s$ существует слой некоторого цилиндра, проходящий через x и $\sigma_1(w)$. А именно, точка x не должна лежать на касательной к s , проходящей через $\sigma_1(w)$, и на квадриках, касающихся s в точках раздутья и проходящих через $\sigma_1(w)$. Итак, W плотно в Y . Аналогично $Y \setminus W$ плотно в Y , что невозможно. Значит, семейства $\mathcal{U}_{C_1}, \dots, \mathcal{U}_{C_5}$ образуют трансверсальное покрытие поверхности Y .

4.2. Условие полярности. Обильные дивизоры H , для которых цилиндры из семейства $\mathcal{U}_{C_1}$ являются H -полярными, — это в точности обильные дивизоры из открытого конуса $\text{Ample } Y \cap \{\alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_5 F_5 + \alpha_6 C_1 + \alpha_7 \sigma_1^{-1}(l) \mid \alpha_j > 0\}$ в $\text{Pic } Y$. Определим такой конус для каждого $\mathcal{U}_{C_i}$ и обозначим его через $\text{Ample}(C_i, Y)$. Он не зависит от выбора касательной l к $\sigma_i(C_i)$, поскольку по определению l не проходит через центры раздутья. Тогда множество таких дивизоров H , что все цилиндры в $\bigcup_i \mathcal{U}_{C_i}$ являются H -полярными, будет открытым конусом $\bigcap_i \text{Ample}(C_i, Y)$. Вычисления показывают, что он имеет 72 экстремальных луча, а именно:

$$\begin{array}{ll} e_0, & 9e_0 - 5e_{i_1} - e_{i_2} - 2e_{i_3} - 4e_{i_4} - 3e_{i_5}, \\ 4e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - e_{i_3} - e_{i_4} - e_{i_5}, & 9e_0 - 4e_{i_1} - 4e_{i_2} - 4e_{i_3} - 2e_{i_4} - 2e_{i_5}, \\ 5e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - e_{i_3} - 3e_{i_4} - e_{i_5}, & 11e_0 - 6e_{i_1} - 2e_{i_2} - 2e_{i_3} - 4e_{i_4} - 4e_{i_5}, \\ 5e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - 2e_{i_3} - 2e_{i_4}, & 11e_0 - 6e_{i_1} - 4e_{i_2} - 4e_{i_3} - 2e_{i_4} - 2e_{i_5}, \\ e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - 2e_{i_3} - 2e_{i_4} - 2e_{i_5}, & 11e_0 - 6e_{i_1} - 2e_{i_2} - 4e_{i_3} - 4e_{i_4} - 4e_{i_5}, \\ 6e_0 - 2e_{i_1} - 2e_{i_2} - 3e_{i_3} - e_{i_4} - 3e_{i_5}, & 11e_0 - 6e_{i_1} - 4e_{i_2} - 4e_{i_3} - 4e_{i_4} - 2e_{i_5}, \\ 7e_0 - 4e_{i_1} - 2e_{i_2} - 2e_{i_3} - 2e_{i_4} - 2e_{i_5}, & 15e_0 - 8e_{i_1} - 2e_{i_2} - 4e_{i_3} - 6e_{i_4} - 6e_{i_5}, \\ 9e_0 - 5e_{i_1} - 3e_{i_2} - 4e_{i_3} - 2e_{i_4} - 1e_{i_5}, & 15e_0 - 8e_{i_1} - 6e_{i_2} - 6e_{i_3} - 4e_{i_4} - 2e_{i_5}, \end{array}$$

где в качестве наборов $(i_1, \dots, i_5)$ берутся циклические перестановки $(1, 2, 3, 4, 5)$.

Легко видеть, что антиканонический дивизор $(-K_Y)$ содержится в пересечении $\bigcap_i \text{Ample}(C_i, Y)$. Аналогично теореме 6 получаем следующий результат.

Теорема 7. Пусть Y — поверхность дель Пеццо степени 4 и H — очень обильный дивизор, принадлежащий конусу $\bigcap_{i=1}^5 \text{Ample}(C_i, Y)$. Тогда аффинный конус $\text{AffCone}_H Y$ является гибким. В частности, это верно для антиканонического дивизора $H = -K_Y$.

Мы выделили такой подконус в конусе обильных дивизоров, что содержащиеся в нем очень обильные дивизоры определяют гибкий аффинный конус. Однако он строго меньше обильного конуса. Вне этого подконуса лежит, например, класс обильных дивизоров $8e_0 - 2e_1 - 4e_2 - e_3 - e_4 - 3e_5$. Итак, вопрос о гибкости аффинного конуса над поляризацией поверхности дель Пеццо степени 4 по произвольному очень обильному дивизору остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М., 1972.
- [2] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
- [3] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg, *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Math. J., **162**:4 (2013), 767–823.
- [4] И. В. Аржанцев, М. Г. Зайденберг, К. Г. Куюмжиян, *Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера* три примера бесконечной транзитивности, Матем. сб., **203**:7 (2012), 3–30.
- [5] I. Cheltsov, J. Park, J. Won, *Affine cones over smooth cubic surfaces*, <http://arxiv.org/abs/1303.2648>.
- [6] I. V. Dolgachev, *Classical Algebraic Geometry: Modern View*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [7] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Group actions on affine cones*, in: Affine Algebraic Geometry, CRM Proc. and Lecture Notes, vol. 54, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 123–163.
- [8] T. Kishimoto, Yu. Prokhorov, M. Zaidenberg, *Unipotent group actions on Del Pezzo cones*, J. Algebraic Geometry, в печати; <http://arxiv.org/abs/1212.4479>.
- [9] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I. Classical setting: line bundles and linear series*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 48, Springer-Verlag, 2004.
- [10] W. A. Stein et al., *Sage Mathematics Software (Version 4.6.1). The Sage Development Team*, 2011; <http://www.sagemath.org>.

Кафедра высшей алгебры МГУ им. М. В. Ломоносова
Институт Фурье, Гренобль, Франция
e-mail: perepechko@mcsme.ru

Поступило в редакцию
20 июня 2011 г.