Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Попов, О формуле Сельберга для строго гиперболических групп, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 4, 53–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3128>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:25:28

О формуле Сельберга для строго гиперболических групп

© 2013. Д. А. Попов

Показано, что для строго гиперболических групп правая часть формулы Сельберга допускает представление в виде ряда по собственным значениям оператора Лапласа. Исследовано поведение функции Минарадхарана при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Получен явный вид счетного числа условий, которым удовлетворяет спектр оператора Лапласа.

§1. Введение

Приведем нужные нам сведения о формуле Сельберга для строго гиперболических групп. Все эти сведения содержатся в работах [1]–[3], и ниже используются обозначения, принятые в этих работах.

Пусть $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ — строго гиперболическая группа (не содержащая эллиптических и параболических элементов фуксова группа первого рода), H — верхняя полуплоскость и $\mathcal{F} = \Gamma \backslash H$ — соответствующая компактная риманова поверхность рода $p > 1$ с метрикой Пуанкаре. Оператор Лапласа $\Delta = y^2(\partial_x^2 + \partial_y^2)$ на $\mathcal{F}$ имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_n\}$ ($\Delta\varphi_n + \lambda_n\varphi_n = 0$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$). Собственные значения $0 \leq \lambda_n < 1/4$ называются исключительными. Их число $M + 1$ (с учетом кратности) конечно, и мы будем их нумеровать индексом m ($0 \leq \lambda_m < 1/4$, $m = 0, 1, \dots, M$). Величины r_n , s_n , $\varkappa_n$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \lambda_n &= 1/4 + r_n^2, \\ r_m &= -i\varkappa_m, \quad \varkappa_m = \sqrt{1/4 - \lambda_m}, \quad 0 < \varkappa_m \leq 1/2 \quad (m = 0, 1, \dots, M) \end{aligned} \quad (1.1)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} s_n &= 1/2 + ir_n, \quad \tilde{s}_n = 1/2 - ir_n = 1 - s_n \quad (n \geq 0), \\ \lambda_n &= s_n \tilde{s}_n, \quad s_m = 1/2 + \varkappa_m, \quad \tilde{s}_m = 1/2 - \varkappa_m. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Пусть h — любая функция, удовлетворяющая условиям

- $h(r) = h(-r)$,
- h голоморфна в полосе $|\operatorname{Im} r| \leq 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,
- $h(r) = O((1 + |r|^2)^{-1-\varepsilon})$ ($|r| \rightarrow \infty$) в этой полосе.

Формула Сельберга для строго гиперболической группы имеет вид

$$\sum_{n \geq 0} h(r_n) = H[h] + S^\Gamma[h]. \quad (1.4)$$

В этой формуле (см. [1]–[3])

$$H[h] = \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r \operatorname{th} \pi r h(r) dr, \quad (1.5)$$

$$S^\Gamma[h] = \sum_{\{P\}} \frac{\ln N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}} g(\ln N(P)). \quad (1.6)$$

Суммирование в формуле (1.6) ведется по множеству $\{P\}$ различных классов сопряженных (в Γ) элементов и $N(P)$ — норма класса P (каждый элемент $a \in \Gamma$ сопряжен в $PSL(2, \mathbb{R})$ преобразованию $z \rightarrow N(P)z$, $z \in H$, $N(P) > 1$). Через P_0 обозначается соответствующий примитивный класс ($P = P_0^k$ ($k \geq 1$), $P_0 \neq Q^k$ ($k > 1$), $Q \in \{P\}$). Функция g определяется равенством

$$g(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iry} h(r) dr, \quad (1.7)$$

и $|\mathcal{F}|$ в формуле (1.5) — площадь поверхности $\mathcal{F} = \Gamma \setminus H$.

Основная цель настоящей работы — показать, что при некоторых дополнительных условиях на функцию h сумму $S^\Gamma[h]$ можно записать в виде

$$S^\Gamma[h] = \sum_{s_\alpha} f_\alpha(s_\alpha), \quad (1.8)$$

где s_α — нули дзета-функции Сельберга.

Таким образом, если использовать принятый в теории чисел термин «явная формула» (см. [1], [4]–[6]), то будет показано, что формула Сельберга является явной формулой для левой части равенства (1.4). С другой стороны, так как нетривиальные нули дзета-функции Сельберга — это $s_\alpha = 1/2 \pm i r_\alpha$, то эту формулу можно рассматривать как совокупность условий на спектр $\{\lambda_n\}$ оператора Лапласа.

Для частного случая

$$h(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_T(t) \delta_\alpha(r-t) dt, \quad (1.9)$$

$$\chi_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T, \\ 0, & |t| > T, \end{cases} \quad \delta_\alpha(r) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha r^2},$$

и некоторого специального класса групп Γ вывод формулы (1.8) был рассмотрен в работе [7], где на основе этого была получена явная формула для функции распределения собственных значений

$$N(t^2 + 1/4) = \#\{n : \lambda_n \leq t^2 + 1/4\}. \quad (1.10)$$

В частности, настоящую работу можно рассматривать как обобщение результатов работы [7] на любые строго гиперболические группы.

В качестве приложения полученных результатов будет рассмотрен случай

$$h(r) = \exp(-t(1/4 + r^2)). \quad (1.11)$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(r_n) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \equiv \mathcal{L}(t), \quad (1.12)$$

где $\mathcal{L}(t)$ — ряд Минарадхарана ([8], [9]). Асимптотика функции $\mathcal{L}(t)$ при $t \rightarrow 0$ рассматривалась в ряде работ, посвященных задаче «можно ли услышать форму барабана». В этих работах $\{\lambda_n\}$ — спектр задачи Дирихле плоской неоднородной мембраны. Для группы $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ эта асимптотика рассматривалась в работе [10]. В работе [11] асимптотика функции $\mathcal{L}(t)$ при $t \rightarrow 0$ рассматривалась для случая компактной поверхности с метрикой отрицательной, не обязательно постоянной, кривизны, и было доказано, что

$$\mathcal{L}(t) \sim \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi t} + \frac{E}{\sqrt{4\pi t}} + O(1) \quad (t \rightarrow 0) \quad (1.13)$$

и константа E имеет вид

$$E = \sum_{a \in A - \{\text{id}\}} u_a e^{-\frac{3}{4}L_a^2}, \quad (1.14)$$

где A — множество свободных гомотопических классов замкнутых кривых, L_a — длина единственной замкнутой геодезической в классе $a \in A$ и u_a — некоторый достаточно сложный функционал от метрики. В §4 будет показано, что в рассматриваемом нами случае постоянной кривизны

$$\mathcal{L}(t) \sim \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi t} + |\mathcal{F}| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^{(k-1)/2} + O(t^{-2} e^{-b^2/(4t)}) \quad (t \rightarrow 0), \quad (1.15)$$

где величина $b > 0$ будет определена ниже и α_k — абсолютные константы. С другой стороны, в §4 будет показано, что формула (1.4) приводит к соотношению вида $\mathcal{L}(t) = \widetilde{\mathcal{L}}(t)$ и при этом функция $\widetilde{\mathcal{L}}$ допускает асимптотику при $t \rightarrow \infty$, не сводящуюся к тривиальной (вытекающей из этого равенства). Это позволяет выписать счетное число условий $\mathcal{L}_k(\{\lambda_n\}) = 0$ на спектр, где $\mathcal{L}_k(\cdot)$ — явно заданные функции на спектре.

§2. Формулировка результатов

Введем нужные определения и обозначения. Пусть

$$B_0 = \min_{\{P\}} N(P), \quad b_0 = \ln B_0 \quad (2.1)$$

и выбрана величина B , такая, что

$$B = B_0 \quad (B_0 \geq 2), \quad B \geq 2 \quad (1 < B_0 < 2). \quad (2.2)$$

Ниже результаты будут приведены в предположении (2.2). Возможен другой выбор величины B , при котором B — любая константа, такая, что

$$B \geq B_0, \quad B \geq 2. \quad (2.3)$$

Необходимые при таком выборе изменения основных результатов будут указаны ниже. Величина b определяется равенством

$$b = \ln B. \quad (2.4)$$

Как и в работе [2],

$$\Lambda^\Gamma(P) = \frac{\ln N(P_0)}{1 - N(P)^{-1}}, \quad \Psi^\Gamma(x) = \sum_{N(P) \leq x} \Lambda^\Gamma(P). \quad (2.5)$$

Введем функции f и φ^Γ :

$$f(y) = -\frac{1}{2}g(y) + g^{(1)}(y) \quad (y \geq b),$$

$$\varphi^\Gamma(y) = e_0^\Gamma + e_1^\Gamma y + e_2^\Gamma \ln(1 - e^{-y}) + e_3^\Gamma (e^y - 1)^{-1} - \theta(2 - B_0 - 0)\Psi^\Gamma(B - 0). \quad (2.6)$$

Явный вид констант e_i^Γ будет указан ниже. Величины $S_0^\Gamma[h]$, $S_M^\Gamma[h]$, $S_R^\Gamma[h]$, $\Delta_B S^\Gamma[h]$ определим с помощью равенств

$$S_0^\Gamma[h] = - \int_b^\infty \varphi^\Gamma(y) f(y) e^{-y/2} dy, \quad (2.7)$$

$$S_M^\Gamma[h] = - \sum_{m=0}^M \int_b^\infty \left(\frac{e^{\varkappa_m y}}{s_m} + \frac{e^{-\varkappa_m y}}{\tilde{s}_m} \right) f(y) dy, \quad (2.8)$$

$$S_R^\Gamma[h] = - \sum_{0 \leq r_n \leq R} \frac{1}{r_n^2 + 1/4} \int_b^\infty (\cos r_n y + 2r_n \sin r_n y) f(y) dy, \quad (2.9)$$

$$\Delta_B S^\Gamma[h] = \theta(2 - B_0 - 0) \sum_{N(P) \leq B} \frac{\Lambda^\Gamma(P)}{N(P)^{1/2}} g(\ln N(P)), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Сразу отметим, что

$$|\Delta_B S^\Gamma[h]| \leq C_\Gamma \frac{\Psi^\Gamma(B)}{B_0^{1/2}} \max_{b_0 \leq y \leq b} |g(y)|. \quad (2.11)$$

Штрих в сумме по m в формуле (2.8) означает, что член с $\tilde{s}_m = 0$ должен быть опущен.

В формуле (2.11) и везде ниже C_Γ — абсолютные константы, зависящие только от группы Γ . Запись $A = O_\Gamma(\cdot)$ означает, что $A \leq C_\Gamma(\cdot)$. Все константы C_Γ могут быть явно указаны, и в различных формулах через C_Γ могут обозначаться различные константы.

Теорема 1. Пусть Γ — любая строго гиперболическая группа и h — функция, удовлетворяющая условиям (1.3). Пусть при этом функция g из (1.7) дважды непрерывно дифференцируема и

$$\int_b^\infty e^{y/2} (y|g(y)| + y|g^{(1)}(y)| + |g^{(2)}(y)|) dy = A_\Gamma[h, b] < \infty. \quad (2.12)$$

Тогда для любого $R \geq 1000$, $R \notin \{r_n\}$, имеет место равенство

$$S^\Gamma[h] = \tilde{S}^\Gamma[h], \quad (2.13)$$

в котором

$$\tilde{S}^\Gamma[h] = S_0^\Gamma[h] + S_M^\Gamma[h] + S_R^\Gamma[h] + \Delta_B S^\Gamma[h] + \Delta_R S^\Gamma[h] \quad (2.14)$$

и величина $\Delta_R S^\Gamma[h]$ удовлетворяет оценке

$$\Delta_R S^\Gamma[h] \leq \frac{C_\Gamma}{R} [A_\Gamma[h, b] + B^{1/2} \ln B (|g(B)| + |g^{(1)}(B)|)]. \quad (2.15)$$

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 имеет место равенство

$$S^\Gamma[h] = S_0^\Gamma[h] + S_M^\Gamma[h] + S_\infty^\Gamma[h] + \Delta_B S^\Gamma[h], \quad (2.16)$$

в котором

$$S_\infty^\Gamma[h] = - \sum_{r_n \geq 0} \frac{1}{r_n^2 + 1/4} \int_b^\infty (\cos r_n y + 2r_n \sin r_n y) f(y) dy. \quad (2.17)$$

Если $g^{(3)} \in L^1(b, \infty)$, то условие

$$\sum_{r_n \geq 0} \frac{\cos r_n b}{r_n^2 + 1/4} = C_\Gamma(b) < \infty \quad (2.18)$$

является необходимым и достаточным для сходимости ряда $S_\infty^\Gamma[h]$ и из формулы (2.13) следует, что

$$\sum_{r_n \geq R} \frac{\cos r_n b}{r_n^2 + 1/4} \leq C_\Gamma(b) \frac{1}{R}. \quad (2.19)$$

Чтобы сформулировать теорему 2, введем обозначение

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) = H[h] + \widetilde{S}^\Gamma[h], \quad (2.20)$$

где функция h задается равенством (1.11) и, следовательно,

$$g(y) = \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{4\pi t}} e^{-y^2/(4t)} \quad (2.21)$$

Для краткости теорема 2 формулируется в предположении, что $B_0 \geq 2$ ($B = B_0$). Необходимые изменения, которые надо внести при $B_0 < 2$ или при выборе величины B согласно (2.3), будут указаны в конце §4.

Теорема 2. Для любой строго гиперболической группы Γ имеют место следующие утверждения:

(1) если $\lambda_{M+1} \neq 1/4$ ($r_{M+1} \neq 0$), то при $t \rightarrow \infty$ функция $\widetilde{\mathcal{L}}$ допускает асимптотику вида

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) \sim \sum_{m=0}^M e^{-\lambda_m t} + \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_k(\{\lambda_n\})}{t^k}, \quad (2.22)$$

а если $\lambda_{M+1} = \lambda_{M+2} = \dots = \lambda_{M+M_0} = 1/4$, то

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) \sim \sum_{n=0}^{M+M_0} e^{-\lambda_n t} + \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{L}'_k(\{\lambda_n\})}{t^k} \quad (t \rightarrow \infty) \quad (2.23)$$

и определенные на спектре $\{\lambda_n\}$ функции $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{L}'_k$ могут быть явно указаны;

(2) при $t \rightarrow 0$ имеет место асимптотическое разложение вида

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) \sim \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi t} + |\mathcal{F}| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k t^{(k-1)/2} + O_\Gamma(t^{-2} e^{-b_0^2/(4t)}), \quad (2.24)$$

в котором абсолютные константы α_k могут быть явно указаны.

Следствие 2. Если Γ — строго гиперболическая группа и $B_0 \geq 2$, то спектр $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет счетному числу условий вида

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k(\{\lambda_n\}) &= 0 & (\lambda_{M+1} \neq 1/4), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathcal{L}'_k(\{\lambda_n\}) &= 0 & (\lambda_{M+1} = 1/4), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.25)$$

§ 3. Доказательство теоремы 1 и следствия 1

Согласно определениям (1.6), (2.5),

$$S^\Gamma[h] = \sum_{\{P\}} \Lambda^\Gamma(P) \frac{1}{N(P)^{1/2}} g(\ln N(P)) \quad (3.1)$$

и, следовательно (см. (2.10)),

$$S^\Gamma[h] = S_B^\Gamma[h] + \Delta_B S^\Gamma[h], \quad (3.2)$$

$$S_B^\Gamma[h] = \sum_{N(P) \geq B} \Lambda^\Gamma(P) \frac{1}{N(P)^{1/2}} g(\ln N(P)). \quad (3.3)$$

Рассмотрим величину $S_B^\Gamma[h]$. Будем использовать формулу частичного суммирования (формулу Абеля, см. [5]), согласно которой, если

$$\Sigma(x) = \sum_{N_0 \leq N(P) \leq x} L(P) f(N(P))$$

и функция f непрерывно дифференцируема, то

$$\Sigma(x) = B(x)f(x) - \int_{N_0}^x B(\xi) f'(\xi) d\xi, \quad B(\xi) = \sum_{N_0 \leq N(P) \leq \xi} L(P). \quad (3.4)$$

При этом если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} B(x)f(x) = 0, \quad (3.5)$$

то

$$\sum_{N(P) \geq N_0} L(P) f(N(P)) = - \int_{N_0}^{\infty} B(\xi) f'(\xi) d\xi \quad (3.6)$$

при условии сходимости ряда в левой части этого равенства или интеграла в правой.

Введем функцию

$$\tilde{\Psi}^\Gamma(x) = \sum_{B \leq N(P) \leq x} \Lambda^\Gamma(P). \quad (3.7)$$

Ясно, что

$$\tilde{\Psi}^\Gamma(x) = \begin{cases} \Psi^\Gamma(x), & B_0 \geq 2, \\ \Psi^\Gamma(x) - \Psi^\Gamma(B-0), & B_0 < 2. \end{cases} \quad (3.8)$$

Применим к сумме $S_B^\Gamma[h]$ формулу (3.6), в которой

$$L(P) = \Lambda^\Gamma(P), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} g(\ln(x)), \quad N_0 = B.$$

Из известной оценки $\Psi^\Gamma(x) \leq C_\Gamma x$ следует, что $\tilde{\Psi}^\Gamma(x) \leq C'_\Gamma x$. Таким образом, условие (3.5) выполняется в силу (2.12) и

$$S_B^\Gamma[h] = - \int_B^\infty \tilde{\Psi}^\Gamma(x) \frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} dx. \quad (3.9)$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Psi}_1^\Gamma(x) = \int_B^x \tilde{\Psi}^\Gamma(x) dx \quad (3.10)$$

и запишем формулу (3.9) в виде

$$S_B^\Gamma[h] = - \int_B^\infty \frac{d}{dx} \tilde{\Psi}_1^\Gamma(x) \frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} dx.$$

Так как $\tilde{\Psi}_1^\Gamma(x) \leq C_\Gamma x^2$, то, интегрируя по частям и учитывая, что в силу (2.12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{\Psi}_1^\Gamma(x) \frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} = 0$, получим

$$S_B^\Gamma[h] = \tilde{\Psi}_1^\Gamma(B) \left(\frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} \right) (B) + \int_B^\infty \tilde{\Psi}_1^\Gamma(x) \frac{d^2}{dx^2} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} dx. \quad (3.11)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{x^{3/2}} \left(-\frac{1}{2} g(\ln x) + g^{(1)}(\ln x) \right), \\ \frac{d^2}{dx^2} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} &= \frac{1}{x^{5/2}} \left(\frac{3}{4} g(\ln x) + 2g^{(1)}(\ln x) + g^{(2)}(\ln x) \right) \end{aligned}$$

и интеграл в правой части равенства (3.11) сходится в силу формулы Сельберга. Определим (см. [2]) функцию Ψ_1^Γ равенством

$$\Psi_1^\Gamma(x) = \int_1^x \Psi^\Gamma(x) dx. \quad (3.12)$$

Тогда

$$\tilde{\Psi}_1^\Gamma(x) = \Psi_1^\Gamma(x) - \int_1^B \Psi^\Gamma(x) dx - \theta(2 - B_0 - 0)(x - B)\Psi^\Gamma(B - 0). \quad (3.13)$$

В работе [2] (см. теорему 5.12 и теорему 6.16) получена явная формула для функции Ψ_1^Γ , которая имеет вид

$$\Psi_1^\Gamma(x) = \Psi_{1,0}^\Gamma(x) + \Psi_{1,M}^\Gamma(x) + \Psi_{1,R}^\Gamma(x) + \Delta_R \Psi_1^\Gamma(x), \quad (3.14)$$

где

$$\Psi_{1,0}^\Gamma(x) = e_0^\Gamma x + e_1^\Gamma x \ln x + \varepsilon_2^\Gamma + e_3^\Gamma \ln x + (2p - 2) \sum_{k=2}^\infty \frac{2k + 1}{2k(k - 1)} x^{1-k}, \quad (3.15)$$

$$\Psi_{1,M}^\Gamma(x) = \sum_{m=0}' \left(\frac{x^{1+s_m}}{s_m(1+s_m)} + \frac{x^{1+\tilde{s}_m}}{\tilde{s}_m(1+\tilde{s}_m)} \right), \quad (3.16)$$

$$\Psi_{1,R}^\Gamma(x) = \sum_{0 \leq r_n \leq R} \left(\frac{x^{1+s_n}}{s_n(1+s_n)} + \frac{x^{1+\tilde{s}_n}}{\tilde{s}_n(1+\tilde{s}_n)} \right). \quad (3.17)$$

В работе [2] показано, что равенство (3.14) имеет место при любом $R > 1000$ для любого $x \geq 2$, $x \neq \{r_n\}$, и при этом выполняется оценка

$$|\Delta_R \Psi_1^\Gamma(x)| \leq C_\Gamma \frac{x^2 \ln x}{R}. \quad (3.18)$$

Зависящие от группы Γ константы e_i^Γ определяются из следующих условий. Величина $e_0^\Gamma x + e_1^\Gamma x \ln x$ — это вычет в точке $s = 0$ функции $\frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \frac{Z_\Gamma'(s)}{Z_\Gamma(s)}$, $e_2^\Gamma + e_3^\Gamma \ln x$ — вычет этой функции в точке $s = -1$ и Z_Γ — дзета-функция Сельберга. Используя формулы (3.13), (3.14) и подставляя полученное выражение для функции $\tilde{\Psi}_1^\Gamma$ в равенство (3.11), имеем

$$S_B^\Gamma[h] = \tilde{\Psi}_1^\Gamma(B) \left(\frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} \right) (B) + \int_B^\infty (\tilde{\Psi}_{1,0}^\Gamma(x) + \Psi_{1,M}^\Gamma(x) + \Psi_{1,R}^\Gamma(x)) \frac{d^2}{dx^2} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} dx + \Delta_R^1 S^\Gamma[h]. \quad (3.19)$$

При этом

$$\Delta_R^1 S^\Gamma[h] = \int_B^\infty O\left(\frac{x^2 \ln x}{R}\right) \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} \right) dx, \quad (3.20)$$

и сходимость интеграла (3.20) следует из условия (2.12). Интегрируя по частям, получаем, что

$$S_B^\Gamma[h] = - \int_B^\infty \frac{d}{dx} (\tilde{\Psi}_{1,0}^\Gamma(x) + \Psi_{1,M}^\Gamma(x) + \Psi_{1,R}^\Gamma(x)) \frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} dx + D + \Delta_R^1 S^\Gamma[h]. \quad (3.21)$$

В этой формуле

$$D = \Psi_1^\Gamma(B) \left(\frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} \right) (B) + \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} \left(\tilde{\Psi}_1^\Gamma(x) - O_\Gamma \left(\frac{x^2 \ln x}{R} \right) \right) \right]_B^x,$$

где использовано обозначение $[f]_a^b = f(b) - f(a)$. Из определения (3.10) величины $\tilde{\Psi}_1^\Gamma$ следует, что при условии (2.12)

$$|D| \leq C_\Gamma R^{-1} B^{1/2} \ln B (|g(B)| + |g^{(1)}(B)|). \quad (3.22)$$

Заметим, что в силу (3.13) функция $\tilde{\Psi}_{1,0}^\Gamma$ отличается от $\Psi_{1,0}^\Gamma$ только на линейную функцию. Дифференцируем под знаком интеграла в (3.21). Переходя к переменной $y = \ln x$ и замечая, что

$$\left(\frac{x^{s_n}}{s_n} + \frac{x^{\tilde{s}_n}}{\tilde{s}_n} \right) \frac{d}{dx} \frac{g(\ln x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{r_n^2 + 1/4} (\cos r_n y + 2r_n \sin r_n y) f(y) dy,$$

получим нужный результат (2.13). Теорема 1 доказана.

Докажем следствие 1. Равенство (2.16) получается из (2.14) предельным переходом при $R \rightarrow \infty$. Остается доказать второе утверждение этого следствия. Рассмотрим интеграл J_n , входящий в правую часть равенства (2.17). Этот интеграл имеет вид

$$J_n = J_{1,n} + 2r_n J_{2,n}, \quad J_{1,n} = \int_b^\infty \cos r_n y f(y) dy, \quad J_{2,n} = \int_b^\infty \sin r_n y f(y) dy.$$

Интегрируя по частям, получим, что при $r_n > 0$ и $q^{(3)} \in L^1(b, \infty)$

$$J_{1,n} = O\left(\frac{1}{r_n}\right), \quad J_{2,n} = \frac{f(b) \cos r_n b}{r_n} + O\left(\frac{1}{r_n^2}\right).$$

Остается заметить, что $\sum_{r_n > R} r_n^{-3} \leq C_\Gamma R^{-1}$, и воспользоваться оценкой (2.15). Следствие 1 доказано.

Чтобы получить соответствующие результаты в случае, когда величина выбирается в соответствии с условиями (2.3), достаточно опустить множитель $\theta(2 - B_0 - 0)$ во всех формулах, где он присутствует.

§ 4. Доказательство теоремы 2 и следствия 2

В этом параграфе предполагается, что функции g , h задаются равенствами (1.11), (2.21) и, следовательно, условия (1.3), (2.12) выполняются при всех конечных t . Используя следствие 1 (равенство (2.16)), получим, что

$$\mathcal{L}(t) = \widetilde{\mathcal{L}}(t), \quad (4.1)$$

где функция $\mathcal{L}$ определяется равенством (1.12) и

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) = H(t) + \mathcal{L}_0(t) + \mathcal{L}_M(t) + \mathcal{L}_\infty(t). \quad (4.2)$$

Здесь и ниже

$$H(t) = H[h], \quad \mathcal{L}_0(t) = S_0^\Gamma[h], \quad \mathcal{L}_M(t) = S_M^\Gamma[h], \quad \mathcal{L}_\infty(t) = S_\infty^\Gamma[h]. \quad (4.3)$$

Рассмотрим асимптотику функции $\widetilde{\mathcal{L}}$ при $t \rightarrow \infty$ и будем последовательно рассматривать асимптотики четырех членов в правой части равенства (4.2). Величину $H(t)$ запишем в виде

$$H(t) = \frac{|\mathcal{F}|}{2\pi} e^{-t/4} \int_0^\infty r^2 \varphi(r) e^{-tr^2} dr, \quad \varphi(r) = \frac{\text{th } \pi r}{r}. \quad (4.4)$$

Используя лемму Ватсона [12], согласно которой при $t \rightarrow \infty$

$$\int_0^\infty x^{\beta-1} f(x) e^{-tx^\gamma} dx \sim \gamma^{-1} \sum_{k=0}^\infty t^{-(k+\beta)/\gamma} \Gamma\left(\frac{k+\beta}{\gamma}\right) \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad (4.5)$$

получим, что

$$H(t) \sim \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^\infty H_n t^{-n} \quad (t \rightarrow \infty), \quad (4.6)$$

$$H_0 = 0, \quad H_n = |\mathcal{F}| C_n, \quad C_n = \Gamma(n+1/2) A_n \pi^{2n-3/2}$$

и коэффициенты A_n определяются из разложения в ряд Тейлора

$$\text{th } x = \sum_{n=1}^\infty A_n x^{2n-1} \quad (A_1 = 1, A_2 = -1/3, A_3 = 1/15, \dots). \quad (4.7)$$

В интересующем нас случае функция f (см. (2.5)) имеет вид

$$f(y) = -\frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} e^{-y^2/(4t)} \left(1 + \frac{y}{t}\right) \quad (4.8)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L}_0(t) = \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \varphi_0^\Gamma(y) e^{-y/2 - y^2/(4t)} \left(1 + \frac{y}{t}\right) dy. \quad (4.9)$$

Используя разложение в ряд Тейлора

$$e^{-y^2/(4t)} \left(1 + \frac{y}{t}\right) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n(y)}{t^n}, \quad (4.10)$$

$$a_0(y) = 1, \quad a_n(y) = \frac{(-1)^n y^{2n}}{n! 4^n} + \frac{(-1)^{n+1} y^{2n-1}}{(n-1)! 4^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и подставляя его в (4.9), получим нужную асимптотику функции $\mathcal{L}_0$ при $t \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{L}_0(t) \sim \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha_n}{t^n}, \quad \alpha_n = \int_{b_0}^\infty \varphi^\Gamma(y) e^{-y/2} a_n(y) dy, \quad (4.11)$$

где функция φ^Γ определена в (2.6).

Функцию $\mathcal{L}_M$ запишем в виде

$$\mathcal{L}_M(t) = \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{m=0}^M (P_m^0(t) - P_m^1(t)), \quad (4.12)$$

где

$$P_m^0(t) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{\varkappa_m y}}{s_m} + \frac{e^{-\varkappa_m y}}{\tilde{s}_m} \right) e^{-y^2/(4t)} \left(1 + \frac{y}{t}\right) dt, \quad (4.13)$$

$$P_m^1(t) = \int_0^{b_0} \left(\frac{e^{\varkappa_m y}}{s_m} + \frac{e^{-\varkappa_m y}}{\tilde{s}_m} \right) e^{-y^2/(4t)} \left(1 + \frac{y}{t}\right) dt. \quad (4.14)$$

Асимптотика функции P_m^1 получается подстановкой в (4.14) разложения (4.10), и при $t \rightarrow \infty$

$$P_m^1(t) \sim \sum_{n=0}^\infty \frac{\beta_{nm}^1}{t^n}, \quad \beta_{nm}^1 = \int_0^{b_0} \left(\frac{e^{\varkappa_m y}}{s_m} + \frac{e^{-\varkappa_m y}}{\tilde{s}_m} \right) a_n(y) dy. \quad (4.15)$$

В формуле для β_{nm}^1 член с $\tilde{s}_m = 0$ должен быть опущен.

Рассмотрим величину $P_m^0(t)$. Этот интеграл выражается через интеграл вероятности $\operatorname{erf} x$. Будем использовать стандартное обозначение $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$ [13].

После несложных преобразований с учетом определений (1.2), (1.3) величин s_m , $\tilde{s}_m$, $\varkappa_m$ получим, что

$$P_0^0(T) = 4\sqrt{\pi t} e^{t/4} + 2 - 2\sqrt{\pi t} e^{t/4} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{t}}{2}, \quad (4.16)$$

$$P_m^0(T) = 4\sqrt{\pi t} e^{t\varkappa_m^2} + \frac{2}{\lambda_m} \quad (m \geq 1). \quad (4.17)$$

Используя известную асимптотику

$$\operatorname{erfc} x \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi} x} \left(1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{(2x^2)^k}\right) \quad (x \rightarrow \infty), \quad (4.18)$$

находим, что

$$P_0^0(t) \sim 4\sqrt{\pi t} e^{t/4} - 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) 2^{k+2}}{t^k} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (4.19)$$

Собирая полученные результаты, получим, что при $t \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}_M(t) \sim \sum_{m=0}^M e^{-\lambda_m t} + \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{t^n}, \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -2 - \sum_{m=0}^{M'} \beta_{0m}^1 + \sum_{m=1}^M \frac{2}{\lambda_m}, \\ \beta_n &= (-1)^{n+1} 2^{n+1} 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) - \sum_{m=1}^M \beta_{nm}^1 \quad (n \geq 1), \end{aligned} \quad (4.21)$$

а величины β_{nm}^1 определены в (4.15).

Осталось рассмотреть асимптотику при $t \rightarrow \infty$ функции $\mathcal{L}_\infty$, которую мы запишем в виде

$$\mathcal{L}_\infty(t) = \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{r_n \geq 0} \frac{T_n(t)}{r_n^2 + 1/4}, \quad (4.22)$$

$$T_n(t) = \int_{b_0}^{\infty} e^{-y^2/(4t)} \left(1 + \frac{y}{t}\right) (\cos r_n y + 2r_n \sin r_n y) dy. \quad (4.23)$$

Заметим, что в формуле (4.22) $n \geq M+1$ и, если $\lambda_{M+1} = 1/4$, то $r_{M+1} = 0$. Рассмотрим этот случай отдельно. Введем обозначение

$$\mathcal{L}_\infty^0(t) = \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{\pi t}} \sum_{n=M+1}^{M+M_0} T_n^0(t) \quad (r_{M+1} = r_{M+2} = \cdots = r_{M+M_0} = 0), \quad (4.24)$$

$$T_n^0(t) = \int_{b_0}^{\infty} e^{-y^2/(4t)} \left(1 + \frac{y}{t}\right) dt = e^{-t/4} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{b_0}{2\sqrt{t}}\right)\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi t}} e^{-t/4 - b_0^2/(4t)}. \quad (4.25)$$

Используя разложение в ряд Тейлора

$$\operatorname{erf} \left(\frac{b_0}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! (2n+1)} \left(\frac{b_0}{2\sqrt{t}}\right)^{2n+1}, \quad (4.26)$$

получим, что в формуле (4.24) при $r_n = 0$

$$T_n(t) = e^{-t/4} + \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k^0}{t^k}, \quad \gamma_k^0 = \frac{4b_0^{2k} (-1)^k}{k! 2^{2k}} \left(1 - \frac{b_0}{2k+1}\right). \quad (4.27)$$

В случае $r_n > 0$ запишем интеграл $T_n(t)$ в виде

$$T_n(t) = 2\sqrt{t} \int_{b_0/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{t}}\right) (\cos 2r_n \sqrt{t} x + 2r_n \sin 2r_n \sqrt{t} x) dx. \quad (4.28)$$

Асимптотика этого интеграла получается интегрированием по частям, и при $r_n > 0$

$$T_n(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{kn}(b_0)}{t^k} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (4.29)$$

Отсюда следует, что при $\lambda_{M+1} > 1/4$

$$\mathcal{L}_{\infty}(t) \sim \frac{e^{-t/4}}{4\sqrt{\pi t}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n}{t^n} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (4.30)$$

Величины γ_n зависят от b_0 и величин

$$\begin{aligned} E_q &= \sum_{r_n > 0} \frac{\cos r_n b_0}{(r_n^2 + 1/4)r_n^q} \quad (q = 0, 1, 2, \dots), \\ G_q &= \sum_{r_n > 0} \frac{\sin r_n b_0}{(r_n^2 + 1/4)r_n^q} \quad (q = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Эта зависимость имеет вид

$$\gamma_n = \sum_{q=0}^n Q_{n,q}^1(b_0) E_{2q} + \sum_{q=0}^n Q_{n,q}^2(b_0) G_{2q+1}, \quad (4.32)$$

где $Q_{n,q}^1(b_0)$, $Q_{n,q}^2(b_0)$ — полиномы степени $\leq 2n$. Приведем выражение нескольких первых коэффициентов γ_n :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= -G_1 + 2E_0, \\ \gamma_1 &= \left(b_0 - \frac{b_0^2}{4}\right)(G_1 + 2E_0) + (b_0 - 2)(E_2 + 2G_1) + \frac{1}{2}(G_3 - 2E_2), \\ \gamma_2 &= \left(-\frac{b_0^3}{4} + \frac{b_0^4}{32}\right)(-G_1 + 2E_0) + \left(\frac{b_0^2}{2} - \frac{b_0^3}{8}\right)(E_2 + 2G_1) \\ &\quad + \left(\frac{3b_0^2}{8} - \frac{3b_0}{2}\right)(G_3 - 2E_2) + \frac{b_0}{2}(E_4 + 2G_3) + \frac{1}{4}(-G_5 + 2E_4). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Суммируя полученные результаты, получим, что при $\lambda_{M+1} \neq 1/4$ имеет место равенство (2.14), в котором

$$\mathcal{L}_k(\{\lambda_n\}) = H_k + \alpha_k + \beta_k + \gamma_k, \quad (4.34)$$

а если $\lambda_{M+1} = \lambda_{M+2} = \dots = \lambda_{M+M_0} = 1/4$, то равенство (2.15), где

$$\mathcal{L}'_k(\{\lambda_n\}) = \mathcal{L}_k(\{\lambda_n\}) + M_0 \gamma_k^0. \quad (4.35)$$

Утверждение (1) доказано. Докажем утверждение (2).

Рассмотрим асимптотику функции $\widetilde{\mathcal{L}}$ из (4.2) при $t \rightarrow 0$. Так же, как и выше, будем последовательно рассматривать асимптотики величин в правой части равенства (4.2).

Величину $H(t)$ запишем в виде

$$H(t) = \frac{|\mathcal{F}|}{2\pi} e^{-t/4} t^{-1} \int_0^{\infty} \varphi(x) \operatorname{th} \frac{\pi x}{\sqrt{t}} dx, \quad \varphi(x) = x e^{-x^2}. \quad (4.36)$$

Используя равенство

$$\operatorname{th} \frac{\pi x}{\sqrt{t}} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2\pi n x / \sqrt{t}}, \quad (4.37)$$

получим, что

$$H(t) = \frac{|\mathcal{F}|}{2\pi} e^{-t/4} t^{-1} \left[J_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n \right], \quad J_n = (-1)^n \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi n x / \sqrt{t}} dx. \quad (4.38)$$

Интегрируя J_n по частям и разлагая $e^{-t/4}$ в ряд Тейлора, находим, что при $t \rightarrow 0$

$$H(t) \sim \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi t} + \frac{|\mathcal{F}|}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n + \frac{|\mathcal{F}|}{\pi \sqrt{t}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad (4.39)$$

где

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n! 4^n}, \quad c_n = \sum_{l+k=n} a_l b_k, \quad a_l = \frac{A_l \varphi^{(2l+1)}(0)}{(2\pi)^{2l+1}}, \quad A_l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2l+1}}. \quad (4.40)$$

Величины $\mathcal{L}_0(t)$, $\mathcal{L}_M(t)$ оцениваются с помощью интегрирования по частям, что приводит к оценкам

$$\mathcal{L}_0(t) = O_{\Gamma}(t^{1/2} e^{-b_0^2/(4t)}), \quad \mathcal{L}_M(t) = O_{\Gamma}(t^{1/2} e^{-b_0^2/(4t)}). \quad (4.41)$$

Из (4.24) следует, что при $t \rightarrow 0$

$$\mathcal{L}_{\infty}^0(t) = O_{\Gamma}(t^{-1/2} e^{-b_0^2/(4t)}). \quad (4.42)$$

В случае $r_n > 0$ используем формулы (4.22), (4.28) и интеграл $T_n(t)$ из (4.23) два раза интегрируем по частям. Получаем, что при $t \rightarrow 0$

$$\mathcal{L}_{\infty}(t) = O_{\Gamma}(t^{-2} e^{-b_0^2/(4t)}). \quad (4.43)$$

Утверждение (2), а следовательно, и теорема 2 доказаны.

Докажем следствие 2. Нужный результат (2.25) сразу вытекает из теорем 1, 2. Достаточно сравнить асимптотики при $t \rightarrow \infty$ левой и правой частей равенства (4.1). Следствие 2 доказано.

Укажем, какие изменения в формулировках теоремы 2 и следствия 2 надо произвести, если $B_0 < 2$ или величина B выбирается в соответствии с условиями (2.3). Все эти изменения связаны с добавлением в правой части равенства (4.1) величины

$$\Delta_B S^{\Gamma}[h] = \sum_{N(P) \leq B} \frac{\Lambda^{\Gamma}(P)}{N(P)^{1/2}} \frac{e^{-t/4}}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\ln^2 N(P)/(4t)}$$

и сводятся к замене b_0 на b в утверждениях теоремы 2, к замене $\mathcal{L}_0(\{\lambda_n\})$ на $\mathcal{L}_0(\{\lambda_n\}) + \sum_{N(P) \leq B} \Lambda^{\Gamma}(P)/N(P)^{1/2}$ и аналогичной замене для $\mathcal{L}'_0(\{\lambda_n\})$.

Автор благодарен рецензенту за указание на работу [14], где доказано, что для «сучайных» гиперболических групп $B_0 \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] D. A. Hejhal, *The Selberg trace formula and the Riemann zeta function*, Duke Math. J., **43**:3 (1976), 441–481.
- [2] D. A. Hejhal, *The Selberg Trace Formula for $PSL(2, \mathbb{R})$* , V. 1, Lecture Notes in Math., vol. 548, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.
- [3] А. Б. Венков, *Спектральная теория автоморфных функций, дзета-функция Сельберга и некоторые проблемы аналитической теории чисел и математической физики*, УМН, **36**:3 (1979), 69–135.
- [4] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Наука, М., 1983.
- [5] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.
- [6] Ю. М. Манин, А. А. Панчишкин, *Введение в современную теорию чисел*, МЦНМО, М., 2009.
- [7] Д. А. Попов, *Явная формула для функции распределения собственных значений оператора Лапласа на компактной римановой поверхности рода $g > 1$* , Функц. анализ и его прил., **46**:2 (2012), 66–82.
- [8] S. Minakshisundaram, *Eigenfunctions on Riemannian manifolds*, J. Indian Math. Soc., **17** (1953), 158–165.
- [9] H. P. McKean, Jr., I. M. Singer, *Curvature and eigenvalues of the Laplacian*, J. Differential Geometry, **1**:1 (1967), 43–69.
- [10] А. Б. Венков, *Формула следа Сельберга для оператора Гекке, порожденного инволюцией, и собственные значения оператора Лапласа–Бельтрами на фундаментальной области модулярной группы $PSL(2, \mathbb{Z})$* , Изв. АН СССР, сер. матем., **42**:3 (1978), 484–499.
- [11] Y. Colin de Verdière, *Spectre du laplacien at longueurs des géodésiques périodiques. I*, Composito Math., **27** (1973), 83–106.
- [12] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [13] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, М., 1979.
- [14] M. Mirzakhani, *Growth of Weil–Petersson volumes and random hyperbolic surfaces of large genus*, <http://arxiv.org/abs/1012.2167>.

Научно-исследовательский институт
физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского,
МГУ им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
4 июля 2011 г.