Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Шерстнев, О мерах на проекторах W^* -алгебры типа I_2 , *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 4, 67–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:44:13

О мерах на проекторах W^* -алгебры типа I_2

© 2013. А. Н. ШЕРСТНЕВ

В работе получены два результата для мер на проекторах W^* -алгебры типа I_2 . Доказано, что для всякой такой меры m существует гильбертовозначная ортогональная векторная мера μ на проекторах этой алгебры, такая, что $\|\mu(p)\|^2 = m(p)$ для любого проектора p этой алгебры. С учетом результата Я. Хамгалтера (Proc. Amer. Math. Soc., 110 (1990), 803–806) это означает, что указанный факт имеет место для произвольной W^* -алгебры. Кроме того, для алгебры типа I_2 приведена конструкция произведения мер на проекторах (аналог конструкции произведения мер в классической лебеговской теории).

Введение

Как известно, проблема продолжения меры на проекторах до линейного функционала положительно решается для W^* -алгебр, не содержащих прямого слагаемого типа I_2 (систематическое изложение результатов Глисона–Кристенсена–Йедона см. в обзоре [2]). В связи с этим стало доброй традицией при исследованиях мер на проекторах сразу исключать из рассмотрения W^* -алгебры, содержащие слагаемые типа I_2 . В этой связи представляется интересной работа Я. Хамгалтера [1], устанавливающая связь между мерами на проекторах в традиционном их понимании и H -значными (H — гильбертово пространство) ортогональными векторными мерами. А именно, в [1] фактически показано (в качестве простого следствия результата Глисона–Кристенсена–Йедона), что если m — мера на проекторах W^* -алгебры $\mathcal{A}$, не содержащей прямого слагаемого типа I_2 , то существует H -значная ортогональная векторная мера μ на проекторах этой W^* -алгебры, такая, что $\|\mu(p)\|^2 = m(p)$ для любого проектора $p \in \mathcal{A}$.

В §2 данной работы предлагается конструкция, позволяющая получить доказательство этого результата для W^* -алгебр типа I_2 , а значит, и для произвольных W^* -алгебр. Результаты этого параграфа в несколько сокращенном изложении приведены в препринте [6]. Предложенные методы позволили получить в §3 конструкцию произведения мер на проекторах в W^* -алгебре типа I_2 . В отличие от своего классического аналога (произведения мер в лебеговской теории) соответствующее произведение, вообще говоря, неоднозначно определяется мерами-сомножителями.

Автор благодарит А. С. Холево за привлечение внимания к проблеме произведения мер на проекторах, а также Г. Д. Луговую за полезные обсуждения.

§1. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{A}$ есть W^* -алгебра. Через $\mathcal{A}^{\text{pr}}$, $\mathcal{A}^{\text{un}}$ и $\mathcal{A}^+$ обозначаются соответственно множества ортопроекторов, унитарных элементов и положительных

элементов алгебры $\mathcal{A}$. Для $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$ через $\zeta(p)$ будем обозначать его *центральное ядро* — наибольший центральный проектор q , для которого $qp = q$. Для $x \in \mathcal{A}^+$ через $\text{gr}(x)$ обозначается *ранговый проектор* элемента x — наименьший проектор $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, для которого $px = x$. Отметим, что $\text{gr}(x) = \text{gr}(x^{1/2})$. Основные объекты, о которых идет речь в данной статье, описываются следующими определениями. (Более подробно с проблематикой мер на проекторах алгебр фон Неймана можно познакомиться в монографии [3].)

Определение 1. Пусть $\mathcal{A}$ есть W^* -алгебра. Отображение $m: \mathcal{A}^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ называется *мерой на проекторах*, если

$$p = \sum_{i \in I} p_i \quad (p, p_i \in \mathcal{A}^{\text{pr}}, p_i p_j = 0 \ (i \neq j)) \implies m(p) = \sum_{i \in I} m(p_i).$$

Суммы рядов здесь понимаются как пределы сетей конечных сумм (для проекторов — в w^* -топологии). В §3 мы встретимся со случаями, когда m определена на подмножествах $X \subset \mathcal{A}^{\text{pr}}$ и удовлетворяет приведенному выше условию для $p, p_i \in X$. Такие функции мы также называем *мерами на X* .

Определение 2. Пусть $\mathcal{A}$ есть W^* -алгебра и H — комплексное гильбертово пространство. Отображение $\mu: \mathcal{A}^{\text{pr}} \rightarrow H$ называется *ортогональной векторной мерой* (ОВМ), если для любого ортосемейства $(p_j)_{j \in J} \subset \mathcal{A}^{\text{pr}}$

(i) $(\mu(p_j))_{j \in J}$ — ортосемейство векторов в H ,

(ii) $\mu(\sum_{j \in J} p_j) = \sum_{j \in J} \mu(p_j)$,

где ряд в правой части понимается как предел сети конечных частных сумм в топологии нормы пространства H .

Пусть подмножество $X \subset \mathcal{A}^{\text{pr}}$ обладает свойством

(iii) $pq = 0 \implies p + q \in X$ для любых $p, q \in X$.

Отображение $\mu: X \rightarrow H$ назовем *конечно-аддитивной ОВМ на X* , если $pq = 0 \implies \langle \mu(p), \mu(q) \rangle = 0$, $\mu(p + q) = \mu(p) + \mu(q)$ для любых $p, q \in X$.

Нас, главным образом, будут интересовать W^* -алгебры типа I_2 . Как известно, всякая W^* -алгебра $\mathcal{N}$ типа I_2 представима в виде $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes M_2$, где $\mathcal{M}$ — коммутативная W^* -алгебра, а M_2 — алгебра комплексных матриц 2-го порядка. Остановимся на структуре ортопроекторов алгебры $\mathcal{N}$. Одномерные ортопроекторы алгебры M_2 описываются формулой

$$p(\lambda, \alpha) \equiv \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \sqrt{\lambda(1-\lambda)} \\ \bar{\alpha} \sqrt{\lambda(1-\lambda)} & 1-\lambda \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, |\alpha| = 1 \ (\alpha \in \mathbb{C}). \quad (1)$$

Введем ортопроекторы из $\mathcal{N}^{\text{pr}}$ следующих видов¹⁾:

$$\pi_1 \oplus \pi_2 \equiv \begin{pmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_2 \end{pmatrix}, \quad \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{M}^{\text{pr}},$$

$$p(x, v, \pi) \equiv \begin{pmatrix} x\pi & v\pi(x(\mathbf{1}-x))^{1/2} \\ v^*\pi(x(\mathbf{1}-x))^{1/2} & (\mathbf{1}-x)\pi \end{pmatrix}, \quad \pi \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, v \in \mathcal{M}^{\text{un}},$$

где $x \in \mathcal{M}$, $0 \leq x \leq \mathbf{1}$, $\text{gr}(x(\mathbf{1}-x)) = \mathbf{1}$. В частности, $p(x, v, 0) = 0$ и $\mathbf{1} \otimes p(\lambda, \alpha) = p(\lambda \mathbf{1}, \alpha \mathbf{1}, \mathbf{1})$ при $0 < \lambda < 1$. Отметим также равенства

¹⁾Здесь и далее $\mathbf{1}$ — единичный элемент W^* -алгебры $\mathcal{M}$, $\mathbf{I}$ обозначает единичный элемент алгебры M_2 .

$$\pi \otimes p(\lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda\pi}{\alpha\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\pi} & \alpha\sqrt{\lambda(1-\lambda)}\pi \\ (1-\lambda)\pi & \pi \end{pmatrix}, \quad \pi \otimes \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix},$$

$$\pi \otimes p(1, \alpha) = \pi \oplus 0 = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi \otimes p(0, \alpha) = 0 \oplus \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Подалгебра $\mathcal{Z}(\mathcal{N}) \equiv \{x \otimes \mathbf{I} : x \in \mathcal{M}\}$ является центром W^* -алгебры $\mathcal{N}$. Для проекторов алгебры $\mathcal{M}$ положим $\pi \setminus \rho \equiv \pi - \pi\rho$, $\pi\Delta\rho \equiv (\pi \setminus \rho) + (\rho \setminus \pi)$.

Следующие две леммы являются простым следствием равенств $p = p^2 = p^*$ для ортопроектора p .

Лемма 3. *Каждый ортопроектор $p \in \mathcal{N}^{\text{Pr}}$ представим в виде*

$$p = \pi_1 \oplus \pi_2 + p(x, v, \pi), \quad (2)$$

где $\pi_i \leq \mathbf{1} - \pi$, $i = 1, 2$. При этом элементы π_1 , π_2 , π , $x\pi$, $v\pi$ определены однозначно.

Представление (2) назовем каноническим.

Лемма 4. *Равенство $p(x, v, \pi)p(y, w, \rho) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда*

$$y\pi\rho = (\mathbf{1} - x)\pi\rho, \quad w\pi\rho = -v\pi\rho.$$

При этом

$$p(x, v, \pi) + p(y, w, \rho) = \pi\rho \oplus \pi\rho + p(z, u, \pi\Delta\rho),$$

где $z = x(\pi \setminus \rho) + y(\rho \setminus \pi) + \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \pi\Delta\rho)$, а для $u \in \mathcal{M}^{\text{un}}$ выполняются равенства $u(\pi \setminus \rho) = v(\rho \setminus \pi)$, $u(\rho \setminus \pi) = w(\pi \setminus \rho)$. В частности, $p(x, v, \pi)p(y, w, \pi) = 0$ тогда и только тогда, когда $y\pi = (\mathbf{1} - x)\pi$, $w\pi = -v\pi$. При этом

$$p(x, v, \pi) + p(\mathbf{1} - x, -v, \pi) = \pi \oplus \pi.$$

Рассмотрим некоторые полезные в дальнейшем максимальные коммутативные W^* -подалгебры алгебры $\mathcal{N}$. Одной из таких подалгебр является $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ — прямая сумма двух экземпляров алгебры $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} \oplus \mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathcal{M} \right\}.$$

Ее максимальность следует из того факта, что если $p(x, v, \pi)$ принадлежит коммутанту $(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M})'$, то $p(x, v, \pi) = 0$. Каждой паре (x, v) , где

$$x \in \mathcal{M}^+, \quad x \leq \mathbf{1}, \quad \text{gr}(x(\mathbf{1} - x)) = \mathbf{1}, \quad v \in \mathcal{M}^{\text{un}}, \quad (3)$$

также соответствует коммутативная W^* -подалгебра $\mathcal{N}_{x,v}$ алгебры $\mathcal{N}$, которая характеризуется семейством своих ортопроекторов

$$\mathcal{N}_{x,v}^{\text{Pr}} = \{p(x, v, \pi_1) + p(\mathbf{1} - x, -v, \pi_2) : \pi_i \in \mathcal{M}^{\text{Pr}}, i = 1, 2\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{N}_{x,v}$ унитарно эквивалентна алгебре $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ (а значит, максимальна). Отметим также, что $\mathcal{N}_{x,v} = \mathcal{N}_{\mathbf{1}-x, -v}$.

Пусть G — множество всех пар (x, v) , удовлетворяющих условиям (3), $F \subset G$ и $(y, w) \in G$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{P} = \{\pi \in \mathcal{M}^{\text{Pr}} : \text{существует пара } (x, v) \in F, \text{ такая, что } y\pi = x\pi, w\pi = v\pi\}.$$

По теореме Цорна существует максимальное ортосемейство $(\pi_j) \subset \mathcal{P}$. При этом $\rho \equiv \sum_j \pi_j = \sup \mathcal{P}$. Тогда $y\rho = \sum_j x_j \pi_j$, $w\rho = \sum_j v_j \pi_j$, где $(x_j, v_j) \in F$ таковы, что $y\pi_j = x_j \pi_j$, $w\pi_j = v_j \pi_j$. Проектор $p(y, w, \rho)$ назовем F -ядром проектора

$p(y, w, \mathbf{1})$ и обозначим через $\zeta_F(p(y, w, \mathbf{1}))$. Это наибольший подпроектор проектора $p(y, w, \mathbf{1})$, представимый в виде ортогональной суммы проекторов вида $p(x, v, \pi)$, где $(x, v) \in F$. В наших обозначениях $\zeta_F(p(y, w, \mathbf{1})) = \sum_j p(x_j, v_j, \pi_j)$. Из однозначной определенности элемента ρ следует, что и F -ядро определено однозначно. Для $\pi \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ проектор $\zeta_F(p(y, w, \pi)) \equiv \zeta_F(p(y, w, \mathbf{1}))(\pi \otimes \mathbf{I})$ назовем F -ядром проектора $p(y, w, \pi)$.

Приведем элементарную лемму, полезную нам в дальнейшем.

Лемма 5. Система уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + \mu_1 = \lambda_0, \\ \lambda_2 + \mu_2 = \mu_0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \lambda^2, \\ \mu_1^2 + \mu_2^2 = \mu^2 \end{cases} \quad (4)$$

относительно неизвестных λ_i, μ_i ($i = 1, 2$) при известных вещественных правых частях, связанных равенством $\lambda_0^2 + \mu_0^2 = \lambda^2 + \mu^2$, разрешима в $\mathbb{R}$. При этом $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = 0$.

§2. Конструкция ортогональной векторной меры

Основная цель данного параграфа — доказательство следующей теоремы:

Теорема 6. Пусть $\mathcal{N}$ есть W^* -алгебра типа I_2 и $m: \mathcal{N}^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — мера на проекторах. Тогда существует гильбертово пространство H и ОВМ $\mu: \mathcal{N}^{\text{pr}} \rightarrow H$, такая, что

$$\|\mu(p)\|^2 = m(p), \quad p \in \mathcal{N}^{\text{pr}}. \quad (5)$$

Как известно [4, предложение 1.18.1], коммутативная W^* -алгебра $\mathcal{M}$ может быть реализована как алгебра $L^\infty(\Omega, \nu)$ в существенном ограниченных функций на некотором локализуемом пространстве Ω с мерой ν . (Это означает, что Ω является прямой суммой пространств Ω_i с конечными мерами ν_i (см. [5]).) При этом преддвойственным пространством $\mathcal{M}_*$ к $\mathcal{M}$ является пространство $L^1(\Omega, \nu)$ интегрируемых по мере ν функций. Далее мы отождествляем $\mathcal{M}$ с $L^\infty(\Omega, \nu)$. При этом проекторам $\pi \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ соответствуют характеристические функции

$$\pi(\omega) \equiv \chi_\pi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in \pi, \\ 0, & \text{если } \omega \notin \pi, \end{cases} \quad \pi \subset \Omega.$$

(Читатель с сожалением заметит, что одной и той же буквой π обозначаются (в зависимости от контекста) три объекта: проектор из $\mathcal{M}^{\text{pr}}$, ν -измеримое множество из Ω и характеристическая функция этого множества.) Из классической теории интеграла следует, что для каждой меры $\sigma: L^\infty(\Omega, \nu)^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ однозначно определена функция $h \in L^1(\Omega, \nu)$, $h \geq 0$, такая, что $\sigma(\pi) = \int \pi(\omega)h(\omega)\nu(d\omega) = \int_\pi h(\omega)\nu(d\omega)$. При таком подходе W^* -алгебра $\mathcal{N}$ реализуется как алгебра фон Неймана 2×2 -матриц (x_{ij}) , $x_{ij} \in L^\infty(\Omega, \nu)$, действующая в ортогональной сумме H двух копий гильбертова пространства $L^2(\Omega, \nu)$,

$$H = L^2(\Omega, \nu) \dot{+} L^2(\Omega, \nu) = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : f, g \in L^2(\Omega, \nu) \right\}.$$

Мы приведем построение ортогональной векторной меры в приведенных выше обозначениях. Нам будет полезно при этом следующее общее утверждение.

Лемма 7. Пусть $\mathcal{A}$ есть W^* -алгебра, $m: \mathcal{A}^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — мера на проекторах, а $\mu: \mathcal{A}^{\text{pr}} \rightarrow H$ — конечно-аддитивная ОВМ, причем $\|\mu(p)\|^2 = m(p)$, $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$. Тогда μ является ОВМ.

Доказательство. Следует проверить свойство (ii) определения 2. Пусть $p = \sum_{j \in J} p_j = w^* - \lim_{\sigma} \sum_{j \in \sigma} p_j$ (предел сети частных сумм, $\sigma \subset J$ конечны). Так как (ii) выполнено для конечных сумм, имеем

$$\left\| \mu(p) - \sum_{j \in \sigma} \mu(p_j) \right\|^2 = \left\| \mu \left(p - \sum_{j \in \sigma} p_j \right) \right\|^2 = m \left(p - \sum_{j \in \sigma} p_j \right) = m(p) - \sum_{j \in \sigma} m(p_j).$$

Из полной аддитивности меры m следует, что $\lim_{\sigma} [m(p) - \sum_{j \in \sigma} m(p_j)] = 0$. $\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть $m: \mathcal{N}^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — заданная мера на проекторах алгебры $L^\infty(\Omega, \nu) \otimes M_2$. Идея доказательства теоремы состоит в задании ОВМ со свойством (5) на проекторах алгебры $\mathcal{N}_0 \equiv \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$ и последующем ее продолжении на проекторы алгебры $\mathcal{N}$.

Множество G всех пар (x, v) со свойством (3) мы разобьем на двухэлементные множества $\{(x, v), (\mathbf{1} - x, -v)\}$ и «отметим» в каждом таком множестве одну пару, после чего индексирuem одним индексом γ множество всех отмеченных пар. Каждому индексу $\gamma = (x, v)$ сопоставим множество проекторов $\mathcal{N}_\gamma^{\text{pr}} \equiv \mathcal{N}_{x,v}^{\text{pr}}$, причем индексу 0 сопоставим $\mathcal{N}_0^{\text{pr}} \equiv \{\pi_1 \oplus \pi_2 : \pi_i \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, i = 1, 2\}$. Введем в этом множестве Γ индексов γ полный порядок, считая $0 = \min \Gamma$.

Так как $m|_{\mathcal{N}_0^{\text{pr}}}$ — мера на проекторах коммутативной алгебры $\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$, существуют (и определены однозначно) функции $0 \leq h_0, k_0 \in L^2(\Omega, \nu)$, такие, что

$$m(\pi_1 \oplus \pi_2) = \int_{\pi_1} h_0^2 d\nu + \int_{\pi_2} k_0^2 d\nu, \quad \pi_i \in \mathcal{M}^{\text{pr}}.$$

Аналогично, для любого $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$, $\gamma = (x, v)$, однозначно определены функции $0 \leq h_\gamma, k_\gamma \in L^2(\Omega, \nu)$, такие, что

$$m(p(x, v, \pi)) = \int_{\pi} h_\gamma^2 d\nu, \quad m(p(\mathbf{1} - x, -v, \pi)) = \int_{\pi} k_\gamma^2 d\nu, \quad \pi \in \mathcal{M}^{\text{pr}}. \quad (6)$$

При этом из леммы 4 и теоремы Радона–Никодима следует, что

$$h_\gamma^2(\omega) + k_\gamma^2(\omega) = h_0^2(\omega) + k_0^2(\omega) \quad \text{п. в.}$$

Определим ОВМ $\mu: \mathcal{N}_0^{\text{pr}} \rightarrow H$ на множестве $\text{Pr}[0] \equiv \mathcal{N}_0^{\text{pr}}$ (здесь $0 = \min \Gamma$) равенством

$$\mu(\pi_1 \oplus \pi_2) \equiv \begin{pmatrix} \pi_1 h_0 \\ \pi_2 k_0 \end{pmatrix}, \quad \pi_1, \pi_2 \in \mathcal{M}^{\text{pr}}. \quad (7)$$

Действительно, при $\mathcal{A} = \mathcal{N}_0$ удовлетворяются требования определения 2, а из (7) следует, что равенство (5) выполняется для $p \in \mathcal{N}_0^{\text{pr}}$.

Теперь продолжим μ до конечно-аддитивной ОВМ на множестве $\text{Pr}[0, 1]$ всех ортопроекторов вида

$$p = \pi_1 \oplus \pi_2 + p(x, v, \pi_3) + p(\mathbf{1} - x, -v, \pi_4), \quad \pi_i \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \quad (8)$$

где (x, v) — пара, удовлетворяющая условиям (3) и отвечающая индексу $1 \equiv \min(\Gamma \setminus \{0\})$, так что проектор p собран из слагаемых, принадлежащих объединению $\mathcal{N}_0^{\text{pr}} \cup \mathcal{N}_1^{\text{pr}}$. В силу леммы 4 можно считать, что $\pi_3\pi_4 = 0$. В этом случае мы назовем представление (8) *приведенным*. В этом представлении

$$\pi_1\pi_3 = \pi_1\pi_4 = \pi_2\pi_3 = \pi_2\pi_4 = \pi_3\pi_4 = 0, \quad (9)$$

и оно, как нетрудно видеть, однозначно: если, наряду с (8), p представлен в виде $\tau_1 \oplus \tau_2 + p(x, v, \tau_3) + p(\mathbf{1} - x, -v, \tau_4)$ с соотношениями ортогональности, аналогичными (9), то $\tau_i = \pi_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Множество $\text{Pr}[0, 1]$ удовлетворяет условию (iii) определения 2. Действительно, если q — еще один проектор с приведенным представлением вида (8),

$$q = \rho_1 \oplus \rho_2 + p(x, v, \rho_3) + p(\mathbf{1} - x, -v, \rho_4), \quad \rho_i \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \quad (10)$$

причем $pq = 0$, то с учетом леммы 4 нетрудно убедиться, что $p + q$ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} p + q &= (\pi_1 + \rho_1 + \pi_3\rho_4 + \pi_4\rho_3) \oplus (\pi_2 + \rho_2 + \pi_3\rho_4 + \pi_4\rho_3) \\ &\quad + p(x, v, \pi_3 \setminus \rho_4 + \rho_3 \setminus \pi_4) + p(\mathbf{1} - x, -v, \rho_4 \setminus \pi_3 + \pi_4 \setminus \rho_3). \end{aligned}$$

В силу (6) определены функции $0 \leq h_1, k_1 \in L^2(\Omega, \nu)$, такие, что

$$m(p(x, v, \pi)) = \int_{\pi} h_1^2 d\nu, \quad m(p(\mathbf{1} - x, -v, \pi)) = \int_{\pi} k_1^2 d\nu, \quad \pi \in \mathcal{M}^{\text{pr}}. \quad (11)$$

При этом $h_1^2(\omega) + k_1^2(\omega) = h_0^2(\omega) + k_0^2(\omega)$ п. в. В силу леммы 5 найдутся вещественные функции $0 \leq h_{1i}, k_{1i} \in L^2(\Omega, \nu)$, $i = 1, 2$, для которых п. в. справедливы равенства

$$h_{11}(\omega) + k_{11}(\omega) = h_0(\omega), \quad (12)$$

$$h_{12}(\omega) + k_{12}(\omega) = k_0(\omega), \quad (13)$$

$$h_{11}^2(\omega) + h_{12}^2(\omega) = h_1^2(\omega), \quad (14)$$

$$k_{11}^2(\omega) + k_{12}^2(\omega) = k_1^2(\omega), \quad (15)$$

$$h_{11}(\omega)k_{11}(\omega) + h_{12}(\omega)k_{12}(\omega) = 0. \quad (16)$$

Продолжим функцию μ , заданную равенством (7), на проекторы вида (8) формулой

$$\mu(p) \equiv \begin{pmatrix} \pi_1 h_0 + \pi_3 h_{11} + \pi_4 k_{11} \\ \pi_2 k_0 + \pi_3 h_{12} + \pi_4 k_{12} \end{pmatrix},$$

где h_{1i}, k_{1i} — фиксированные решения системы (12)–(15). Убедимся, что μ — конечно-аддитивная ОВМ на множестве $\text{Pr}[0, 1]$, для которой на этом множестве выполняется равенство (5). С учетом соотношений (9) имеем

$$\begin{aligned} \|\mu(p)\|^2 &= \int_{\pi_1} h_0^2 d\nu + \int_{\pi_3} h_{11}^2 d\nu + \int_{\pi_4} k_{11}^2 d\nu + \int_{\pi_2} k_0^2 d\nu + \int_{\pi_3} h_{12}^2 d\nu + \int_{\pi_4} k_{12}^2 d\nu \\ &= m(\pi_1 \oplus \pi_2) + \int_{\pi_3} h_1^2 d\nu + \int_{\pi_4} k_1^2 d\nu \\ &= m(\pi_1 \oplus \pi_2) + m(p(x, v, \pi_3)) + m(p(\mathbf{1} - x, -v, \pi_4)) = m(p). \end{aligned}$$

(Мы использовали здесь также равенства (14), (15), (6), (11).) Таким образом, на множестве $\text{Pr}[0, 1]$ условие (5) выполнено. Пусть q — еще один проектор

в приведенной форме (10) и $pq = 0$. Тогда для ρ_i справедливы соотношения ортогональности, аналогичные соотношениям (9), и, кроме того,

$$\pi_1\rho_1 = \pi_1\rho_3 = \pi_1\rho_4 = \pi_2\rho_2 = \pi_2\rho_3 = \pi_2\rho_4 = \pi_3\rho_3 = \pi_4\rho_4 = 0.$$

Поэтому, с учетом (16),

$$\begin{aligned} \langle \mu(p), \mu(q) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \pi_1 h_0 + \pi_3 h_{11} + \pi_4 k_{11} \\ \pi_2 k_0 + \pi_3 h_{12} + \pi_4 k_{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_1 h_0 + \rho_3 h_{11} + \rho_4 k_{11} \\ \rho_2 k_0 + \rho_3 h_{12} + \rho_4 k_{12} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_{\pi_3 \rho_4} (h_{11} k_{11} + h_{12} k_{12}) d\nu + \int_{\pi_4 \rho_3} (h_{11} k_{11} + h_{12} k_{12}) d\nu = 0. \end{aligned}$$

Осталось проверить, что $\mu(p+q) = \mu(p) + \mu(q)$. Представив $p+q$ в приведенной форме, получаем

$$\mu(p+q) = \begin{pmatrix} (\pi_1 + \rho_1 + \pi_3 \rho_4 + \pi_4 \rho_3) h_0 + (\pi_3 \setminus \rho_4 + \rho_3 \setminus \pi_4) h_{11} + (\rho_4 \setminus \pi_3 + \pi_4 \setminus \rho_3) k_{11} \\ (\pi_2 + \rho_2 + \pi_3 \rho_4 + \pi_4 \rho_3) k_0 + (\pi_3 \setminus \rho_4 + \rho_3 \setminus \pi_4) h_{12} + (\rho_4 \setminus \pi_3 + \pi_4 \setminus \rho_3) k_{12} \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем теперь первую координату вектора $\mu(p) + \mu(q)$:

$$\begin{aligned} \pi_1 h_0 + \pi_3 h_{11} + \pi_4 k_{11} + \rho_1 h_0 + \rho_3 h_{11} + \rho_4 k_{11} &= (\pi_1 + \rho_1) h_0 + \pi_3 \rho_4 (h_{11} + k_{11}) \\ &\quad + (\pi_3 \setminus \rho_4) h_{11} + (\pi_4 \setminus \rho_3) k_{11} + \pi_4 \rho_3 (h_{11} + k_{11}) + (\rho_3 \setminus \pi_4) h_{11} + (\rho_4 \setminus \pi_3) k_{11} \\ &= (\pi_1 + \rho_1 + \pi_3 \rho_4 + \pi_4 \rho_3) h_0 + (\pi_3 \setminus \rho_4 + \rho_3 \setminus \pi_4) h_{11} + (\pi_4 \setminus \rho_3 + \rho_4 \setminus \pi_3) k_{11}. \end{aligned}$$

(Мы здесь использовали (12).) Итак, она совпадает с первой координатой вектора $\mu(p+q)$. Аналогично устанавливается, что совпадают вторые координаты этих векторов. Итак, μ является ОВМ на $\text{Pr}[0, 1]$.

Пусть (предположение индукции) μ продолжена до конечно-аддитивной ОВМ на множестве

$$\text{Pr}[0, \delta) \equiv \{p_1 + \dots + p_s : p_k \in \mathcal{N}_{\gamma_k}^{pr}, \gamma_k < \delta\}$$

и $\delta = (y, w)$. Продолжим μ до конечно-аддитивной ОВМ на множестве $\text{Pr}[0, \delta]$ всех проекторов вида $p + p_\delta$, где $p \in \text{Pr}[0, \delta)$, $p_\delta \in \mathcal{N}_\delta^{pr}$. Пусть $p(y, w, \rho)$ есть $(0, \delta)$ -ядро проектора $p(y, w, \mathbf{1})$, где

$$(0, \delta) \equiv \{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \gamma < \delta\}, \quad \rho = \sum_{j \in J} \pi_j, \quad y \pi_j = x_j \pi_j, \quad w \pi_j = v_j \pi_j, \quad (x_j, v_j) < \delta.$$

В силу сказанного выше (см. (6)) определены плотности $h_j, k_j \in L^2(\Omega, \nu)$, соответствующие парам (x_j, v_j) , и h_δ, k_δ , соответствующие $\delta = (y, w)$, для которых выполняются равенства (6).

По предположению индукции уже определены вещественные функции $h_{j1}, k_{j1}, h_{j2}, k_{j2} \in L^2(\Omega, \nu)$, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} h_{j1}(\omega) + k_{j1}(\omega) = h_0(\omega), \\ h_{j2}(\omega) + k_{j2}(\omega) = k_0(\omega), \\ h_{j1}^2(\omega) + h_{j2}^2(\omega) = h_j^2(\omega), \\ k_{j1}^2(\omega) + k_{j2}^2(\omega) = k_j^2(\omega), \end{cases}$$

причем

$$h_{j1}(\omega) k_{j1}(\omega) + h_{j2}(\omega) k_{j2}(\omega) = 0. \quad (17)$$

Найдем также функции $\tilde{h}_{\delta 1}, \tilde{k}_{\delta 1}, \tilde{h}_{\delta 2}, \tilde{k}_{\delta 2} \in L^2(\Omega, \nu)$, являющиеся решением системы

$$\begin{cases} \tilde{h}_{\delta 1}(\omega) + \tilde{k}_{\delta 1}(\omega) = h_0(\omega), \\ \tilde{h}_{\delta 2}(\omega) + \tilde{k}_{\delta 2}(\omega) = k_0(\omega), \\ \tilde{h}_{\delta 1}^2(\omega) + \tilde{h}_{\delta 2}^2(\omega) = h_\delta^2(\omega), \\ \tilde{k}_{\delta 1}^2(\omega) + \tilde{k}_{\delta 2}^2(\omega) = k_\delta^2(\omega), \end{cases} \quad (18)$$

Тогда на Ω корректно определены функции

$$\begin{aligned} h_{\delta i}(\omega) &\equiv (\mathbf{1} - \rho)\tilde{h}_{\delta i}(\omega) + \sum_j \pi_j(\omega)h_{ji}(\omega), \\ k_{\delta i}(\omega) &\equiv (\mathbf{1} - \rho)\tilde{k}_{\delta i}(\omega) + \sum_j \pi_j(\omega)k_{ji}(\omega), \end{aligned} \quad i = 1, 2.$$

Убедимся, что при таком определении функций $h_{\delta i}, k_{\delta i}$ ($i = 1, 2$) выполнены равенства¹⁾

$$h_{\delta 1}^2(\omega) + h_{\delta 2}^2(\omega) = h_\delta^2(\omega), \quad k_{\delta 1}^2(\omega) + k_{\delta 2}^2(\omega) = k_\delta^2(\omega) \quad \text{п. в.}, \quad (19)$$

$$h_{\delta 1}(\omega)k_{\delta 1}(\omega) + h_{\delta 2}(\omega)k_{\delta 2}(\omega) = 0 \quad \text{п. в.} \quad (20)$$

Действительно,

$$h_{\delta 1}^2 + h_{\delta 2}^2 = (\mathbf{1} - \rho)(\tilde{h}_{\delta 1}^2 + \tilde{h}_{\delta 2}^2) + \sum_j \pi_j(h_{j1}^2 + h_{j2}^2) = (\mathbf{1} - \rho)h_\delta^2 + \sum_j \pi_j h_j^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_\pi (h_{\delta 1}^2 + h_{\delta 2}^2) d\nu &= \int_{(\mathbf{1}-\rho)\pi} h_\delta^2 d\nu + \sum_j \int_{\rho\pi} h_j^2 d\nu \\ &= m(p(y, w, \pi(\mathbf{1} - \rho))) + \sum_j m(p(x_j, v_j, \pi_j\pi)) \\ &= m(p(y, w, \pi(\mathbf{1} - \rho))) + \sum_j m(p(y, w, \pi_j\pi)) = m(p(y, w, \pi)) = \int_\pi h_\delta^2 d\nu, \quad \pi \subset \Omega, \end{aligned}$$

и из теоремы Радона–Никодима следует первое равенство в (19). Аналогично устанавливается справедливость второго равенства в (19), а также (20).

Теперь для любого проектора вида $p + p_\delta$ ($pp_\delta = 0$), где $p \in \text{Pr}[0, \delta]$, а

$$p_\delta = p(y, w, \rho_1) + p(\mathbf{1} - y, -w, \rho_2), \quad \rho_i \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \quad (21)$$

положим

$$\mu(p + p_\delta) \equiv \mu(p) + \left(\frac{\rho_1 h_{\delta 1} + \rho_2 k_{\delta 1}}{\rho_1 h_{\delta 2} + \rho_2 k_{\delta 2}} \right). \quad (22)$$

Покажем, что μ — конечно-аддитивная ОВМ на множестве $\text{Pr}[0, \delta]$. Покажем сначала, что

$$\langle \mu(p), \mu(p_\delta) \rangle = 0. \quad (23)$$

¹⁾Мы не можем взять в качестве $h_{\delta i}, k_{\delta i}$ решения системы (18), так как решение системы (4) (см. лемму 5) не единственно, и на новом шаге индукции в точках ω , принадлежащих подмножеству $\rho \subset \Omega$, характеризующему $(0, \delta)$ -ядро проектора $p(y, w, \mathbf{1})$, необходимо согласование решения системы (18) с решениями, соответствующими индексам $(x_j, v_j) < \delta$.

Так как p является суммой ортогональных проекторов вида $p(x, v, \pi)$, $p(\mathbf{1} - z, -u, \tau)$ с $(x, v), (z, u) < \delta$, то достаточно проверить (23) лишь для проекторов указанного вида. Пусть, например, $p = p(x, v, \pi)$, $\gamma = (x, v) < \delta$. Так как $pp_\delta = 0$, имеем с учетом леммы 4

$$p(y, w, \rho_1) = p(y, w, \rho_1 \pi) + p(y, w, \rho_1 \setminus \pi) = p(\mathbf{1} - x, -v, \rho_1 \pi) + p(y, w, \rho_1 \setminus \pi).$$

Согласно (22),

$$\mu(p(x, v, \pi)) = \begin{pmatrix} \pi h_{\gamma_1} \\ \pi h_{\gamma_2} \end{pmatrix}, \quad \mu(p(y, w, \rho_1)) = \begin{pmatrix} \rho_1 h_{\delta_1} \\ \rho_1 h_{\delta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \pi k_{\gamma_1} + (\rho_1 \setminus \pi) h_{\delta_1} \\ \rho_1 \pi k_{\gamma_2} + (\rho_1 \setminus \pi) h_{\delta_2} \end{pmatrix},$$

так что с учетом (17) (куда вместо j можно поставить любой индекс $\leq \delta$) получаем

$$\langle \mu(p(x, v, \pi)), \mu(p(y, w, \rho_1)) \rangle = \int_{\rho_1 \pi} (h_{\gamma_1} k_{\gamma_1} + h_{\gamma_2} k_{\gamma_2}) d\nu = 0.$$

Аналогично устанавливается, что $\langle \mu(p(x, v, \pi)), \mu(p(\mathbf{1} - y, -w, \rho_2)) \rangle = 0$, так что $\langle \mu(p(x, v, \pi)), \mu(p_\delta) \rangle = 0$. Точно так же

$$p(\mathbf{1} - z, -u, \tau) p_\delta = 0 \implies \langle \mu(p(\mathbf{1} - z, -u, \tau)), \mu(p_\delta) \rangle = 0.$$

Итак, (23) установлено.

Проверим выполнение равенства (5) на множестве $\text{Pr}[0, \delta]$. Для проектора p_δ , заданного равенством (21), имеем в соответствии с (22)

$$\|\mu(p_\delta)\|^2 = \int_{\rho_1} (h_{\delta_1}^2 + h_{\delta_2}^2) d\nu + \int_{\rho_2} (k_{\delta_1}^2 + k_{\delta_2}^2) d\nu = \int_{\rho_1} h_\delta^2 d\nu + \int_{\rho_2} k_\delta^2 d\nu = m(p_\delta).$$

Для проектора вида $p + p_\delta$, $p \in \text{Pr}[0, \delta]$, имеем в силу ортогональности $pp_\delta = 0$ и доказанной выше ортогональности векторов $\mu(p)$ и $\mu(p_\delta)$

$$\|\mu(p + p_\delta)\|^2 = \|\mu(p) + \mu(p_\delta)\|^2 = \|\mu(p)\|^2 + \|\mu(p_\delta)\|^2 = m(p) + m(p_\delta) = m(p + p_\delta),$$

что и требуется.

Пусть теперь $q + q_\delta$ — еще один проектор из $\text{Pr}[0, \delta]$, где $q \in \text{Pr}[0, \delta]$, а

$$q_\delta = p(y, w, \tau_1) + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau_2), \quad \tau_i \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \quad (24)$$

причем $(p + p_\delta)(q + q_\delta) = 0$. Тогда $pq = pq_\delta = qp_\delta = p_\delta q_\delta = 0$, а значит, $\langle \mu(p), \mu(q) \rangle = 0$ по предположению индукции и $\langle \mu(p), \mu(q_\delta) \rangle = \langle \mu(q), \mu(p_\delta) \rangle = 0$ по доказанному выше (см. (23)). Далее, из равенств

$$0 = p_\delta q_\delta = p(y, w, \tau_1 \rho_1) + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau_2 \rho_2)$$

следует, что $\tau_1 \rho_1 = \tau_2 \rho_2 = 0$, так что с учетом (20)

$$\begin{aligned} \langle \mu(p_\delta), \mu(q_\delta) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} \rho_1 h_{\delta_1} + \rho_2 k_{\delta_1} \\ \rho_1 h_{\delta_2} + \rho_2 k_{\delta_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau_1 h_{\delta_1} + \tau_2 k_{\delta_1} \\ \tau_1 h_{\delta_2} + \tau_2 k_{\delta_2} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_{\rho_1 \tau_2} (h_{\delta_1} k_{\delta_1} + h_{\delta_2} k_{\delta_2}) d\nu + \int_{\rho_2 \tau_1} (h_{\delta_1} k_{\delta_1} + h_{\delta_2} k_{\delta_2}) d\nu = 0. \end{aligned}$$

Из всех этих равенств теперь вытекает, что $\langle \mu(p + p_\delta), \mu(q + q_\delta) \rangle = 0$. Наконец, для ортогональных проекторов $p + p_\delta$, $q + q_\delta$, где p_δ , q_δ заданы равенствами (21), (24), как показывают прямые вычисления, справедливо равенство $\mu(p + p_\delta + q + q_\delta) = \mu(p + p_\delta) + \mu(q + q_\delta)$.

Таким образом, установлено, что μ — конечно-аддитивная ОВМ на множестве $\text{Pr}[0, \delta]$, и из леммы 3 следует, что по индукции μ оказалась продолженной на $\mathcal{N}^{\text{pr}}$. Применение леммы 7 к конечно-аддитивной ОВМ μ завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 8. W^* -фактор типа I_2 изоморфен алгебре M_2 комплексных 2×2 -матриц. В этом случае конструкцию ОВМ можно получить в явном виде. Заметим (см. (1)), что проекторы размерности 1 в алгебре M_2 суть матрицы вида $p(\lambda, e^{it})$, $0 \leq t < 2\pi$ (здесь $\pi = 3,14 \dots$!). Пусть $m: M_2^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — мера на проекторах, $m(\mathbf{I}) = 1$. Пусть $m_{\lambda,t} = m(p(\lambda, e^{it}))$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq t < 2\pi$, и

$$\alpha_{\lambda,t} = \begin{cases} \sqrt{m_{\lambda,t} - m_{\lambda,t}^2}, & \text{если } 0 \leq t < \pi, \\ -\sqrt{m_{\lambda,t} - m_{\lambda,t}^2}, & \text{если } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

В качестве H возьмем комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^2$. Тогда отображение $\mu: M_2^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{C}^2$, определенное равенством

$$\mu(p) = \begin{cases} (0, 1), & \text{если } p = \mathbf{I}, \\ (\alpha_{\lambda,t}, m_{\lambda,t}), & \text{если } p = p(\lambda, t), \\ (0, 0), & \text{если } p = 0, \end{cases}$$

— искомая ОВМ. Отметим, что данная конструкция получается из приведенной в доказательстве теоремы 6 подходящим преобразованием координат в $\mathbb{C}^2$.

Следствие 9. Пусть $m: \mathcal{A}^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — мера на проекторах произвольной W^* -алгебры $\mathcal{A}$. Тогда существует гильбертово пространство H и ОВМ $\mu: \mathcal{A}^{\text{pr}} \rightarrow H$, такая, что $\|\mu(p)\|^2 = m(p)$, $p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$.

Доказательство. Поскольку ОВМ однозначно определяется своими ограничениями на прямые слагаемые W^* -алгебры, утверждение следует из теоремы 6 и из доказательства теоремы работы [1]. $\square$

§3. О произведении мер в W^* -алгебре типа I_2

Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ суть W^* -алгебры и $m_i: \mathcal{M}_i^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ — меры на проекторах. Можно рассмотреть задачу построения произведения $m_1 \otimes m_2$ этих мер на проекторах алгебры $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$, удовлетворяющего равенству

$$(m_1 \otimes m_2)(p \otimes q) = m_1(p)m_2(q), \quad p \in \mathcal{M}_1^{\text{pr}}, q \in \mathcal{M}_2^{\text{pr}}.$$

В классическом случае, когда $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ коммутативны, мы можем рассмотреть их реализацию алгебрами $L^\infty(\Omega_i, \nu_i)$, и тогда, согласно классической теории меры Лебега, приходим к известной конструкции произведения мер на проекторах алгебры $L^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2, \nu_1 \times \nu_2)$. В этом случае $m_1 \otimes m_2$ определяется однозначно.

В этом параграфе мы рассмотрим более общую задачу в контексте алгебр типа I_2 : $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$ — коммутативная W^* -алгебра, $\mathcal{M}_2 = M_2$ — алгебра 2×2 -матриц над полем $\mathbb{C}$. Нам будет удобно переформулировать задачу в терминах продолжения меры. Пусть

$$\mathcal{M}^{\text{pr}} \otimes M_2^{\text{pr}} = \{p \otimes q : p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, q \in M_2^{\text{pr}}\}$$

и функция $m: \mathcal{M}^{\text{pr}} \otimes M_2^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ раздельно вполне ортоаддитивна (т. е. вполне аддитивна по каждому переменному при фиксированном другом¹⁾). Требуется продолжить m до меры на проекторах алгебры $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes M_2$.

Нам будет полезно знать, как устроены проекторы из $\mathcal{N}^{\text{pr}}$, представимые в виде

$$p = \sum_{i \in I} p_i, \quad p_i p_j = 0 \quad (i \neq j), \quad p_i \in \mathcal{M}^{\text{pr}} \otimes M_2^{\text{pr}}. \quad (25)$$

Этот класс проекторов обозначим через Σ_0 , и нашей ближайшей задачей будет продолжение функции m до меры на классе Σ_0 . Слагаемые в правой части формулы (25) принадлежат классам $(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M})^{\text{pr}}$, $\mathcal{N}_{\lambda, \alpha}^{\text{pr}}$, $0 < \lambda < 1$, $|\alpha| = 1$, где (см. обозначения §1)

$$\mathcal{N}_{\lambda, \alpha}^{\text{pr}} = \{\pi \otimes p(\lambda, \alpha) + \rho \otimes p(1 - \lambda, -\alpha) : \pi, \rho \in \mathcal{M}^{\text{pr}}\} = \mathcal{N}_{1-\lambda, -\alpha}^{\text{pr}}.$$

Нетрудно видеть, что указанные классы пересекаются лишь по центру:

$$(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M})^{\text{pr}} \cap \mathcal{N}_{\lambda, \alpha}^{\text{pr}} = \mathcal{N}_{\lambda, \alpha}^{\text{pr}} \cap \mathcal{N}_{\mu, \gamma}^{\text{pr}} = \mathcal{Z}(\mathcal{N})^{\text{pr}},$$

если $(\mu, \gamma) \neq (\lambda, \alpha), (1 - \lambda, -\alpha)$. Поэтому проекторы вида (25) после соответствующей группировки слагаемых приводятся к виду

$$p = \tau_1 \oplus \tau_2 + \sum_{j \in J} \pi_j \otimes p(\lambda_j, \alpha_j), \quad \tau_1, \tau_2, \pi_j \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \quad 0 < \lambda_j < 1, \quad |\alpha_j| = 1, \quad (26)$$

где пары (λ_j, α_j) попарно различны, $\pi_j \pi_k = 0$ ($j \neq k$). Фактически мы получили представление проекторов вида (25) в канонической форме (2):

$$p = \tau_1 \oplus \tau_2 + p(x, v, \pi), \quad \text{где } \pi = \sum_{j \in J} \pi_j, \quad x = \sum_{j \in J} \lambda_j \pi_j + \frac{1 - \pi}{2}, \quad v = \sum_{j \in J} \alpha_j \pi_j + 1 - \pi.$$

В качестве первого шага продолжим функцию m , изначально заданную на множестве $\mathcal{M}^{\text{pr}} \otimes M_2^{\text{pr}}$, на множество $(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M})^{\text{pr}} \cup (\bigcup_{\lambda, \alpha} \mathcal{N}_{\lambda, \alpha}^{\text{pr}})$, полагая

$$n_0(\tau_1 \oplus \tau_2) \equiv m(\tau_1 \otimes p(1, 1)) + m(\tau_2 \otimes p(0, 1)),$$

$$n_0(\pi \otimes p(\lambda, \alpha) + \rho \otimes p(1 - \lambda, -\alpha)) \equiv m(\pi \otimes p(\lambda, \alpha)) + m(\rho \otimes p(1 - \lambda, -\alpha)).$$

Корректность такого продолжения следует из согласованности n_0 и m на центральных проекторах:

$$\begin{aligned} n_0(\tau \oplus \tau) &= m(\tau \otimes p(\lambda, \alpha)) + m(\tau \otimes p(1 - \lambda, -\alpha)) \\ &= m(\tau \otimes (p(\lambda, \alpha) + p(1 - \lambda, -\alpha))) = m(\tau \otimes \mathbf{I}) = m(\tau \oplus \tau). \end{aligned}$$

Из раздельной полной аддитивности функции m по каждому аргументу непосредственно вытекает, что ограничения $n_0|_{(\mathcal{M} \oplus \mathcal{M})^{\text{pr}}}$, $n_0|_{\mathcal{N}_{\lambda, \alpha}^{\text{pr}}}$ суть меры на соответствующих классах.

Продолжим теперь функцию n_0 на класс Σ_0 , задав ее на проекторах вида (26) равенством

$$n_0(p) \equiv n_0(\tau_1 \oplus \tau_2) + \sum_{j \in J} m(\pi_j \otimes p(\lambda_j, \alpha_j)). \quad (27)$$

¹⁾По 2-му аргументу, очевидно, полная ортоаддитивность эквивалентна ортоаддитивности.

(Мы используем для продолжения ту же букву n_0 в надежде, что это не приведет к недоразумениям.)

Лемма 10. *Функция $n_0: \Sigma_0 \rightarrow \mathbb{R}_+$, заданная равенством (27), корректно определена и является мерой на Σ_0 .*

Доказательство. Корректность следует из однозначности канонического представления проектора. Остается убедиться в полной аддитивности функции n_0 на Σ_0 .

Пусть проектор p , заданный равенством (26), является ортогональной суммой проекторов из этого же класса Σ_0 ,

$$p = \sum_k p_k, \quad \text{где } p_k = \tau_{k1} \oplus \tau_{k2} + \sum_i \pi_{ki} \otimes p(\lambda_{ki}, \alpha_{ki}). \quad (28)$$

Пусть сначала центральное ядро $\rho \otimes \mathbf{I} \equiv \zeta(\sum_{k,i} \pi_{ki} \otimes p(\lambda_{ki}, \alpha_{ki}))$ равно 0. В этом случае семейство $(\pi_{ki})_{k,i}$ состоит из попарно ортогональных проекторов. (Если, напротив, $\pi_{ki}\pi_{k'i'} \neq 0$, то в силу леммы 4

$$\rho \otimes \mathbf{I} \geq \zeta(\pi_{ki} \otimes p(\lambda_{ki}, \alpha_{ki}) + \pi_{k'i'} \otimes p(\lambda_{k'i'}, \alpha_{k'i'})) = \pi_{ki}\pi_{k'i'} \otimes \mathbf{I} \neq 0$$

— противоречие.) Поэтому

$$\tau_1 \oplus \tau_2 + \sum_{j \in J} \pi_j \otimes p(\lambda_j, \alpha_j) = \left(\sum_k \tau_{k1} \right) \oplus \left(\sum_k \tau_{k2} \right) + \sum_{k,i} \pi_{ki} \otimes p(\lambda_{ki}, \alpha_{ki}).$$

Следовательно,

$$\tau_1 \oplus \tau_2 = \left(\sum_k \tau_{k1} \right) \oplus \left(\sum_k \tau_{k2} \right), \quad \sum_{j \in J} \pi_j \otimes p(\lambda_j, \alpha_j) = \sum_{k,i} \pi_{ki} \otimes p(\lambda_{ki}, \alpha_{ki}).$$

При этом $\sum_{j \in J} \pi_j = \sum_{k,i} \pi_{ki}$. Умножив обе части равенства (28) на $\pi_j \otimes \mathbf{I}$ при фиксированном $j \in J$ (см. (26)), получим

$$\pi_j \otimes p(\lambda_j, \alpha_j) = \sum_{k,i} \pi_{ki} \pi_j \otimes p(\lambda_{ki}, \alpha_{ki}).$$

Кроме того, если $\pi_{ki}\pi_j \neq 0$, то обязательно $\lambda_{ki} = \lambda_j$, $\alpha_{ki} = \alpha_j$. Поэтому

$$\begin{aligned} n_0(p) &= n_0(\tau_1 \oplus \tau_2) + \sum_{j \in J} m(\pi_j \otimes p(\lambda_j, \alpha_j)) \\ &= n_0\left(\left(\sum_k \tau_{k1}\right) \oplus \left(\sum_k \tau_{k2}\right)\right) + \sum_j \sum_{k,i} m(\pi_{ki} \pi_j \otimes p(\lambda_j, \alpha_j)) \\ &= \sum_k \left[n_0(\tau_{k1} \oplus \tau_{k2}) + \sum_i m(\pi_{ki} \otimes p(\lambda_{ki}, \alpha_{ki})) \right] = \sum_k n_0(p_k). \end{aligned}$$

Случай, когда $\rho \otimes \mathbf{I} = \zeta(\sum_{k,i} \pi_{ki} \otimes p(\lambda_{ki}, \alpha_{ki})) \neq 0$ (а значит, $\rho \neq 0$) легко сводится к предыдущему, если учесть представление

$$\sum_k p_k = \left(\rho + \sum_k \tau_{k1} \right) \oplus \left(\rho + \sum_k \tau_{k2} \right) + \sum_{k,i} (\pi_{k1} \setminus \rho) \otimes p(\lambda_{k,i}, \alpha_{k,i}). \quad \square$$

Мы подготовлены к доказательству основного результата этого параграфа.

Теорема 11. Пусть $\mathcal{M}$ — коммутативная W^* -алгебра и $m: \mathcal{M}^{\text{pr}} \otimes M_2^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ раздельно вполне ортоаддитивна¹⁾. Тогда m продолжается до меры на проекторах алгебры $\mathcal{M} \otimes M_2$. Если, в частности, $\mathcal{M}$ атомическая, то продолжение единственно.

Доказательство. Начнем с частного утверждения. Если $\mathcal{M}$ — атомическая алгебра, то, как нетрудно видеть, $\mathcal{N}^{\text{pr}} = (\mathcal{M} \otimes M_2)^{\text{pr}} = \Sigma_0$. Из доказательства леммы 10 следует, что мера n_0 однозначно определяется мерой m . Таким образом, n_0 является ее единственным продолжением.

Переходим к общему случаю. Пусть G — множество всех пар (x, v) из (3), а G_0 — множество пар, удовлетворяющих условиям

$$x = \sum_j \lambda_j \tau_j, \quad v = \sum_j \alpha_j \tau_j, \quad \text{где } \tau_j \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \quad \sum_j \tau_j = \mathbf{1}, \quad 0 < \lambda_j < 1, \quad |\alpha_j| = 1.$$

Рассмотрим двухэлементные множества $\{(x, v), (\mathbf{1} - x, -v)\}$, $(x, v) \in G \setminus G_0$. В каждом таком наборе «отметим» одну пару и индексируем одним индексом β множество всех отмеченных пар. Введем в множестве B индексов β полный порядок. Пусть индексу $1 = \min B$ соответствует пара (y, w) . Пусть $\zeta_0(p(y, w, \mathbf{1})) \equiv \zeta_{G_0}(p(y, w, \mathbf{1}))$ есть G_0 -ядро проектора $p(y, w, \mathbf{1})$. Из его конструкции следует, что оно принадлежит классу Σ_0 и имеет вид

$$\zeta_0(p(y, w, \mathbf{1})) = \sum_j \pi_j \otimes p(\lambda_j, \alpha_j) = p(y, w, \rho), \quad \rho = \sum_j \pi_j, \quad (29)$$

так что

$$p(y, w, \mathbf{1}) = \zeta_0(p(y, w, \mathbf{1})) + p(y, w, \mathbf{1} - \rho).$$

Продолжим n_0 на класс

$$\Sigma_1 \equiv \{p + q : p \in \Sigma_0, q \in \mathcal{N}_1^{\text{pr}}, pq = 0\}.$$

Для этого заметим, что каждый проектор $r \in \Sigma_1$ однозначно представим в виде

$$r = r_0 + p(y, w, \pi) + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau), \quad (30)$$

где $r_0 \in \Sigma_0$, $\pi, \tau \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, $\pi\tau = \pi\rho = \tau\rho = 0$, а ρ определен в (29). Действительно, если $r = p + q$, $p \in \Sigma_0$, $q = p(y, w, \pi') + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau')$, $\pi', \tau' \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, $pq = 0$, то можно считать, что $\pi'\tau' = 0$. (В противном случае $q = (\pi'\tau') \otimes \mathbf{I} + p(y, w, \pi' \setminus \tau') + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau' \setminus \pi')$ и слагаемое $\pi'\tau' \otimes \mathbf{I} \in \Sigma_0$ можно присоединить к проектору p .) G_0 -ядра

$$\zeta_0(p(y, w, \pi)) = p(y, w, \pi\rho), \quad \zeta_0(p(\mathbf{1} - y, -w, \tau)) = p(\mathbf{1} - y, -w, \tau\rho)$$

также принадлежат Σ_0 , так что, полагая

$$r_0 = p + \zeta_0(p(y, w, \pi')) + \zeta_0(p(\mathbf{1} - y, -w, \tau')), \quad \pi = \pi' \setminus \rho, \quad \tau = \tau' \setminus \rho,$$

приходим к представлению (30).

Для проектора r , заданного равенством (30), положим

$$n_1(r) \equiv n_0(r_0) + m(\tau \otimes \mathbf{I}).$$

¹⁾См. предыдущее подстрочное примечание.

Ясно, что $n_1 \mid \Sigma_0 = n_0$. Убедимся, что n_1 — мера на классе Σ_1 . Пусть $r \in \Sigma_1$ является ортогональной суммой проекторов $r_i \in \Sigma_1$ ($i \in I$), r задан равенством (30) и аналогичными равенствами заданы r_i :

$$r_i = p_i + p(y, w, \pi_i) + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau_i), \quad p_i \in \Sigma_0, \pi_i, \tau_i = \pi_i \rho = \tau_i \rho = 0.$$

Учитывая попарную ортогональность проекторов в наборах $(p_i)_{i \in I}$, $(\pi_i)_{i \in I}$, $(\tau_i)_{i \in I}$, получаем, что

$$r = \sum_i r_i = \sum_i p_i + p\left(y, w, \sum_i \pi_i\right) + p\left(\mathbf{1} - y, -w, \sum_i \tau_i\right).$$

Для преобразования правой части этого равенства к представлению вида (30) воспользуемся леммой 4. Имеем

$$\begin{aligned} r &= r_0 + p(y, w, \pi) + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau) \\ &= \sum_i p_i + \left(\sum_i \pi_i\right) \left(\sum_i \tau_i\right) \otimes \mathbf{I} + p(y, w, \pi') + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau'), \end{aligned} \quad (31)$$

где $\pi' = (\sum_i \pi_i) \setminus (\sum_i \tau_i)$, $\tau' = (\sum_i \tau_i) \setminus (\sum_i \pi_i)$. При этом $\pi' \tau' = \pi' \rho = \tau' \rho = 0$, так что представление (31) является представлением типа (30), и в силу его однозначности

$$r_0 = \sum_i p_i + \left(\sum_{i,j} \pi_i \tau_j\right) \otimes \mathbf{I}, \quad \tau = \tau' = \left(\sum_i \tau_i\right) \setminus \left(\sum_i \pi_i\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_i n_1(r_i) &= \sum_i (n_0(p_i) + m(\tau_i \otimes \mathbf{I})) \\ &= n_0\left(\sum_i p_i\right) + \sum_i m\left(\left(\sum_j \tau_j \pi_j\right) \otimes \mathbf{I}\right) + \sum_i m\left(\tau_i \setminus \left(\left(\sum_j \pi_j\right) \otimes \mathbf{I}\right)\right) \\ &= n_0\left(\sum_i p_i + \left(\sum_{i,j} \tau_i \pi_j\right) \otimes \mathbf{I}\right) + m\left(\left(\left(\sum_i \tau_i\right) \setminus \left(\sum_j \pi_j\right)\right) \otimes \mathbf{I}\right) \\ &= n_0(r_0) + m(\tau \otimes \mathbf{I}) = n_1(r). \end{aligned}$$

Итак, n_1 — мера на классе Σ_1 .

Пусть (предположение индукции) m продолжена до меры $n_{\beta-}$ на классе $\Sigma_{\beta-}$ проекторов p , представимых в виде суммы $p = \sum_i p_i$, где $p_i \in \mathcal{N}_{\beta_i}^{\text{pr}}$, $\beta_i < \beta$, и пусть $\beta = (y, w) \in B$. Продолжим теперь $n_{\beta-}$ до меры n_β на классе

$$\Sigma_\beta = \{p + q : p \in \Sigma_{\beta-}, q \in \mathcal{N}_\beta^{\text{pr}}\}.$$

Пусть $G_\beta = \{(x, v) \in B : (x, v) < \beta\}$ и $\zeta_{\beta-}(p(y, w, \mathbf{1})), \zeta_{\beta-}(p(\mathbf{1} - y, w, \mathbf{1}))$ суть G_β -ядра соответствующих проекторов, а $\rho \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$ таков, что $\zeta_{\beta-}(p(y, w, \mathbf{1})) = p(y, w, \rho)$. Аналогично сказанному выше, каждый проектор r из класса Σ_β однозначно представим в виде

$$r = r_{\beta-} + p(y, w, \pi) + p(\mathbf{1} - y, -w, \tau), \quad (32)$$

где $r_{\beta-} \in \Sigma_{\beta-}$, $\pi \tau = \pi \rho = \tau \rho = 0$. Положим

$$n_\beta(r) \equiv n_{\beta-}(r_{\beta-}) + m(\tau \otimes \mathbf{I}). \quad (33)$$

Приведенные выше (при первом шаге индукции) аргументы полностью сохраняются для проверки полной аддитивности n_β . Поскольку в силу леммы 3 каждый проектор $p \in \mathcal{N}^{\text{pr}}$ принадлежит некоторому классу Σ_β , равенство

$$m(p) \equiv n_\beta(p), \quad \text{если } p \in \Sigma_\beta,$$

задает искомое продолжение функции m на $\mathcal{N}^{\text{pr}}$. $\square$

Замечание 12. Из доказательства теоремы 11 видно, что на классы Σ_β мера m может быть для проектора вида (32) продолжена по формуле (вместо (33))

$$n_\beta(r) \equiv n_{\beta-}(r_{\beta-}) + m(\pi \otimes \mathbf{I}).$$

Отсюда следует, в частности, что для неатомической алгебры $\mathcal{M}$ продолжение функции m на $(\mathcal{M} \otimes M_2)^{\text{pr}}$ не единственно.

Замечание 13. В случае, когда W^* -алгебра $\mathcal{A}$ не коммутативна, задача о продолжении произведения мер-сомножителей до меры на проекторах алгебры $\mathcal{A} \otimes M_2$, вообще говоря, неразрешима. Действительно, если $\mathcal{A}$ есть W^* -фактор типа I_n ($2 \leq n \leq \infty$) и m_1 — произвольная мера на $\mathcal{A}^{\text{pr}}$, а m_2 — двузначная мера на M_2^{pr} , то, допустив, что m , заданная равенством $m(p \otimes q) = m_1(p)m_2(q)$ ($p \in \mathcal{A}^{\text{pr}}$, $q \in M_2^{\text{pr}}$), продолжается до меры на проекторах W^* -алгебры $\mathcal{A} \otimes M_2$, можно утверждать (в силу результата Глисона–Кристенсена–Йедона), что эта мера продолжается до нормального линейного функционала φ на $\mathcal{A} \otimes M_2$ (так как эта алгебра не содержит прямого слагаемого типа I_2). Поэтому ограничение $\varphi|_{(\mathbf{1} \otimes M_2)}$ — непрерывный линейный функционал, что невозможно, поскольку $\varphi|_{(\mathbf{1} \otimes M_2)^{\text{pr}}}$ — двузначная функция.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] J. Hamhalter, *States on W^* -algebras and orthogonal vector measures*, Proc. Amer. Math. Soc., **110**:3 (1990), 803–806.
- [2] S. Maeda, *Probability measures on projections in von Neumann algebras*, Rev. Math. Phys., **1**:2–3 (1990), 235–290.
- [3] А. Н. Шерстнев, *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла*, Физматлит, М., 2008.
- [4] S. Sakai, *C^* -Algebras and W^* -Algebras*, Springer-Verlag, N.Y.–Heidelberg–Berlin, 1971.
- [5] I. Segal, *Equivalence of measure spaces*, Amer. J. Math., **73** (1951), 275–313.
- [6] A. N. Sherstnev, *Measures on projections in a W^* -algebra of type I_2* , <http://arxiv.org/abs/1112.5569v1>.

Казанский федеральный университет
e-mail: anatolij.sherstnev@gmail.com

Поступило в редакцию
27 февраля 2012 г.