Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, А. А. Перфильев, Точная теорема
экстраполяции для операторов, *Функц. анализ и
его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 66–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa313>

Использование Общероссийского математического портала Math-
Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользователь-
ским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:13:40

УДК 513.88

Точная теорема экстраполяции для операторов

© 2000. Е. И. БЕРЕЖНОЙ, А. А. ПЕРФИЛЬЕВ

Первая теорема экстраполяции была предложена Яно [1] в 1951 г. Теорема Яно утверждает, что линейный оператор, нормы которого допускают оценку $\|T\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq c/(p-1)^s$, где $p \in (1, 2]$, c не зависит от p и $s > 0$ — фиксированное число, ограниченно действует из $L^1(\text{Log } L)^s$ в L^1 . С помощью этой теоремы Яно удалось показать ограниченность оператора максимальной функции Харди–Литлвуда и оператора сопряженной функции из $L^1(\text{Log } L)^1$ в L^1 . Независимо близкие к теореме Яно результаты были получены в [2, 3].

Позднее Керман [4] заменил выражение $\delta/(p-1)^s$ в теореме Яно на выражение $(p^2/(p-1))b(e^{p^2/(p-1)})$, где $b(t)$ удовлетворяет некоторым ограничениям, и написал интегральное неравенство, которому в этом случае удовлетворяет оператор T . Большая работа Яверта и Мильмана [5] посвящена рассмотрению теоремы экстраполяции с точки зрения общих идей теории интерполяции линейных операторов (K - и J -методов действительной интерполяции).

В настоящей работе предложен новый подход к доказательству теорем экстраполяции для сублинейных операторов. В результате найдено короткое доказательство точной теоремы экстраполяции, в условиях которой удалось заменить L^1 на произвольное банахово пространство, а функцию $1/(p-1)^s$ — на произвольную возрастающую функцию.

Пусть (U, Σ, μ) — пространство с σ -конечной мерой и $\chi(D)$ — характеристическая функция множества D . Для $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ через $\lambda(f, \gamma)$ обозначим функцию распределения функции f : $\lambda(f, \gamma) = \mu(\{t \in U : |f(t)| > \gamma\})$, а через f^* ее перестановку в невозрастающем порядке. Банахово пространство X измеримых функций называется симметричным [6], если из включения $f \in X$, измеримости функции g и из выполнения при всех $\gamma \in \mathbb{R}_+$ неравенства $\lambda(g, \gamma) \leq \lambda(f, \gamma)$ следует, что $g \in X$ и $\|g\|_X \leq \|f\|_X$. Пусть W — множество непрерывных вогнутых функций $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\psi(0) = 0$. Пространство Лоренца $\Lambda(\psi)$ (пространство Марцинкевича $M(\psi)$) состоит из тех f , для которых конечна норма

$$\|f\|_{\Lambda(\psi)} = \int_0^\infty f^*(s) d\psi(s) = \int_0^\infty \psi(\lambda(f, s)) ds$$

$$\left(\|f\|_{M(\psi)} = \sup_{0 < t < \infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t f^*(s) ds = \sup_{D \subseteq U} \left\{ \frac{1}{\psi(\mu(D))} \int_D |f(s)| ds \right\} \right).$$

Пространства Лоренца и Марцинкевича являются, наряду с L^p , классическими примерами симметричных пространств. Если $\psi(t) = t^\theta$ с $0 < \theta < 1$, то пространство Лоренца (Марцинкевича) в этом случае обозначается через Λ^θ (M^θ). Теория симметричных пространств функций подробно изложена в [6, 7].

ТЕОРЕМА 1. Пусть Y — некоторое банахово пространство, T — определенный на множестве Q конечнозначных функций линейный оператор $T: Q \rightarrow Y$ и $\varphi: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ — возрастающая функция, $\varphi(1) = 1$. Для $a \in (0, \infty)$ определим функцию

$$\psi_\varphi(a) = \inf_{t \geq 1} \{a^{1-1/(t+1)} \varphi(t)\}. \quad (1)$$

Предположим, что при всех $p \in (1, 2]$ для любого $D \subseteq U$ выполнено неравенство

$$\|T\chi(D)|Y\| \leq c(\mu(D))^{1/p} \varphi(1/(p-1)) \quad (2)$$

с константой c , не зависящей от D и p .

Тогда для любой функции $f \in Q$ верно неравенство

$$\|Tf|Y\| \leq 2c \|f|\Lambda(\psi_\varphi)\|. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого фиксированного $t \geq 1$ функция $\theta(a) = a^{1-1/(t+1)}\varphi(t)$ является вогнутой на $\mathbb{R}_+$. Поэтому функция $\psi_\varphi(a)$ как нижняя грань вогнутых функций тоже будет вогнутой. Непосредственно из определения функции $\psi_\varphi(a)$ следует, что $\lim_{a \rightarrow 0} \psi_\varphi(a) = 0$. Поэтому $\psi_\varphi \in W$ и, следовательно, определено пространство $\Lambda(\psi_\varphi)$.

Из леммы 5.2 монографии [6, с. 151] следует, что для любой функции $\psi \in W$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \frac{\|T\chi(D)|Y\|}{\|\chi(D)|\Lambda(\psi)\|} : D \subseteq U \right\} &\leq \sup \left\{ \frac{\|Tf|Y\|}{\|f|\Lambda(\psi)\|} : f \in Q \right\} \\ &\leq 2 \sup \left\{ \frac{\|T\chi(D)|Y\|}{\|\chi(D)|\Lambda(\psi)\|} : D \subseteq U \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Зафиксируем $D \subseteq U$. Так как неравенство (2) справедливо для всех $p \in (1, 2]$, то, полагая $p = 1 + 1/t$ и минимизируя по t , придем к неравенству $\|T\chi(D)|Y\| \leq c\psi_\varphi(\mu(D)) = c\|\chi(D)|\Lambda(\psi_\varphi)\|$. Применяя (4), получим (3).

Теорема доказана.

Учитывая определение функции $\psi_\varphi(a)$ и соотношения (4), теорему 1 можно переформулировать в следующем виде.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть Y — некоторое банахово пространство, T — определенный на множестве Q линейный оператор, $T: Q \rightarrow Y$, и $\varphi: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ — возрастающая функция, $\varphi(1) = 1$. Для того чтобы при всех $p \in (1, 2]$ выполнялось неравенство

$$\|Tf|Y\| \leq c_1 \varphi(1/(p-1)) \|f|\Lambda^{1/p}\|$$

с некоторой константой c_1 , не зависящей от p и $f \in Q$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство (3), где функция $\psi_\varphi(a)$ определена равенством (1).

Справедливость двойственной теоремы к теореме 1 следует из двойственности пространств Лоренца и Марцинкевича [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть Y — некоторое банахово пространство, T — линейный оператор, $T: Y \rightarrow S(U, \Sigma, \mu)$, где $S(U, \Sigma, \mu)$ — пространство измеримых на (U, Σ, μ) функций, и $\varphi: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ — возрастающая функция, $\varphi(1) = 1$. Для того чтобы при всех $p \in (1, 2]$ выполнялось неравенство

$$\|T|Y \rightarrow M^{1/p}\| \leq c\varphi(1/(p-1))$$

с константой c , не зависящей от p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\|T|Y \rightarrow M(\psi_\varphi)\| < \infty,$$

где функция $\psi_\varphi(a)$ определена равенством (1).

ПРИМЕР 1. Пусть функция φ при всех $t \in (1, \infty)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{c} t \varphi'(t) \leq \varphi(t) \leq c t \varphi'(t). \quad (5)$$

Положим

$$\psi(a) = a \begin{cases} \varphi(\ln(1/a))/\varphi(2) & \text{при } a \in (0, e^{-2}), \\ 1 & \text{при } a \in [e^{-2}, 1], \\ \sqrt{a} \varphi(1) & \text{при } a \in (1, \infty). \end{cases} \quad (6)$$

Следует заметить, что функция $\psi(a)$ не всегда вогнута.

С помощью прямых вычислений получим, что при всех $a > 0$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{c_1} \psi_\varphi(a) \leq \psi(a) \leq c_1 \psi_\varphi(a)$$

с константой c_1 , не зависящей от a .

Отметим, что условию (5) удовлетворяют, например, функции $\varphi(t) = t^\alpha$, $\varphi(t) = t^\alpha(1 + \ln t)^{\beta_1}$ и $\varphi(t) = t^\alpha(1 + \ln t)^{\beta_1}(\ln(e + \ln t))^{\beta_2}$ при $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$.

Используя пример 1, из теоремы 1 получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu(U) < \infty$, Y — некоторое банахово пространство и T — определенный на множестве Q линейный оператор, $T: Q \rightarrow Y$, для которого при любом $D \subseteq U$ выполнено неравенство (2). Пусть $\varphi: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ возрастающая функция, $\varphi(1) = 1$, и для нее выполнено неравенство (5).

Тогда выполняется неравенство (3), где функция ψ_φ при малых a определена равенством (6).

Если в теореме 3 положить $Y = L^1$, $\varphi(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$, то получается теорема экстраполяции из [5], обобщающая результат Яно. В этом случае $\Lambda(\psi_\varphi)$ совпадает с $L^1(\text{Log } L^1)^\alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы 1, 1' и 3 этой работы справедливы не только для линейных, но и для сублинейных операторов. Теорема 2 также будет справедливой и для сублинейных операторов, если Y — симметричное пространство. Напомним, что определенный на $L^{1,\text{loc}}(U)$ оператор T называется сублинейным, если для абсолютной константы c_0 на области его определения почти всюду выполнены неравенства

$$|T\lambda f| \leq c_0 |\lambda| |Tf|, \quad |T(\sum f_k)| \leq c_0 \sum |Tf_k|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Yano S. J. Mat. Soc. Japan., **3**, 296–305 (1951).
2. Юдович В. И. ДАН СССР, **138**, № 6, 805–808 (1961).
3. Симоненко И. Б. Матем. сб., **63**, № 4, 536–553 (1964).
4. Kerzman R. A. Studia Math., **76**, 183–195 (1983).
5. Jawerth B., Milman M. Mem. Amer. Math. Soc., **89**, No. 440, 1–82 (1991).
6. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Наука, М., 1978.
7. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Vol. 1, 2. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977, 1979.