Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Боле, И. А. Тайманов, Спектральные кривые операторов Коши–Римана на эллиптических кривых с выколотыми точками, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 4, 86–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3131>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 18:12:12

Благодарности. Авторы выражают благодарность проф. В. М. Кадецу за его ценные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Aizpuru, R. Armario, F. J. García-Pacheco, F. J. Pérez-Fernández, J. Math. Anal. Appl., **379**:1 (2011), 82–90. [2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea Publ., New York, 1978. [3] J. Boos, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, New York, 2000. [4] V. M. Kadets, B. Shumiatskiy, Матем. физ., анализ, геом., **7**:2 (2000), 184–195. [5] V. M. Kadets, B. Shumiatskiy, Acta Math. Hungar., **90**:4 (2001), 293–305. [6] G. Lorentz, Acta Math., **80** (1948), 167–190. [7] A. L. Peressini, Studia Math., **35** (1970), 111–121. [8] E. M. Semenov, F. A. Sukochev, J. Func. Anal., **259**:6 (2010), 1517–1541.

Department of Mathematics, University of Cadiz
e-mail: rafael.armariomigueles@alum.uca.es

Department of Mathematics, University of Cadiz
e-mail: garcia.pacheco@uca.es

Department of Mathematics, University of Cadiz
e-mail: javier.perez@uca.es

Поступило в редакцию
30 октября 2011 г.

УДК 517.984.5

Спектральные кривые операторов Коши–Римана на эллиптических кривых с выколотыми точками*

© 2013. К. БОЛЕ, И. А. ТАЙМАНОВ

1. Введение. Спектральные кривые дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами лежат в основе теории конечнозонного интегрирования. Решение обратной задачи для конечнозонного оператора состоит в сопоставлении такого оператора спектральным данным, состоящим из спектральной кривой и некоторых дополнительных данных, связанных с ней. Для одномерных операторов Шрёдингера спектральная кривая была определена в [1]. В [2] это понятие было обобщено на двумерные операторы Шрёдингера, для которых спектральная кривая параметризует функции Флоке–Блоха на заданном уровне энергии.

В данной статье мы показываем, что аналогичная спектральная кривая определяется для оператора Коши–Римана на эллиптической кривой с выколотыми точками при наложении соответствующих граничных условий.

Теорема 1. Пусть X — эллиптическая кривая, $X = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2\}$, где e_1 и e_2 — порождающие решетки периодов, и пусть $p_1, \dots, p_N$ — попарно различные точки на X . Рассмотрим линейную задачу

$$\bar{\partial}\psi = 0, \quad (1)$$

$$\psi(z + e_j) = e^{2\pi i \langle k, e_j \rangle} \psi(z), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

*Первый автор (К. Б.) был поддержан грантом DFG Sfb/Tr 71 “Geometric Partial Differential Equations”, второй автор (И. А. Т.) — программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках”, оба автора также были поддержаны Математическим институтом Хаусдорфа в Бонне.

где $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{C}^2$, $\langle k, e_j \rangle = k_1 \operatorname{Re} e_j + k_2 \operatorname{Im} e_j$ и ψ удовлетворяет условию

$$\psi(z) = \frac{a_j}{z - p_j} + O(|z - p_j|) \quad \text{при } j = 1, \dots, N \quad (3)$$

для некоторых $a_j \in \mathbb{C}$. Решения задачи (1)–(3) с различными k и $a_1, \dots, a_N$ параметризуются (с точностью до множителя) одномерной (спектральной) кривой (см. (7)), которая с точностью до выколотой точки является N -листным накрытием кривой X .

Алгебраические кривые, полученные таким образом, возникают как неприводимые компоненты спектральных кривых минимальных торов с плоскими концами в $\mathbb{R}^3$ (см. ниже разд. 4). Оказывается, что эти кривые совпадают со спектральными кривыми некоторых КП солитонов, изученных Кричевером [3].

Заметим, что, в отличие от случая параболических пучков, мы не задаем главные части (величины a_j не фиксированы), а ограничиваем размерности требованием, чтобы члены нулевого порядка асимптотических разложений (3) в отмеченных точках равнялись нулю.

2. Спектральные кривые операторов Шрёдингера. Пусть $L = \partial\bar{\partial} + U$ — двумерный оператор Шрёдингера с двоякопериодическим потенциалом: $U(z + e_1) = U(z + e_2) = U(z)$. Мы называем ψ собственной функцией Флоке оператора L с собственным значением E , если она является формальным решением уравнения

$$L\psi = E\psi,$$

удовлетворяющим условиям периодичности (2). Величины k_1 и k_2 называются квазииментами функции ψ , а $(\nu_1, \nu_2) = (e^{2\pi i \langle k, e_1 \rangle}, e^{2\pi i \langle k, e_2 \rangle})$ — ее мультипликаторами Флоке.

Спектральная кривая, которая с точностью до множителя параметризует функции Флоке при $E = 0$, была определена в [2], где было показано, как восстановить оператор L по (комплексной) кривой конечного рода и некоторым дополнительным данным. Такие операторы называются конечнозонными на нулевом уровне энергии.

В общем случае спектральные кривые не являются кривыми конечного рода и существует два способа строгого доказательства их существования: с использованием альтернативы Фредгольма для аналитических пучков операторов [4] и посредством возмущения спектральной кривой для оператора $L_0 = \partial\bar{\partial}$ [5].

3. Спектральные кривые торов в $\mathbb{R}^3$. Представление Вейерштрасса сопоставляет каждому решению $\psi: X \rightarrow \mathbb{C}^2$ уравнения

$$\mathcal{D}\psi = 0,$$

где $\mathcal{D}$ — оператор Дирака с двоякопериодическим вещественным потенциалом,

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}, \quad U = \bar{U},$$

конформное погружение кривой X или ее накрытия в $\mathbb{R}^3$, заданное формулами

$$x^k = x^k(0) + \int (x_z^k dz + \bar{x}_z^k d\bar{z}), \quad k = 1, 2, 3,$$

где

$$x_z^1 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad x_z^2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad x_z^3 = \psi_1 \bar{\psi}_2, \quad (4)$$

разветвленное в нулях функции ψ и с двояко-периодическим отображением Гаусса (см. [6], [7]). Более того, каждое конформное погружение кривой X в $\mathbb{R}^3$ допускает такое представление, если рассматривать ψ с $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ -монотониями, т. е. сечения спинорного расслоения над X [7].

Такое представление существует для всех погруженных поверхностей [7], и при $U = 0$ это сводится к классическому представлению Вейерштрасса минимальных поверхностей.

Спектральная кривая тора в $\mathbb{R}^3$ определяется в духе работы [2] как спектральная кривая соответствующего оператора Дирака $\mathcal{D}$ на нулевом уровне энергии [4]. Она параметризует (с точностью до множителя) функции Флоке, удовлетворяющие уравнению $\mathcal{D}\psi = 0$ и условиям (2).

Эта спектральная кривая содержит в себе информацию о функционале Уиллмора $\mathcal{W} = \int H^2 d\mu = 4 \int U^2 dx \wedge dy$, где H — средняя кривизна замкнутой ориентированной поверхности, погруженной в $\mathbb{R}^3$, и $d\mu$ — мера, индуцированная погружением. Уиллморовские торы, т. е. критические точки функционала Уиллмора, описываются интегрируемыми системами. Они распадаются на несколько классов, один из которых состоит из стереографических проекций минимальных торов с плоскими концами [8].

Для уиллморовских торов, которые не являются евклидово-минимальными с плоскими концами, в [9] было доказано, что их спектральные кривые компактифицируются добавлением двух бесконечно удаленных точек (в [9] это доказано в более общем случае условно-уиллморовских торов — для критических точек функционала $\mathcal{W}$, ограниченного на торы с заданным конформным классом).

4. Спектральные кривые минимальных торов с плоскими концами.

Спектральные кривые уиллморовских торов, получающихся из минимальных торов с плоскими концами, недавно были описаны в [10] и являются приводимыми алгебраическими кривыми, состоящими из двух неприводимых компонент Γ_+ и Γ_- , которые комплексно сопряжены друг с другом и имеют в точности тип, указанный в теореме 1.

В терминах представления Вейерштрасса минимальные поверхности отвечают тривиальному потенциалу $U = 0$. Поэтому спинор ψ минимальной поверхности распадается на две компоненты ψ_1, ψ_2 , такие, что ψ_1 и $\bar{\psi}_2$ удовлетворяют уравнению

$$\bar{\partial}\psi = 0.$$

Под плоским концом мы понимаем минимальное конформное погружение $f: D \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ проколотого диска $D \setminus \{p\}$, такое, что $\lim_{q \rightarrow p} f(q) = \infty$ и погружение продолжается до погружения диска в конформную трехмерную сферу $S^3 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. В такой точке p функции x_z^j , $j = 1, 2, 3$, имеют полюсы порядка 2 с ненулевыми вычетами. В терминах $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ это условие принимает вид (3).

5. Доказательство теоремы 1. Теорема 1 может быть доказана с помощью метода, подобного использованному Кричевером в [3].

Чтобы явно построить мероморфные функции, удовлетворяющие условиям (2), мы используем стандартные эллиптические функции $\sigma(z)$ и $\zeta(z)$ на $X =$

$\mathbb{C}/\Lambda = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2\}$, которые определяются формулами

$$\sigma(z) = z \prod_{m,n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{e_{mn}}\right) \exp\left(\frac{z}{e_{mn}} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{e_{mn}^2}\right), \quad e_{mn} = me_1 + ne_2,$$

$$\zeta(z) = \frac{d}{dz} \log \sigma(z).$$

Известно, что

$$\sigma(z + e_j) = -\sigma(z)e^{\eta_j(z+e_j/2)}, \quad \zeta(z + e_j) = \zeta(z) + \eta_j, \quad j = 1, 2,$$

где $\eta_j = 2\zeta(e_j/2)$ удовлетворяет условию $\eta_1 e_2 - \eta_2 e_1 = 2\pi i$. Следуя [3], мы определим функцию

$$\Phi(z, \alpha) = \frac{\sigma(\alpha - z)}{\sigma(\alpha)\sigma(z)} e^{\zeta(\alpha)z}, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Lambda,$$

которая Λ -периодична по α и корректно определена для $\alpha \in X \setminus \{0\}$ (в действительности это — функция Бейкера–Ахиезера для однозонного потенциала Ламе).

Для заданных мультипликаторов $\nu_1 = e^{2\pi i \langle k, e_1 \rangle}$, $\nu_2 = e^{2\pi i \langle k, e_2 \rangle}$ (см. (2)), которые не имеют вид $e^{\beta e_1}$, $e^{\beta e_2}$, существуют единственные $\alpha \in X \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{C}$, такие, что каждая мероморфная функция ψ с простыми полюсами в $z_0 + \Lambda$, удовлетворяющая условиям периодичности (2), совпадает с точностью до постоянного множителя с $\Psi_{\mu, \alpha}(z - z_0) = e^{\mu z} \Phi(z - z_0, \alpha)$.

Из теоремы Римана–Роха следует, что для заданных ν_1 , ν_2 и соответствующих α , μ каждое решение линейной задачи (1)–(2) с полюсами первого порядка в $p_1, \dots, p_n$ имеет вид

$$\psi = \sum_{l=1}^N a_l \Psi_{\mu, \alpha}(z - p_l). \quad (5)$$

Условия (3) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\mu a_l + \sum_{m \neq l} a_m \Phi(p_l - p_m, \alpha) = 0, \quad l = 1, \dots, N.$$

Эта линейная система имеет нетривиальное решение $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$, если и только если ее детерминант равен нулю,

$$\det A(\mu, \alpha) = 0, \quad A_{lm} = \delta_{lm}\mu + (1 - \delta_{lm})\Phi(p_m - p_l, \alpha), \quad (6)$$

что записывается как уравнение вида

$$\mu^N + q_1(\alpha)\mu^{N-1} + \dots + q_N(\alpha) = 0. \quad (7)$$

Спектральная кривая Γ задается этим уравнением. Она является N -листным накрытием кривой с выколотой точкой $X \setminus \{0\}$ с естественной проекцией $(\mu, \alpha) \in \Gamma \rightarrow \alpha \in X \setminus \{0\}$. Решения ψ задачи (1)–(3), параметризуемые точками из Γ , имеют мультипликаторы Флоке вида

$$\nu_1 = \exp((\mu + \zeta(\alpha))e_1 - \alpha\eta_1) \quad \text{и} \quad \nu_2 = \exp((\mu + \zeta(\alpha))e_2 - \alpha\eta_2). \quad (8)$$

Заметим, что в точности условие (6) возникало в [3] (см. формулу (22) и первую формулу в (16) при предположении, что $\dot{x}^k = 0$ при всех k), хотя и в другом контексте. В формуле (25) из [3] показано, что около $\alpha = 0$ кривая Γ имеет один лист, на котором функция $\mu + \zeta(\alpha)$ имеет полюс в $\alpha = 0$, и

$N - 1$ листов, на которых мультипликаторы Флоке (8) принимают вид $(\nu_1, \nu_2) = (e^{\beta e_1}, e^{\beta e_2})$, где β есть соответствующий предел функции $\mu + \zeta(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Для мультипликаторов вида $(\nu_1, \nu_2) = (e^{\beta e_1}, e^{\beta e_2})$ функции Флоке ψ не получаются посредством анзатца (5), а имеют вид

$$\psi = e^{\beta z} \left(a_0 + \sum_{l=1}^N a_l \zeta(z - p_l) \right), \quad (9)$$

где

$$\sum_{l=1}^N a_l = 0. \quad (10)$$

Условие (3) для этого анзатца принимает вид

$$a_0 + \beta a_k + \sum_{l \neq k} a_l \zeta(p_k - p_l) = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

После исключения a_0 эти условия вместе с (10) принимают вид N линейных уравнений на $a_1, \dots, a_N$. Приравнявая детерминант этой системы нулю, мы получаем полиномиальное уравнение степени $N - 1$ по β . Его решения отвечают $N - 1$ концам кривой Γ , в которых мультипликаторы Флоке имеют предел при стремлении α к 0.

Пример. В простейшем случае $N = 1$ мы имеем $\Gamma = X \setminus \{0\}$, спектральную кривую однозонного потенциала Ламе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. П. Новиков, Функц. анализ и его прил., **8:3** (1974), 54–66. [2] Б. А. Дубровин, И. М. Кривевер, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **229:1** (1976), 15–18. [3] И. М. Кривевер, Функц. анализ и его прил., **14:4** (1980), 45–54. [4] И. А. Тайманов, Функц. анализ и его прил., **32:4** (1998), 49–62. [5] И. М. Кривевер, УМН, **44:2**(266) (1989), 121–184. [6] B. G. Konopelchenko, Stud. Appl. Math., **96:1** (1996), 9–52. [7] I. A. Taimanov, in: Solitons, Geometry, and Topology: on the Crossroad, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 179, 1997, 133–151. [8] R. L. Bryant, J. Differential Geom., **20:1** (1984), 23–53. [9] C. Bohle, J. Differential Geom., **86:1** (2010), 71–131. [10] C. Bohle, I. A. Taimanov, Euclidean minimal tori with planar ends and elliptic solitons, in preparation.

Universität Tübingen, Germany
e-mail: bohle@mathematik.uni-tuebingen.de

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: taimanov@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
25 января 2012 г.

УДК 517.9

Субаддитивные отображения и функциональные уравнения

© 2013. Е. В. Шульман

1. Введение. Функциональное уравнение Леви-Чивиты [1]

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^n u_i(x) v_i(y) \quad (1)$$