Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Шульман, Субаддитивные отображения и функциональные уравнения, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 4, 90–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3132>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 18:19:51

$N - 1$ листов, на которых мультипликаторы Флоке (8) принимают вид $(\nu_1, \nu_2) = (e^{\beta e_1}, e^{\beta e_2})$, где β есть соответствующий предел функции $\mu + \zeta(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Для мультипликаторов вида $(\nu_1, \nu_2) = (e^{\beta e_1}, e^{\beta e_2})$ функции Флоке ψ не получаются посредством анзатца (5), а имеют вид

$$\psi = e^{\beta z} \left(a_0 + \sum_{l=1}^N a_l \zeta(z - p_l) \right), \quad (9)$$

где

$$\sum_{l=1}^N a_l = 0. \quad (10)$$

Условие (3) для этого анзатца принимает вид

$$a_0 + \beta a_k + \sum_{l \neq k} a_l \zeta(p_k - p_l) = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

После исключения a_0 эти условия вместе с (10) принимают вид N линейных уравнений на $a_1, \dots, a_N$. Приравнявая детерминант этой системы нулю, мы получаем полиномиальное уравнение степени $N - 1$ по β . Его решения отвечают $N - 1$ концам кривой Γ , в которых мультипликаторы Флоке имеют предел при стремлении α к 0.

Пример. В простейшем случае $N = 1$ мы имеем $\Gamma = X \setminus \{0\}$, спектральную кривую однозонного потенциала Ламе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] С. П. Новиков, Функц. анализ и его прил., **8:3** (1974), 54–66. [2] Б. А. Дубровин, И. М. Кривевер, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **229:1** (1976), 15–18. [3] И. М. Кривевер, Функц. анализ и его прил., **14:4** (1980), 45–54. [4] И. А. Тайманов, Функц. анализ и его прил., **32:4** (1998), 49–62. [5] И. М. Кривевер, УМН, **44:2**(266) (1989), 121–184. [6] B. G. Konopelchenko, Stud. Appl. Math., **96:1** (1996), 9–52. [7] I. A. Taimanov, in: Solitons, Geometry, and Topology: on the Crossroad, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, vol. 179, 1997, 133–151. [8] R. L. Bryant, J. Differential Geom., **20:1** (1984), 23–53. [9] C. Bohle, J. Differential Geom., **86:1** (2010), 71–131. [10] C. Bohle, I. A. Taimanov, Euclidean minimal tori with planar ends and elliptic solitons, in preparation.

Universität Tübingen, Germany
e-mail: bohle@mathematik.uni-tuebingen.de

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: taimanov@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
25 января 2012 г.

УДК 517.9

Субаддитивные отображения и функциональные уравнения

© 2013. Е. В. Шульман

1. Введение. Функциональное уравнение Леви-Чивиты [1]

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^n u_i(x) v_i(y) \quad (1)$$

описывает такие функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, что $f(x + y)$ принадлежит алгебре, порожденной функциями одной переменной; известно [2], что все его непрерывные решения — это квазимногочлены. Аналогичный результат для функций на топологических полугруппах гласит ([3], [4]), что это условие характеризует матричные элементы конечномерных представлений, т.е. функции вида $(T_g \xi, \eta)$, где T — какое-нибудь непрерывное представление полугруппы в конечномерном линейном топологическом пространстве X , $\xi \in X$, $\eta \in X^*$. Многопараметрическая версия уравнения (1), рассматривавшаяся в [5], [6], изучает комплекснозначные функции f на топологической полугруппе G , допускающие теорему сложения вида

$$f(g_1 \cdots g_n) = \sum_E \sum_{j=1}^{N_E} u_j^E v_j^E, \quad (2)$$

где E пробегает непустые собственные подмножества множества $\{1, \dots, n\}$, $N_E \in \mathbb{N}$, функции u_j^E зависят только от переменных g_i с $i \in E$, а функции v_j^E — от переменных g_i с $i \notin E$.

В [6] было доказано, что если G — топологически конечно порожденная полугруппа, то непрерывные функции $f: G \rightarrow \mathbb{C}$, допускающие теорему сложения (2) — это матричные элементы непрерывных конечномерных представлений полугруппы G . Здесь мы покажем, что это утверждение сохраняет силу для непрерывных ограниченных комплекснозначных функций на произвольной топологической группе.

Как и в [5], [6], наш подход основан на рассмотрении конечномерных инвариантных (или близких к инвариантным) подпространств в пространстве представления группы, однако в настоящей работе такое рассмотрение использует в качестве основного инструмента некоторые общие результаты о «множественнозначных» функциях на группе, которые могут быть интересны и сами по себе.

2. Субаддитивные отображения. Пусть G — полугруппа, а Ω — произвольное множество. Отображение $F: G \rightarrow 2^\Omega$ назовем *субаддитивным*, если

$$F(gh) \subset F(g) \cup F(h) \quad \text{для всех } g, h \in G. \quad (3)$$

Будем обозначать через $|M|$ мощность множества M . Скажем, что G обладает свойством SA, если для любого Ω и любого субаддитивного отображения $F: G \rightarrow 2^\Omega$ условие

$$n(F) := \sup_{g \in G} |F(g)| < \infty$$

влечет за собой

$$N(F) := \left| \bigcup_{g \in G} F(g) \right| < \infty.$$

Будем также говорить, что G обладает свойством $SA(C)$ для некоторого $C > 0$, если

$$N(F) \leq Cn(F)$$

для любого Ω и любого субаддитивного отображения $F: G \rightarrow 2^\Omega$.

Легко видеть, что всякая полугруппа с конечным числом m образующих обладает свойством $SA(m)$. То же верно, если полугруппа является объединением

возрастающей сети подполугрупп с m образующими; например, аддитивная полугруппа положительных рациональных чисел обладает свойством SA(1). Пример полугруппы без свойства SA доставляет свободная абелева полугруппа с бесконечным числом образующих.

Оказывается, что всякая группа обладает свойством SA. Но вначале рассмотрим более общую ситуацию, с несколько модифицированным условием субаддитивности.

Теорема 1. Пусть G — полугруппа, Ω — произвольное множество, и пусть отображение $F: G \rightarrow 2^\Omega$ удовлетворяет условиям

$$F(g) \subset F(h) \cup F(gh), \quad F(g) \subset F(h) \cup F(hg) \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

Тогда

$$N(F) < 2n(F). \quad (4)$$

Множитель 2 в правой части неравенства (4) нельзя заменить меньшим числом.

Следствием теоремы 1 является наш основной результат о субаддитивных отображениях:

Теорема 2. Любая группа обладает свойством SA(4).

3. Пространства с мерой; возмущения субаддитивности. Здесь мы перенесем результаты предыдущего раздела на субаддитивные отображения группы G в σ -алгебру $\mathcal{M}(\Omega, \mu)$ измеримых подмножеств некоторого пространства с мерой (Ω, μ) . Для любых $A, B \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ условимся писать $A \subset B$, если $\mu(B \setminus A) = 0$. В этом смысле теперь понимается и (3) — условие субаддитивности отображения $F: G \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mu)$.

Теорема 3. Пусть G — группа и $F: G \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ — субаддитивное отображение. Если $\mu(F(g)) \leq a$ для некоторого $a > 0$ и всех $g \in G$, то существует такое подмножество $A \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$, что $\mu(A) \leq 4a$ и $F(g) \subset A$ при $g \in G$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда отображение $F: G \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ лишь «аппроксимативно» удовлетворяет условию (3).

Пусть $\delta > 0$; для $A, B \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ мы пишем $A \subset_\delta B$, если $\mu(A \setminus B) < \delta$. Отображение $F: G \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ будем называть δ -субаддитивным, если

$$F(gh) \subset_\delta F(g) \cup F(h) \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

Теорема 4. Пусть $F: G \rightarrow \mathcal{M}(\Omega, \mu)$ есть δ -субаддитивное отображение, и пусть $\mu(F(g)) < a$ при всех $g \in G$, причем $\delta < a/3$. Тогда существует такое множество $K \in \mathcal{M}(\Omega, \mu)$, что $\mu(K) \leq 6a$ и $F(g) \subset_{8\delta} K$.

4. Отображения в $\mathcal{S}(X)$. Здесь нас будут интересовать аналоги предыдущих результатов для отображений группы в решетку $\mathcal{S}(X)$ всех подпространств линейного пространства X — некоммутативный аналог булевой алгебры 2^Ω . Будем называть отображение $F: G \rightarrow \mathcal{S}(X)$ субаддитивным, если

$$F(gh) \subset F(g) + F(h) \quad \text{для всех } g, h \in G,$$

где под суммой подпространств понимается линейная оболочка их объединения.

Допустим, что все пространства $F(g)$ конечномерны, и положим

$$n(F) = \sup_{g \in G} \dim F(g), \quad N(F) = \dim \sum_{g \in G} F(g).$$

Ясно, что $N(F) \leq Cn(F)$, если G конечно порождена, однако на все группы это уже не переносится. Чтобы получить корректную некоммутативную версию результатов предыдущих разделов, нужно наложить ограничения на область значений отображения F . Мы это сделаем, считая, что все $F(g)$ — это инвариантные подпространства представления T некоторой группы Γ , и накладывая на это представление требование конечной кратности.

Условимся говорить, что T является *fm-представлением*, если все его неприводимые подпредставления входят в T с конечной кратностью. Если к тому же кратность $m(\pi, T)$ каждого неприводимого подпредставления π оценивается сверху через размерность:

$$m(\pi, T) \leq \phi(\dim \pi),$$

где $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ — некоторая возрастающая функция, то мы будем говорить, что T имеет равномерную кратность ϕ .

Напомним, что представление группы в банаховом пространстве называется равномерно ограниченным, если нормы всех операторов представления не превосходят общей константы.

Теорема 5. Пусть T — равномерно ограниченное fm-представление группы Γ операторами в банаховом пространстве, и пусть $\mathcal{E}$ — решетка всех конечномерных T -инвариантных подпространств. Если $F: G \rightarrow \mathcal{E}$ — такое субаддитивное отображение, что $\sup_{g \in G} \dim F(g) = n < \infty$, то пространство $\sum_{g \in G} F(g)$ конечномерно. Если T имеет равномерную кратность ϕ , то

$$\dim \left(\sum_{g \in G} F(g) \right) \leq (4n - 1)n\phi(n).$$

Идея доказательства. Используя тот факт, что каждое ограниченное конечномерное представление вполне приводимо, мы построим субаддитивную многозначную функцию $f: G \rightarrow 2^\Omega$, где Ω — множество всех (с точностью до эквивалентности) неприводимых конечномерных представлений группы Γ . А именно, пусть f каждому элементу $g \in G$ ставит в соответствие набор тех представлений из Ω , которые входят в подпредставление $T|F(g)$. Из теоремы 2, примененной к функции f , следует, что существует лишь конечное число неприводимых представлений, входящих в линейную оболочку всех $F(g)$. Условие конечной кратности позволяет заключить, что линейная оболочка всех $F(g)$ конечномерна. $\square$

Можно построить примеры, показывающие, что требования равномерной ограниченности и конечной кратности не могут быть опущены.

5. Локально инвариантные подпространства. Пусть дано представление T группы G в линейном пространстве X и требуется доказать, что данное конечномерное подпространство $L \subset X$ содержится в конечномерном инвариантном подпространстве. Иногда для этого достаточно знать, что каждый оператор T_g отображает L в «не слишком далекое» подпространство. Мы сейчас сформулируем результат такого рода (его доказательство существенно использует теорему 5).

Теорема 6. Пусть T — равномерно ограниченное fm-представление группы G в банаховом пространстве X , и пусть $L \subset X$ — конечномерное подпространство. Предположим, что для любого $g \in G$ найдется инвариантное

подпространство $L(g) \subset X$, такое, что $\dim L(g) \leq N$, где $N \in \mathbb{N}$ фиксировано, и

$$T_g L \subset L + L(g).$$

Тогда L содержится в конечномерном инвариантном подпространстве $\tilde{L} \subset X$. Если к тому же T имеет равномерную кратность ϕ , то

$$\dim \tilde{L} \leq \dim L + (4N - 1)N\phi(N).$$

6. Применение к многопараметрической теореме сложения. Из теоремы 6, примененной к левому регулярному представлению топологической группы G в пространстве ограниченных непрерывных комплекснозначных функций на G , выводится следующий результат.

Теорема 7. *Ограниченная непрерывная комплекснозначная функция f на топологической группе G удовлетворяет уравнению (2) для некоторого $n > 1$ тогда и только тогда, когда она является матричным элементом непрерывного ограниченного конечномерного представления группы G .*

ЛИТЕРАТУРА

- [1] T. Levi-Civita, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. (5), **22**:2 (1913), 181–183. [2] J. Aczél, J. Dhombres, *Functional Equations in Several Variables, with Applications to Mathematics, Information Theory and to the Natural and Social Sciences*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989. [3] L. Székelyhidi, Pacific J. Math., **103**:2 (1982), 583–587. [4] E. Shulman, J. London Math. Soc., Ser. 2, **54**:1 (1996), 111–120. [5] E. Shulman, J. Math. Anal. Appl., **316**:1 (2006), 9–15. [6] E. Shulman, Aequationes Math., **79**:1–2 (2010), 13–21.

Вологодский государственный педагогический университет
e-mail: shulmank@yahoo.com, shulmanka@gmail.com

Поступило в редакцию
15 декабря 2011 г.