Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Казейкина, Отсутствие солитонов с достаточной алгебраической локализацией для уравнения Веселова–Новикова на ненулевом уровне энергии, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 1, 30–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3133>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:10:07

Отсутствие солитонов с достаточной алгебраической локализацией для уравнения Веселова–Новикова на ненулевом уровне энергии

© 2014. А. В. КАЗЕЙКИНА

В работе показано, что уравнение Веселова–Новикова (аналог уравнения КдФ в размерности $2 + 1$) на положительном и отрицательном уровнях энергии не имеет солитонов с пространственной локализацией выше, чем $O(|x|^{-3})$, при $|x| \rightarrow \infty$.

§1. Введение

В данной работе рассматривается уравнение Веселова–Новикова

$$\partial_t v = 4 \operatorname{Re}(4\partial_z^3 v + \partial_z(vw) - E\partial_z w), \quad (1.1a)$$

$$\partial_{\bar{z}} w = -3\partial_z v, \quad v = \bar{v}, \quad E \in \mathbb{R}, \quad (1.1b)$$

$$v = v(x, t), \quad w = w(x, t), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1c)$$

где

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) является математически наиболее естественным $(2 + 1)$ -мерным аналогом классического уравнения Кортевега–де Фриза. Если $v = v(x_1, t)$, $w = w(x_1, t)$, то уравнение (1.1) сводится к уравнению КдФ. Кроме того, уравнение (1.1) интегрируемо при помощи преобразования рассеяния для двумерного уравнения Шрёдингера

$$L\psi = E\psi, \quad E = E_{\text{fixed}}, \quad (1.3)$$

$$L = -\Delta + v(x, t), \quad \Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Отметим также, что при $E \rightarrow \pm\infty$ уравнение (1.1) переходит в другой известный $(2 + 1)$ -мерный аналог уравнения КдФ, уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП-I и КП-II соответственно; см., например, [12] и приведенные там ссылки).

Уравнение (1.1) содержится неявно в [22] как уравнение, имеющее следующее представление:

$$\frac{\partial(L - E)}{\partial t} = [L - E, A] + B(L - E), \quad (1.4)$$

где L — оператор соответствующей задачи рассеяния, A, B — некоторые подходящие дифференциальные операторы, $[\cdot, \cdot]$ обозначает коммутатор. Для частного случая двумерного оператора Шрёдингера из (1.3) операторы A и B в явной форме

$$A = -8\partial_z^3 - 2w\partial_z - 8\partial_{\bar{z}}^3 - 2\bar{w}\partial_{\bar{z}}, \quad B = 2\partial_{\bar{z}}w + 2\partial_z\bar{w}, \quad (1.5)$$

где w определяется в (1.1b), и соответствующее эволюционное уравнение (1.1) были получены в [25], [26], где уравнение (1.1) далее изучалось в периодической постановке.

Солитоны и асимптотическое при больших временах поведение решений уравнения Веселова–Новикова с достаточной пространственной локализацией изучались в серии работ [13], [11], [24], [16], [19]–[21]. В [19], [16] было показано, что в регулярном случае, т. е. когда данные рассеяния невырождены при фиксированной ненулевой энергии (и в безотражательном случае на положительном уровне энергии), соответствующие решения уравнения Веселова–Новикова не содержат локализованных солитонов в асимптотике при больших временах. В общем случае в [24], [21] было показано, что уравнение Веселова–Новикова на ненулевом уровне энергии не допускает экспоненциально локализованных солитонов. Семейство алгебраически локализованных солитонов для уравнения Веселова–Новикова на положительном уровне энергии было построено в [11] (см. также обсуждение в [20]). Эти солитоны являются рациональными функциями, убывающими, как $O(|x|^{-2})$, при $|x| \rightarrow \infty$.

Отметим, что уравнение КП-I имеет солитонные решения, и эти решения убывают, как $O(|x|^{-2})$, при $|x| \rightarrow \infty$. Уравнение КП-II, напротив, не обладает локализованными солитонными решениями. По вопросу существования и отсутствия локализованных солитонных решений уравнений КП-I, КП-II и их обобщений см. [4]; симметрии и скорости убывания этих решений были изучены в [5]. Дополнительные результаты об интегрируемых $(2+1)$ -мерных системах, допускающих локализованные солитонные решения, можно найти в [1], [3], [8], [9], см. также приводимые там ссылки.

В этой работе мы рассматриваем регулярные, достаточно локализованные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие следующим условиям:

$$\bullet \quad v, w \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}), \quad v(\cdot, t) \in C^4(\mathbb{R}^2) \quad \text{для любого } t \in \mathbb{R}; \quad (1.6)$$

$$\bullet \quad |\partial_x^j v(x, t)| \leq \frac{q(t)}{(1 + |x|)^{3+j+\varepsilon}}, \quad j = (j_1, j_2) \in (\mathbb{N} \cup 0)^2, \quad j_1 + j_2 \leq 4, \\ \text{при некоторых } q(t) > 0, \quad \varepsilon > 0; \quad (1.7)$$

$$\bullet \quad |w(x, t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Будем говорить, что решение уравнения (1.1) является *солитоном*, если $v(x, t) = V(x - ct)$ для некоторого $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Основной результат данной статьи состоит в следующем.

Теорема 1.1. Пусть (v, w) — солитонное решение уравнения (1.1) при $E \neq 0$, удовлетворяющее условиям (1.6)–(1.8). Тогда $v \equiv 0$, $w \equiv 0$.

Доказательство этой теоремы основано, в частности, на рассмотрении специальных собственных функций двумерного оператора Шрёдингера, введенных в [6], [2], и на идеях, предложенных в [24].

Заметим, что теорема 1.1 для случая нулевой энергии была доказана в [17] для потенциалов кондуктивного типа.

В §2 приводятся, в частности, некоторые известные сведения из теории прямой и обратной задачи рассеяния для двумерного уравнения Шрёдингера на ненулевом уровне энергии (см. [23], [12] и приведенные там ссылки). Кроме того, мы вводим для ненулевого уровня энергии аналоги некоторых данных рассея-

ния, рассмотренных в [2]. Основной результат (теорема 1.1) доказывается в §3. В §4 содержатся доказательства некоторых предварительных лемм.

Данная работа была выполнена в рамках научного исследования под руководством Р. Г. Новикова.

§2. Данные рассеяния и уравнения обратной задачи рассеяния

Рассмотрим уравнение Шрёдингера на плоскости

$$\begin{aligned} L\psi &= E\psi, \quad E = E_{\text{fixed}} \in \mathbb{R} \setminus 0, \\ L &= -\Delta + v, \quad \Delta = 4\partial_z\partial_{\bar{z}}, \quad v = v(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

с потенциалом v , удовлетворяющим следующим условиям:

$$\begin{aligned} v(x) &= \overline{v(x)}, \quad v(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \\ |\partial_{x_1}^{j_1} \partial_{x_2}^{j_2} v(x)| &< q(1 + |x|)^{-3-\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.2)$$

для некоторых $q > 0$, $\varepsilon > 0$, где $j_1, j_2 \in \mathbb{N} \cup 0$, $j_1 + j_2 \leq 3$.

Для уравнения (2.1) при $E > 0$ рассмотрим его собственные функции $\psi^+(x, k)$, определенные при $k \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = E$, и удовлетворяющие асимптотике

$$\psi^+(x, k) = e^{ikx} - i\pi\sqrt{2\pi}e^{-i\pi/4}f\left(k, |k|\frac{x}{|x|}\right)\frac{e^{i|k||x|}}{\sqrt{|k||x|}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

для некоторой априорно неизвестной функции f . Функция f называется *амплитудой рассеяния* потенциала v . Если $f(k, l) \equiv 0$ при $k, l \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = l^2 = E$, то соответствующий потенциал называется *прозрачным* (или *безотражательным*) при фиксированной энергии $E > 0$. В данной работе рассматриваются исключительно прозрачные потенциалы, поскольку, как было показано в [24], солитоны уравнения Веселова–Новикова на положительном уровне энергии являются прозрачными потенциалами (см. также лемму 3.4).

Для уравнения (2.1) при $E \in \mathbb{R} \setminus 0$ рассмотрим также собственные функции Фаддеева $\psi(x, k)$, определенные при $k \in \Sigma_E$, где

$$\Sigma_E = \begin{cases} \{k \in \mathbb{C}^2 : k^2 = E, \operatorname{Im} k \neq 0\}, & \text{если } E > 0, \\ \{k \in \mathbb{C}^2 : k^2 = E\}, & \text{если } E < 0, \end{cases}$$

и удовлетворяющие асимптотике

$$\psi(x, k) = e^{ikx}(1 + o(1)), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

(см. [6], [23], [12]).

Наконец, для уравнения (2.1) при $E \in \mathbb{R} \setminus 0$ мы также рассмотрим собственные функции $\varphi(x, k)$, определенные при $k \in \Sigma_E$ и удовлетворяющие асимптотике

$$\varphi(x, k) = e^{ikx}(k_1x_2 - k_2x_1 + o(1)), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (2.5)$$

Эти функции являются аналогами решений, введенных в [2] для случая нулевой энергии.

Далее будет удобно без потери общности предположить, что $E = \pm 1$ (общий случай сводится к данному преобразованием масштабирования), и ввести новые переменные

$$z = x_1 + ix_2, \quad \lambda = \frac{k_1 + ik_2}{\sqrt{E}}.$$

Отметим, что $k_1 = \frac{\sqrt{E}}{2} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right)$, $k_2 = \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda \right)$.

В новых переменных $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$ функции ψ и φ определяются как решения уравнения (2.1) со следующим асимптотическим поведением:

$$\psi(z, \lambda) = e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{z} + z/\lambda)} \mu(z, \lambda), \quad \mu(z, \lambda) = 1 + o(1) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

$$\varphi(z, \lambda) = e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{z} + z/\lambda)} \nu(z, \lambda), \quad \nu(z, \lambda) = \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{z} - \frac{1}{\lambda}z \right) + o(1) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Функции $\mu(z, \lambda)$ и $\nu(z, \lambda)$, возникающие в приведенных выше формулах, также могут быть определены как решения интегральных уравнений

$$\mu(z, \lambda) = 1 + \iint_{\mathbb{C}} g(z - \zeta, \lambda) v(\zeta) \mu(\zeta, \lambda) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta, \quad (2.8)$$

$$\nu(z, \lambda) = \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{z} - \frac{1}{\lambda}z \right) + \iint_{\mathbb{C}} g(z - \zeta, \lambda) v(\zeta) \nu(\zeta, \lambda) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta, \quad (2.9)$$

где

$$g(z, \lambda) = - \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \iint_{\mathbb{C}} \frac{e^{\frac{i}{2}(p\bar{z} + \bar{p}z)}}{p\bar{p} + \sqrt{E}(\lambda\bar{p} + p/\lambda)} d \operatorname{Re} p d \operatorname{Im} p \quad (2.10)$$

и $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$, а также, если $E > 0$, то $|\lambda| \neq 1$.

В терминах $m(z, \lambda) = (1 + |z|)^{-(2+\varepsilon/2)} \mu(z, \lambda)$ и $n(z, \lambda) = (1 + |z|)^{-(2+\varepsilon/2)} \nu(z, \lambda)$ уравнения (2.8) и (2.9) соответственно записываются в следующем виде:

$$m(z, \lambda) = (1 + |z|)^{-(2+\varepsilon/2)} + \iint_{\mathbb{C}} (1 + |z|)^{-(2+\varepsilon/2)} g(z - \zeta, \lambda) \frac{v(\zeta)}{(1 + |\zeta|)^{-(2+\varepsilon/2)}} m(\zeta, \lambda) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta, \quad (2.11)$$

$$n(z, \lambda) = \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{z} - \frac{1}{\lambda}z \right) (1 + |z|)^{-(2+\varepsilon/2)} + \iint_{\mathbb{C}} (1 + |z|)^{-(2+\varepsilon/2)} g(z - \zeta, \lambda) \frac{v(\zeta)}{(1 + |\zeta|)^{-(2+\varepsilon/2)}} n(\zeta, \lambda) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta. \quad (2.12)$$

Интегральный оператор $A(\lambda)$ интегральных уравнений (2.11), (2.12) является оператором Гильберта–Шмидта, а именно, $A(\cdot, \cdot, \lambda) \in L^2(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$, где $A(z, \zeta, \lambda)$ — ядро Шварца интегрального оператора $A(\lambda)$, и $|\operatorname{Tr} A^2(\lambda)| < \infty$. Таким образом, модифицированный определитель Фредгольма $\Delta(\lambda)$ для (2.11) и (2.12) может быть определен следующим образом:

$$\ln \Delta(\lambda) = \operatorname{Tr}(\ln(I - A(\lambda)) + A(\lambda)). \quad (2.13)$$

Точный смысл данного определения приведен в [10]. Впервые определитель Δ

для уравнений типа (2.11), (2.12) был рассмотрен в [7].

Также положим

$$\mathcal{E} = \{\lambda \in \Sigma : \Delta(\lambda) = 0\},$$

где

$$\Sigma = \mathbb{C} \setminus (0 \cup T), \text{ если } E > 0, \text{ и } \Sigma = \mathbb{C} \setminus 0, \text{ если } E < 0, \quad T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

Множество $\mathcal{E}$ представляет собой множество значений λ , для которых не имеет места либо существование, либо единственность решения уравнения (2.1) с асимптотикой (2.6) (или, эквивалентно, решения уравнения (2.1) с асимптотикой (2.7)).

При $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$ определим следующие «данные рассеяния» для потенциала v :

$$a(\lambda) = \iint_{\mathbb{C}} v(\zeta) \mu(\zeta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta, \quad (2.14)$$

$$b(\lambda) = \iint_{\mathbb{C}} \exp\left(\frac{i\sqrt{E}}{2}\left(1 + (\operatorname{sgn} E)\frac{1}{\lambda\bar{\lambda}}\right)((\operatorname{sgn} E)\zeta\bar{\lambda} + \lambda\bar{\zeta})\right) v(\zeta) \mu(\zeta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta, \quad (2.15)$$

$$\alpha(\lambda) = \iint_{\mathbb{C}} v(\zeta) \nu(\zeta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta, \quad (2.16)$$

$$\beta(\lambda) = \iint_{\mathbb{C}} \exp\left(\frac{i\sqrt{E}}{2}\left(1 + (\operatorname{sgn} E)\frac{1}{\lambda\bar{\lambda}}\right)((\operatorname{sgn} E)\zeta\bar{\lambda} + \lambda\bar{\zeta})\right) v(\zeta) \nu(\zeta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta. \quad (2.17)$$

Функции a, b являются обобщенными данными рассеяния Фаддеева для двумерного уравнения Шрёдингера. Они также возникают при рассмотрении членов более высокого порядка в разложении (2.4). «Данные рассеяния» α, β для уравнения Шрёдингера на нулевом уровне энергии были введены в [2].

Теперь сформулируем некоторые свойства определенных выше функций, которые будут играть существенную роль при доказательстве основного результата.

Утверждение 2.1 (см. [15], [23], [21]). *Пусть v удовлетворяет условиям (2.2). Тогда функция $\Delta(\lambda)$ обладает следующими свойствами:*

- (1) $\Delta \in C(\bar{D}_+)$, $\Delta \in C(\bar{D}_-)$, где $\bar{D}_+ = D_+ \cup \partial D_+$, $D_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, $\bar{D}_- = D_- \cup \partial D_-$, $D_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$;
- (2) $\Delta(\lambda) \rightarrow 1$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, $|\lambda| \rightarrow 0$;
- (3) Δ вещественнозначна;
- (4) $\Delta(\lambda)$ удовлетворяет $\bar{\partial}$ -уравнению

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{\lambda}} = -\frac{\operatorname{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)}{4\pi\bar{\lambda}} \left(a\left(-(\operatorname{sgn} E)\frac{1}{\lambda}\right) - \hat{v}(0) \right) \Delta, \quad (2.18)$$

где $\hat{v}(0) = \iint_{\mathbb{C}} v(\zeta) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (T \cup \mathcal{E} \cup 0)$, $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$;

- (5) $\Delta(\lambda) = \Delta(-(\operatorname{sgn} E)\frac{1}{\lambda})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus 0$;

(6) если $E < 0$ или если $E > 0$ и v является прозрачным потенциалом, то $\Delta \equiv \operatorname{const}$ на $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.

Отметим, что в общем случае $\Delta \notin C(\mathbb{C})$ при $E > 0$. В этом случае Δ на $\bar{D}_\pm$ рассматривается как непрерывное продолжение с $D_\pm$.

Если v удовлетворяет предположениям (2.2), то функции $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ являются непрерывными на $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$. Отметим также (см. [15]), что

$$a(\lambda) \rightarrow \hat{v}(0) \quad \text{при } \lambda \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

Если данные рассеяния a определены на окружности T , то их поведение на ней описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} a &\equiv 0 \text{ на } T, \text{ если } E > 0 \text{ и } v \text{ является прозрачным потенциалом (см. [12])}, \\ a &\equiv b \text{ на } T, \text{ если } E < 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Если v удовлетворяет предположениям (2.2) и при положительной энергии v является прозрачным потенциалом, т. е. $f \equiv 0$ при фиксированной энергии, то функция $\mu(z, \lambda)$, определенная в (2.8), обладает следующими свойствами (см. [14], [24], [12] и приводимые там ссылки):

$$\mu(z, \lambda) \text{ является непрерывной по } \lambda \text{ на } \mathbb{C} \setminus (0 \cup \mathcal{E}); \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \mu(z, \lambda)}{\partial \bar{\lambda}} = r(z, \lambda) \overline{\mu(z, \lambda)}, \quad (2.22a)$$

$$r(z, \lambda) = r(\lambda) \exp \left(-\frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + (\operatorname{sgn} E) \frac{1}{\lambda \bar{\lambda}} \right) \left((\operatorname{sgn} E) \bar{\lambda} z + \lambda \bar{z} \right) \right), \quad (2.22b)$$

$$r(\lambda) = \frac{\operatorname{sgn}(\lambda \bar{\lambda} - 1)}{4\pi \bar{\lambda}} b(\lambda) \quad (2.22c)$$

при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (0 \cup \mathcal{E} \cup T)$, где $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$;

$$\mu \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0. \quad (2.23)$$

Уравнения обратной задачи рассеяния (2.22) вместе с условиями (2.21) и (2.23) однозначно определяют функцию μ по невырожденным данным рассеяния b , т. е. в случае, когда $\mathcal{E} = \emptyset$. Потенциал v (прозрачный в случае положительной энергии) может быть определен по формуле

$$v(z) = 2i\sqrt{E} \frac{\partial \mu_{-1}(z)}{\partial z}, \quad (2.24)$$

где $\mu_{-1}(z)$ определяется через следующее асимптотическое разложение:

$$\mu(z, \lambda) = 1 + \frac{\mu_{-1}(z)}{\lambda} + o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

§3. Доказательство теоремы 1.1

Сформулируем сначала несколько предварительных лемм. Доказательства лемм 3.2, 3.3 приводятся в §4.

Лемма 3.1. Пусть $v \in C^4(\mathbb{C})$ и

$$|\partial_z^{j_1} \partial_{\bar{z}}^{j_2} v(z)| < \frac{q}{(1 + |z|)^{j+3+\varepsilon}}, \quad j_1, j_2 \in \{0 \cup \mathbb{N}\}, \quad j = j_1 + j_2 \leq 4 \quad (3.1)$$

для любых $z \in \mathbb{C}$ и некоторых $q > 0$, $\varepsilon > 0$. Пусть w определяется следующим образом:

$$\partial_{\bar{z}} w = -3\partial_z v, \quad w(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$w(z) = \frac{3\hat{v}(0)}{\pi z^2} + O\left(\frac{1}{|z|^3}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

$$\partial_z w(z) = -\frac{6\hat{v}(0)}{\pi z^3} + O\left(\frac{1}{|z|^4}\right) \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

$$\text{где } \hat{v}(0) = \iint_{\mathbb{C}} v(\zeta) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta.$$

Доказательства представлений (3.2), (3.3) легко выводятся из формулы Тейлора для $W(\xi) = w(1/\xi)$ и $-\xi^2 W(\xi) = \partial_z w(z)|_{z=1/\xi}$ соответственно в окрестности $\xi = 0$.

Обозначим через

$$S(\lambda) = \{a(\lambda), b(\lambda), \alpha(\lambda), \beta(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0), \quad (3.4)$$

данные рассеяния для потенциала v , определенные в (2.14)–(2.17) в рамках уравнения (2.1).

Лемма 3.2. Пусть $v(z)$ — потенциал, удовлетворяющий условию (2.2), $\Delta(\lambda)$ — соответствующий ему модифицированный определитель Фредгольма, определяемый по формуле (2.13), $S(\lambda)$ — данные рассеяния для потенциала v , определенные при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$. Тогда модифицированный определитель Фредгольма $\Delta_\eta(\lambda)$ и данные рассеяния $S_\eta(\lambda)$ для потенциала $v_\eta(z) = v(z - \eta)$ обладают следующими свойствами:

(1) $\Delta_\eta(\lambda) = \Delta(\lambda)$;

(2) данные рассеяния $S_\eta(\lambda)$ определены при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$ и связаны с $S(\lambda)$ формулами

$$a_\eta(\lambda) = a(\lambda), \quad (3.5)$$

$$b_\eta(\lambda) = \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + (\operatorname{sgn} E) \frac{1}{\lambda\bar{\lambda}} \right) \left((\operatorname{sgn} E) \bar{\lambda}\eta + \lambda\bar{\eta} \right) \right\} b(\lambda), \quad (3.6)$$

$$\alpha_\eta(\lambda) = \alpha(\lambda) + \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{\eta} - \frac{1}{\lambda}\eta \right) a(\lambda), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \beta_\eta(\lambda) = \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + (\operatorname{sgn} E) \frac{1}{\lambda\bar{\lambda}} \right) \left((\operatorname{sgn} E) \bar{\lambda}\eta + \lambda\bar{\eta} \right) \right\} \\ \times \left(\beta(\lambda) + \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{\eta} - \frac{1}{\lambda}\eta \right) b(\lambda) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Лемма 3.3. Пусть (v, w) удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.6)–(1.8). Пусть $S(\lambda, t)$ — данные рассеяния для v , определенные с помощью (3.4) для некоторого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$ и всех $t \in \mathbb{R}$. Тогда эволюция этих данных

рассеяния описывается следующим образом:

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad (3.9)$$

$$b(\lambda, t) = \exp \left\{ i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} + (\operatorname{sgn} E) \left(\bar{\lambda}^3 + \frac{1}{\bar{\lambda}^3} \right) \right) t \right\} b(\lambda, 0), \quad (3.10)$$

$$\alpha(\lambda, t) = \alpha(\lambda, 0) + 3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) (a(\lambda, 0) - \hat{v}(0))t, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \beta(\lambda, t) = & \exp \left\{ i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} + (\operatorname{sgn} E) \left(\bar{\lambda}^3 + \frac{1}{\bar{\lambda}^3} \right) \right) t \right\} \\ & \times \left(\beta(\lambda, 0) + 3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) b(\lambda, 0)t \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Лемма 3.4 (см. [24]). Пусть (v, w) удовлетворяет уравнению (1.1) при некотором $E > 0$ и условиям (1.6)–(1.8). Кроме того, пусть v — солитон, т. е. $v(x, t) = V(x - ct)$ при некотором $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда $f(k, l) \equiv 0$, $k, l \in \mathbb{R}^2$, $k^2 = l^2 = E > 0$, где f — амплитуда рассеяния потенциала v в рамках уравнения Шрёдингера (1.3).

Заключительная часть доказательства теоремы 1.1 состоит в следующем. Прежде всего, если (v, w) является солитонным решением уравнения (1.1) при некотором $E > 0$, то v является прозрачным потенциалом вследствие леммы 3.4.

Далее, поскольку (v, w) — солитон, то из леммы 3.2 следует, что множество $\mathcal{E}$ значений $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых данные рассеяния $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$ не определены, не зависит от t .

Поскольку (v, w) — солитон, динамика по времени его данных рассеяния b описывается формулой

$$b(\lambda, t) = \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\left(\lambda + (\operatorname{sgn} E) \frac{1}{\lambda} \right) \bar{c}t + \left((\operatorname{sgn} E) \bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) ct \right) \right\} b(\lambda, 0),$$

где используется обозначение $c = c_1 + ic_2$ (см. формулу (3.6) леммы 3.2). Объединяя это выражение с формулой (3.10) из леммы 3.3, получаем

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} + (\operatorname{sgn} E) \left(\bar{\lambda}^3 + \frac{1}{\bar{\lambda}^3} \right) \right) t \right\} b(\lambda, 0) \\ & = \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\left(\lambda + (\operatorname{sgn} E) \frac{1}{\lambda} \right) \bar{c}t + \left((\operatorname{sgn} E) \bar{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \right) ct \right) \right\} b(\lambda, 0). \end{aligned}$$

Поскольку функции λ , $\bar{\lambda}$, λ^3 , $\bar{\lambda}^3$, $1/\lambda$, $1/\bar{\lambda}$, $1/\lambda^3$, $1/\bar{\lambda}^3$, 1 являются линейно независимыми в любой открытой непустой окрестности любой точки из $\mathbb{C} \setminus 0$ и $b(\lambda, 0)$ непрерывна на $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$, получаем, что $b(\lambda, 0) \equiv 0$ на $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$.

Аналогично из (3.7), (3.11) получаем, что

$$\alpha(\lambda, 0) + \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda \bar{c} - \frac{1}{\lambda} c \right) t \alpha(\lambda, 0) = \alpha(\lambda, 0) + 3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) t (a(\lambda, 0) - \hat{v}(0)),$$

или

$$a(\lambda, 0) = \frac{3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \hat{v}(0)}{3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) - \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda \bar{c} - \frac{1}{\lambda} c \right)}. \quad (3.13)$$

Докажем, что из представления (3.13) следует равенство $\hat{v}(0) = 0$ и, таким образом, $a(\lambda, 0) \equiv 0$ при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$.

Выражение (3.13) определено всюду за исключением точек, являющихся корнями уравнения

$$3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) - \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda \bar{c} - \frac{1}{\lambda} c \right) = 0. \quad (3.14)$$

Очевидно, что уравнение (3.14) имеет шесть корней λ_j , $j = 1, \dots, 6$, с учетом кратности. Оно было подробно изучено в [19] (см. лемму 3.1 из [19]). В частности, было показано, что для любого значения параметра c

уравнение (3.14) имеет по меньшей мере два корня на $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. (3.15)

Рассмотрим два случая в зависимости от того, обращается ли Δ на T в нуль или нет. Отметим, что, согласно п. (6) утверждения 2.1, если определитель Δ обращается в нуль в одной точке из T , то он тождественно равен нулю на T .

(i) $\Delta \neq 0$ на T .

В этом случае $a(\lambda, 0)$ и $b(\lambda, 0)$ определены на T . Значит, $b(\lambda, 0) \equiv 0$ на T . Из (2.20) получаем, что $a(\lambda, 0) \equiv 0$ на T . В силу представления (3.13) и свойства (3.15) это может иметь место, только если $\hat{v}(0) = 0$.

(ii) $\Delta \equiv 0$ на T .

Вспомним, что в силу п. (3) утверждения 2.1 $\Delta \in \mathbb{R}$, а в силу п. (2) утверждения 2.1 $\Delta(0) > 0$. Рассмотрим

$$l_\varphi = \{re^{i\varphi}, 0 \leq r < r' \leq 1 : \Delta(re^{i\varphi}) > 0, \Delta(r'e^{i\varphi}) = 0\}, \quad (3.16)$$

где $\varphi \in (-\pi, \pi]$ — некоторый угол, такой, что $\varphi \neq \text{Arg } \lambda_j$, $j = 1, \dots, 6$, где λ_j — корни уравнения (3.14). Обозначим также через $\bar{l}_\varphi$ замыкание множества l_φ .

Положим

$$u(\bar{\lambda}) = -\frac{\text{sgn}(\lambda\bar{\lambda} - 1)}{4\pi\bar{\lambda}} \left(a \left(-(\text{sgn } E) \frac{1}{\bar{\lambda}} \right) - \hat{v}(0) \right), \quad \lambda \in l_\varphi, \quad (3.17)$$

где функция a определена выражением (3.13). Отметим, что в силу п. (5) утверждения 2.1 данные рассеяния $a(-\text{sgn } E/\bar{\lambda})$ определены при $\lambda \in l_\varphi$. Используя п. (3) утверждения 2.1, получаем, что

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial \lambda} = \overline{u(\bar{\lambda})}, \quad \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \bar{\lambda}} = u(\bar{\lambda}), \quad \lambda \in l_\varphi,$$

и

$$\frac{\partial \ln \Delta}{\partial \gamma} = (u(\bar{\lambda}) + \overline{u(\bar{\lambda})}) \cos \varphi + i(u(\bar{\lambda}) - \overline{u(\bar{\lambda})}) \sin \varphi, \quad \gamma \in S^1, \gamma = (\cos \varphi, \sin \varphi), \quad (3.18)$$

где $\frac{\partial \ln \Delta}{\partial \gamma}$ обозначает производную функции $\ln \Delta$ по направлению γ . Из (3.13) следует, что u ограничена при $\lambda \rightarrow 0$. Таким образом, интегрируя (3.18) вдоль l_φ , мы получаем, что

$$\ln \Delta(\lambda) = U(\bar{\lambda}) + \overline{U(\bar{\lambda})}, \quad U(\bar{\lambda}) = \int_0^{\bar{\lambda}} u(\bar{\zeta}) d\bar{\zeta}, \quad \lambda \in l_\varphi, \quad (3.19)$$

или

$$\Delta(\lambda) = \Phi(\bar{\lambda}) \overline{\Phi(\bar{\lambda})}, \quad \text{где } \Phi(\bar{\lambda}) = \exp U(\bar{\lambda}), \lambda \in l_\varphi. \quad (3.20)$$

Из того, что a , заданная выражением (3.13), определена на $\bar{l}_\varphi$, и из непрерывности Δ (см. п. (1) утверждения 2.1) следует, что представление (3.20) выполнено для $\lambda \in \bar{l}_\varphi$. В частности, из выражения (3.20) следует, что

$$\Delta(\lambda) \neq 0 \quad \text{для любого } \lambda \in \bar{l}_\varphi. \quad (3.21)$$

Однако в силу определения (3.16) $\Delta(r'e^{i\varphi}) = 0$ для $r'e^{i\varphi} \in \bar{l}_\varphi$, что противоречит (3.21). Таким образом, показано, что случай (ii) не может иметь места.

Итак, было доказано, что $\hat{v}(0) = 0$ и, следовательно, $a(\lambda, 0) \equiv 0$ на $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup 0)$.

Из уравнения (2.18) и того факта, что $a \equiv 0$ на $\mathbb{C} \setminus \mathcal{E}$, вытекает, что Δ является голоморфной функцией на $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup T \cup 0)$, где $T = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Из пп. (1), (2) утверждения 2.1 следует, что Δ является голоморфной функцией на $\mathbb{C} \setminus (\mathcal{E} \cup T)$.

Предположим теперь, что $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Поскольку $\mathcal{E}$ является замкнутым множеством, то существует $\lambda_* \in \mathcal{E}$, такое, что $|\lambda_*| = \min_{\lambda \in \mathcal{E}} |\lambda|$. Отметим, что, согласно п. (2) утверждения 2.1, $|\lambda_*| > 0$.

Если $|\lambda_*| \geq 1$, то $\Delta(\lambda)$ является голоморфной функцией на $D_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, и из пп. (2), (3) утверждения 2.1 следует, что $\Delta \equiv 1$ на D_+ . Если $|\lambda_*| < 1$, то $\Delta(\lambda)$ — голоморфная функция на множестве $D_+^h = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \lambda_*\}$, и из пп. (2), (3) следует, что $\Delta \equiv 1$ на D_+^h . С другой стороны, $\Delta(\lambda_*) = 0$, что противоречит п. (1) утверждения 2.1. Таким образом, мы доказали, что $\Delta(\lambda) \equiv 1$ на D_+ . Из п. (5) утверждения 2.1 вытекает, что $\Delta(\lambda) \equiv 1$ на $D_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > 1\}$. Наконец, из п. (1) следует, что $\Delta \equiv 1$ на $\mathbb{C}$.

Функция μ является голоморфной на $\mathbb{C}$ в силу (2.22), (2.23) и установленного факта, что $\mathcal{E} = \emptyset$, $b \equiv 0$. Функция μ также является ограниченной вследствие свойства (2.23). Из теоремы Лиувилля следует, что $\mu \equiv 1$. Наконец, из (2.24), (2.25) получаем, что $v \equiv 0$.

§4. Доказательства лемм 3.2, 3.3

Доказательство леммы 3.2. (1) Для доказательства п. (1) леммы 3.2 необходимо представить правую часть формулы (2.13) в виде суммы сходящегося ряда; тогда можно показать, что каждый член этого ряда для $\Delta_\eta(\lambda)$ совпадает с соответствующим членом ряда для $\Delta(\lambda)$.

(2) Формулы (3.5), (3.6) были выведены в [20] для случая отрицательной энергии. Здесь мы приводим их вывод одновременно для случая положительной и отрицательной энергии.

Отметим, что $\psi(z - \eta, \lambda)$ удовлетворяет (2.1) с $v_\eta(z)$ и ведет себя асимптотически как

$$\psi(z - \eta, \lambda) = e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda(\bar{z}-\bar{\eta})+(z-\eta)/\lambda)}(1 + o(1))$$

при $|z| \rightarrow \infty$. Таким образом, для собственных функций Фаддеева $\psi_\eta(z, \lambda)$, отвечающих потенциалу $v_\eta(z)$, получаем следующее представление: $\psi_\eta(z, \lambda) = e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{\eta}+\eta/\lambda)}\psi(z - \eta, \lambda)$. Следовательно, для функции $\mu_\eta(z, \lambda)$, которая соответствует функции $\psi_\eta(z, \lambda)$ и определяется с помощью (2.6), имеем $\mu_\eta(z, \lambda) = \mu(z - \eta, \lambda)$.

Соответственно для данных рассеяния получаем

$$a_\eta(\lambda) = \iint_{\mathbb{C}} v_\eta(\zeta) \mu_\eta(\zeta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta = \iint_{\mathbb{C}} v(\zeta - \eta) \mu(\zeta - \eta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta = a(\lambda)$$

и

$$\begin{aligned}
b_\eta(\lambda) &= \iint_{\mathbb{C}} \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} E}{\lambda\bar{\lambda}} \right) ((\operatorname{sgn} E)\bar{\lambda}\zeta + \lambda\bar{\zeta}) \right\} v_\eta(\zeta) \mu_\eta(\zeta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta \\
&= \iint_{\mathbb{C}} \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} E}{\lambda\bar{\lambda}} \right) ((\operatorname{sgn} E)\bar{\lambda}\zeta + \lambda\bar{\zeta}) \right\} v(\zeta - \eta) \mu(\zeta - \eta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta \\
&= \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} E}{\lambda\bar{\lambda}} \right) ((\operatorname{sgn} E)\bar{\lambda}\eta + \lambda\bar{\eta}) \right\} b(\lambda).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Аналогично, чтобы получить формулы (3.7), (3.8), отметим, что $\varphi(z - \eta, \lambda)$ удовлетворяет (2.1) с $v_\eta(z)$ и ведет себя асимптотически как

$$\varphi(z - \eta, \lambda) = e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda(\bar{z}-\bar{\eta})+(z-\eta)/\lambda)} \left(\frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda(\bar{z}-\bar{\eta}) - \frac{1}{\lambda}(z-\eta) \right) + o(1) \right)$$

при $|z| \rightarrow \infty$. Таким образом, для собственной функции $\varphi_\eta(z, \lambda)$ уравнения (2.1) с потенциалом $v_\eta(z)$, удовлетворяющей асимптотике (2.7), получаем следующее представление: $\varphi_\eta(z, \lambda) = e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{\eta}+\eta/\lambda)} (\varphi(z - \eta, \lambda) + \frac{i\sqrt{E}}{2} (\lambda\bar{\eta} - \frac{1}{\lambda}\eta) \psi(z - \eta, \lambda))$. Следовательно, для функции $\nu_\eta(z, \lambda)$, которая соответствует функции $\varphi_\eta(z, \lambda)$ и определяется в (2.7), имеем $\nu_\eta(z, \lambda) = \nu(z - \eta, \lambda) + \frac{i\sqrt{E}}{2} (\lambda\bar{\eta} - \frac{1}{\lambda}\eta) \mu(z - \eta, \lambda)$.

Соответственно для данных рассеяния получаем

$$\begin{aligned}
\alpha_\eta(\lambda) &= \iint_{\mathbb{C}} v_\eta(\zeta) \nu_\eta(\zeta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta = \iint_{\mathbb{C}} v(\zeta - \eta) \nu(\zeta - \eta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta \\
&+ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{\eta} - \frac{\eta}{\lambda} \right) \iint_{\mathbb{C}} v(\zeta - \eta) \mu(\zeta - \eta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta = \alpha(\lambda) + \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{\eta} - \frac{\eta}{\lambda} \right) a(\lambda)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\beta_\eta(\lambda) &= \iint_{\mathbb{C}} \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} E}{\lambda\bar{\lambda}} \right) ((\operatorname{sgn} E)\bar{\lambda}\zeta + \lambda\bar{\zeta}) \right\} v_\eta(\zeta) \nu_\eta(\zeta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta \\
&= \iint_{\mathbb{C}} \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} E}{\lambda\bar{\lambda}} \right) ((\operatorname{sgn} E)\bar{\lambda}\zeta + \lambda\bar{\zeta}) \right\} v(\zeta - \eta) \nu(\zeta - \eta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta \\
&\quad + \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{\eta} - \frac{\eta}{\lambda} \right) \iint_{\mathbb{C}} \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} E}{\lambda\bar{\lambda}} \right) ((\operatorname{sgn} E)\bar{\lambda}\zeta + \lambda\bar{\zeta}) \right\} \\
&\quad \times v(\zeta - \eta) \mu(\zeta - \eta, \lambda) d\operatorname{Re} \zeta d\operatorname{Im} \zeta \\
&= \exp \left\{ \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sgn} E}{\lambda\bar{\lambda}} \right) ((\operatorname{sgn} E)\bar{\lambda}\eta + \lambda\bar{\eta}) \right\} \left(\beta(\lambda) + \frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda\bar{\eta} - \frac{\eta}{\lambda} \right) b(\lambda) \right).
\end{aligned}$$

Для того чтобы доказать лемму 3.3, рассмотрим оператор

$$T = \partial_t - 8\partial_z^3 - 2w\partial_z - 8\partial_{\bar{z}}^3 - 2\bar{w}\partial_{\bar{z}}, \tag{4.2}$$

где функция w определена в (1.1b), (1.8) для некоторого потенциала v . Отметим, что $T = \partial_t + A$, где A — оператор из (1.5).

Нам понадобится следующая вспомогательная лемма, описывающая, как T действует на спектральные решения двумерного уравнения Шрёдингера.

Лемма 4.1. Пусть (v, w) удовлетворяет условиям (1.6)–(1.8) и

$$|\partial_t v(x, t)| \leq \frac{\tilde{q}(t)}{(1 + |x|)^{3+\varepsilon}} \quad \text{для некоторого } \tilde{q}(t) > 0.$$

Предположим, что для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$, и для t , принадлежащих определенному интервалу $t \in (t_1, t_2)$, решение $\psi(z, \lambda, t)$ уравнения (1.3) с асимптотикой (2.6) существует и единственно. Аналогично, предположим, что решение $\varphi(z, \lambda, t)$ уравнения (1.3) с асимптотикой (2.7) существует и единственно. Тогда

$$T\psi = i(\sqrt{E})^3 e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} \left(\left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} \right) + o(1) \right) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

$$T\varphi = i(\sqrt{E})^3 e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} \left(\frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} \right) \left(\lambda\bar{z} - \frac{z}{\lambda} \right) + 3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) + o(1) \right) \\ \text{при } |z| \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Доказательство. Прежде всего, вследствие леммы 3.1 для доказательства соотношений (4.3), (4.4) достаточно показать, что

$$\partial_t \mu \rightarrow 0, \quad \partial_z^j \mu \rightarrow 0, \quad \partial_{\bar{z}}^j \mu \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

$$\partial_t \nu \rightarrow 0, \quad \partial_z \nu \rightarrow -\frac{i\sqrt{E}}{2\lambda}, \quad \partial_{\bar{z}} \nu \rightarrow \frac{i\sqrt{E}}{2}\lambda, \quad \partial_z^k \nu \rightarrow 0, \quad \partial_{\bar{z}}^k \nu \rightarrow 0, \quad k = 2, 3, \\ \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

где $\mu(z, \lambda, t) = e^{-\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} \psi(z, \lambda, t)$, $\nu(z, \lambda, t) = e^{-\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{z}+z/\lambda)} \varphi(z, \lambda, t)$. Мы докажем только свойства (4.5). Свойства (4.6) доказываются аналогично.

Функция μ определяется как решение интегрального уравнения (2.8), где используется обозначение (2.10). Дифференцируя (2.8) по t , получаем следующее интегральное уравнение для $\partial_t \mu$:

$$\partial_t \mu(z, \lambda, t) = \iint_{\mathbb{C}} g(z - \zeta, \lambda) \partial_t v(\zeta, t) \mu(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta \\ + \iint_{\mathbb{C}} g(z - \zeta, \lambda) v(\zeta, t) \partial_t \mu(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta. \quad (4.7)$$

Дифференцируя (2.8) j раз по z , получаем следующее интегральное уравнение для $\partial_z^j \mu$:

$$\partial_z^j \mu(z, \lambda, t) = \iint_{\mathbb{C}} \partial_z^j g(z - \zeta, \lambda) v(\zeta, t) \mu(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta, \quad j = 1, 2, 3.$$

Проинтегрируем правую часть по частям, учитывая свойство (1.7) функции v и то, что $\partial_z^j g(z - \zeta, \lambda) = (-1)^j \partial_{\bar{\zeta}}^j g(z - \zeta, \lambda)$. Таким образом, получаем

$$\partial_z^j \mu(z, \lambda, t) = \iint_{\mathbb{C}} g(z - \zeta, \lambda) \partial_{\bar{\zeta}}^j (v(\zeta, t) \mu(\zeta, \lambda, t)) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.8)$$

Аналогично показывается, что $\partial_{\bar{z}}^j \mu$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\partial_{\bar{z}}^j \mu(z, \lambda, t) = \iint_{\mathbb{C}} g(z - \zeta, \lambda) \partial_{\bar{\zeta}}^j (v(\zeta, t) \mu(\zeta, \lambda, t)) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.8) является уравнением на неизвестную функцию $\partial_z^j \mu$: предполагается, что функции $\partial_z^k \mu$, $k < j$, определены ранее. Аналогично, уравнение (4.9) является уравнением на неизвестную функцию $\partial_{\bar{z}}^j \mu$, где предполагается, что функции $\partial_{\bar{z}}^k \mu$, $k < j$, определены ранее. Из предположений леммы следует, что для каждого из уравнений (4.7)–(4.9) решение существует, единственно и может быть представлено в виде $(1 + |z|)^{2+\varepsilon/2} u(z, \lambda, t)$ для некоторой подходящей функции $u(\cdot, \lambda, t) \in L^2(\mathbb{C})$.

В [23] было показано, что функция g , определенная в (2.10), обладает следующим свойством: $|g(z, \lambda)| \leq \text{const} / |z|$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$, и достаточно больших z , и $|g(z, \lambda)| \leq \text{const} |\ln |z||$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \neq 1$, и достаточно малых z . Из этого свойства следует, что

$$\left| \iint_{\mathbb{C}} g(z - \zeta, \lambda) U(\zeta) d\text{Re} \zeta d\text{Im} \zeta \right| \rightarrow 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty$$

для любой функции $U \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$. (4.10)

Обозначим через $\xi(z, \lambda, t)$ решение любого из уравнений (2.8), (4.7)–(4.9). Как указано выше, $\xi(z, \lambda, t)$ может быть представлено в виде $\xi(z, \lambda, t) = (1 + |z|)^{2+\varepsilon/2} u(z, \lambda, t)$ для некоторой функции $u(\cdot, \lambda, t) \in L^2(\mathbb{C})$. Тогда из предположений на функцию v следует, что $\partial_z^j v(\cdot, t) \xi(\cdot, \lambda, t) \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$ и $\partial_{\bar{z}}^j v(\cdot, t) \xi(\cdot, \lambda, t) \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$ при $j = 0, \dots, 3$ и $\partial_t v(\cdot, t) \xi(\cdot, \lambda, t) \in L^1(\mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{C})$. Таким образом, из (4.10) при $U(\cdot) = \partial_t v(\cdot, t) \mu(\cdot, \lambda, t)$ и $U(\cdot) = v(\cdot, t) \partial_t \mu(\cdot, \lambda, t)$ следует, что правая часть в (4.7) стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Аналогично, рассматривая уравнения (4.8), (4.9) последовательно, мы получаем, что правая часть каждого из них стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Следовательно, $\partial_t \mu \rightarrow 0$, $\partial_z^j \mu \rightarrow 0$, $\partial_{\bar{z}}^j \mu \rightarrow 0$, $j = 1, 2, 3$, при $|z| \rightarrow \infty$. $\square$

Доказательство леммы 3.3. Формулы (3.9), (3.10) известны (см., например, [12]). Поскольку их вывод аналогичен выводу формул (3.11), (3.12), мы ограничимся выводом последних. Вывод аналогов формул (3.9)–(3.12) для случая нулевой энергии можно найти в [2].

Уравнение (1.1) представляет условие, при котором

$$[T, L]\eta = ET\eta \quad \text{для любой функции } \eta, \text{ такой, что } L\eta = E\eta, \quad (4.11)$$

где оператор L определен в (2.1), а оператор T — в (4.2) (см. [22], [2]).

Положим $\eta = \varphi$, где φ — решение уравнения $L\varphi = E\varphi$ с асимптотикой (2.7). Тогда из (4.11) следует, что $LT\varphi = E\varphi$. Из леммы 4.1 получаем, что

$$T\varphi = i(\sqrt{E})^3 e^{\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{z} + z/\lambda)} \left(\frac{i\sqrt{E}}{2} \left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} \right) \left(\lambda\bar{z} - \frac{z}{\lambda} \right) + 3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) + o(1) \right),$$

$|z| \rightarrow \infty$.

Из единственности решения уравнения (2.1) с асимптотикой (2.6) при рассматриваемом значении λ вытекает, что

$$T\varphi = i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} \right) \varphi + 3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \psi.$$

Другими словами,

$$\partial_t \varphi = 8\partial_z^3 \varphi + 2w\partial_z \varphi + 8\partial_{\bar{z}}^3 \varphi + 2\bar{w}\partial_{\bar{z}} \varphi + i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} \right) \varphi + 3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) \psi. \quad (4.12)$$

Теперь запишем функцию $\alpha(\lambda, t)$ в виде

$$\alpha(\lambda, t) = \iint_{\mathbb{C}} e^{-\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{\zeta} + \zeta/\lambda)} v(\zeta, t) \varphi(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta$$

и вычислим ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \partial_t \alpha(\lambda, t) &= \iint_{\mathbb{C}} e^{-\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{\zeta} + \zeta/\lambda)} \partial_t v(\zeta, t) \varphi(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta \\ &\quad + \iint_{\mathbb{C}} e^{-\frac{i\sqrt{E}}{2}(\lambda\bar{\zeta} + \zeta/\lambda)} v(\zeta, t) \partial_t \varphi(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставляя (1.1) и (4.12) в (4.13), интегрируя получающееся уравнение по частям и учитывая, что $-4\partial_{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}}\varphi + v\varphi = E\varphi$, получаем

$$\partial_t \alpha(\lambda, t) = 3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) (a(\lambda, t) - \hat{v}(0)) \quad (4.14)$$

(подробные вычисления для вывода уравнения (4.14) см. в электронной версии данной статьи [18]). Из формул (3.9), (4.14) вытекает (3.11).

Аналогично, запишем функцию $\beta(\lambda, t)$ в виде

$$\beta(\lambda, t) = \iint_{\mathbb{C}} e^{\frac{\sqrt{-E}}{2}(\bar{\lambda}\zeta + \bar{\zeta}/\bar{\lambda})} v(\zeta, t) \varphi(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta$$

и вычислим ее производную по времени:

$$\begin{aligned} \partial_t \beta(\lambda, t) &= \iint_{\mathbb{C}} e^{\frac{\sqrt{-E}}{2}(\bar{\lambda}\zeta + \bar{\zeta}/\bar{\lambda})} \partial_t v(\zeta, t) \varphi(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta \\ &\quad + \iint_{\mathbb{C}} e^{\frac{\sqrt{-E}}{2}(\bar{\lambda}\zeta + \bar{\zeta}/\bar{\lambda})} v(\zeta, t) \partial_t \varphi(\zeta, \lambda, t) d \operatorname{Re} \zeta d \operatorname{Im} \zeta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Подставляя (1.1) и (4.12) в (4.15), интегрируя получающееся выражение по частям и учитывая, что $-4\partial_{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}}\varphi + v\varphi = E\varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \partial_t \beta(\lambda, t) &= i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} + (\operatorname{sgn} E) \left(\bar{\lambda}^3 + \frac{1}{\bar{\lambda}^3} \right) \right) \beta(\lambda, t) \\ &\quad + 3i(\sqrt{E})^3 \left(\lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right) b(\lambda, t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

(подробные вычисления для вывода уравнения (4.16) можно найти в электронной версии данной статьи [18]). Используя формулу (3.10), получаем (3.12). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [2] M. Boiti, J.J.-P. Leon, M. Manna, F. Pempinelli, *On a spectral transform of a KdV-like equation related to the Schrödinger operator in the plane*, Inverse Problems, **3**:1 (1987), 25–36.

- [3] M. Boiti, J.J.-P. Leon, L. Martina, F. Pempinelli, *Scattering of localized solitons in the plane*, Phys. Lett. A., **132** (1988), 432–439.
- [4] A. de Bouard, J.-C. Saut, *Solitary waves of generalized Kadomtsev–Petviashvili equations*, Ann. Inst. H. Poincaré, Analyse Non Linéaire, **14**:2 (1997), 211–236.
- [5] A. de Bouard, J.-C. Saut, *Symmetries and decay of the generalized Kadomtsev–Petviashvili solitary waves*, SIAM J. Math. Anal., **28**:5 (1997), 1064–1085.
- [6] Л. Д. Фаддеев, *Растущие решения уравнения Шрёдингера*, Докл. АН СССР, **165** (1965), 514–517.
- [7] Л. Д. Фаддеев, *Обратная задача квантовой теории рассеяния*. II, в кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, т. 3, ВИНТИ, М., 1974, 93–180.
- [8] A. S. Fokas, M. J. Ablowitz, *On the inverse scattering of the time-dependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev–Petviashvili equation*, Stud. Appl. Math., **69**:3 (1983), 211–228.
- [9] A. S. Fokas, P. M. Santini, *Coherent structures in multidimensions*, Phys. Rev. Lett., **63**:13 (1983), 1329–1333.
- [10] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.
- [11] П. Г. Гриневич, *Рациональные солитоны уравнений Веселова–Новикова — безотражательные при фиксированной энергии двумерные потенциалы*, ТМФ., **69**:2 (1986), 307–310.
- [12] П. Г. Гриневич, *Преобразование рассеяния для двумерного оператора Шрёдингера с убывающим на бесконечности потенциалом при фиксированной ненулевой энергии*, УМН, **55**:6(336) (2000), 3–70.
- [13] П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, *Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шрёдингера и нелокальная задача Римана*, Докл. АН СССР, **286**:1 (1986), 19–22.
- [14] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, *Двумерная «обратная задача рассеяния» для отрицательных энергий и обобщенно-аналитические функции*. I. Энергии ниже основного состояния, Функц. анализ и его прил., **22**:1 (1988), 23–33.
- [15] Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, *$\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния*, УМН, **42**:3 (1987), 93–152.
- [16] A. V. Kazeykina, *A large time asymptotics for the solution of the Cauchy problem for the Novikov–Veselov equation at negative energy with non-singular scattering data*, Inverse Problems, **28**:5 (2012), 055017.
- [17] А. В. Казейкина, *Отсутствие солитонов кондуктивного типа для уравнения Веселова–Новикова при нулевой энергии*, Функц. анализ и его прил., **47**:1 (2013), 79–82.
- [18] A. V. Kazeykina, *Absence of solitons with sufficient algebraic localization for the Novikov–Veselov equation at nonzero energy*, <http://arxiv.org/abs/1201.2758>.
- [19] A. V. Kazeykina, R. G. Novikov, *A large time asymptotics for transparent potentials for the Novikov–Veselov equation at positive energy*, J. Nonlinear Math. Phys., **18**:3 (2011), 377–400.
- [20] A. V. Kazeykina, R. G. Novikov, *Large time asymptotics for the Grinevich–Zakharov potentials*, Bull. Sci. Math., **135**:4 (2011), 374–382.
- [21] A. V. Kazeykina, R. G. Novikov, *Absence of exponentially localized solitons for the Novikov–Veselov equation at negative energy*, Nonlinearity, **24**:6 (2011), 1821–1830.
- [22] С. В. Манаков, *Метод обратной задачи рассеяния и двумерные эволюционные уравнения*, УМН, **31**:5 (1976), 245–246.
- [23] R. G. Novikov, *The inverse scattering problem on a fixed energy level for the two-dimensional Schrödinger operator*, J. Funct. Anal., **103**:2 (1992), 409–463.

- [24] R. G. Novikov, *Absence of exponentially localized solitons for the Novikov–Veselov equation at positive energy*, Physics Letters A, **375**:9 (2011), 1233–1235.
- [25] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Явные формулы и эволюционные уравнения*, Докл. АН СССР, **279**:1 (1984), 20–24.
- [26] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Конечнозонные двумерные потенциальные операторы Шрёдингера. Потенциальные операторы*, Докл. АН СССР, **279**:4 (1984), 784–788.

Московский государственный университет
СМАР, Ecole Polytechnique, France
e-mail: kazeykina@cmap.polytechnique.fr

Поступило в редакцию
20 января 2012 г.