Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Точки совпадения двух отображений, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 1, 89–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3134>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:16:32

Точки совпадения двух отображений*

© 2014. А. В. АРУТЮНОВ

Рассмотрим следующую задачу. Пусть даны метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно и заданы отображения $\Psi, \Phi: X \rightarrow Y$. Рассмотрим уравнение

$$\Psi(x) = \Phi(x). \quad (1)$$

Решение этого уравнения называется точкой совпадения отображений Ψ и Φ . Задача заключается в нахождении точек совпадения. Наш интерес к задаче (1) мотивируется следующими обстоятельствами. Пусть, во-первых, $X = Y$ и Ψ — тождественное отображение. Тогда задача о точках совпадения сводится к задаче нахождения неподвижной точки отображения Φ , поиск которой основан на принципе сжимающих отображений (см. [1]). Во-вторых, задача (1) нередко встречается в приложениях. Перейдем непосредственно к изложению результатов.

Через $B_X(r, x) \subset X$ обозначим замкнутый шар радиуса r с центром в точке x , и аналогичное обозначение введем в пространстве Y . Для произвольного подмножества $M \subset Y$ и $r \geq 0$ через $B_Y(r, M) = \bigcup_{y \in M} B_Y(r, y)$ обозначим r -окрестность множества M . В декартовом произведении $X \times Y$ метрических пространств метрику определим по формуле $\rho = \rho_X + \rho_Y$.

Определение. Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $\Psi: X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если

$$\Psi(B_X(r, x)) \supseteq B_Y(\alpha r, \Psi(x)) \quad \text{для любых } r \geq 0, x \in X. \quad (2)$$

Итак, пусть заданы отображения $\Psi, \Phi: X \rightarrow Y$, первое из которых является α -накрывающим. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Из приведенного определения, взяв в формуле (2) $r = \rho_Y(\Psi(x), \Phi(x))$, получаем, что для любого $x \in X$ существует такое $x' \in X$, что

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Psi(x'), \Phi(x)) &\leq \delta \rho_Y(\Psi(x), \Phi(x)), \\ \rho_X(x, x') &\leq \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x), \Phi(x)). \end{aligned} \quad (3)$$

Более того, очевидно, что x' можно выбрать так, что $\Psi(x') = \Phi(x)$, однако более практично (например, с вычислительной точки зрения) для нахождения x' вместо поиска точного решения выписанного уравнения решать его приближенно, т. е. искать x' , удовлетворяющее неравенству (3). Это приводит к следующему итерационному методу нахождения точек совпадения.

Возьмем последовательность неотрицательных чисел $\{\delta_i\}$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in X$. В силу сказанного выше существует такая последо-

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 12-01-00427, и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ.

вательность $\{x_i\}$, что для $i = 0, 1, \dots$

$$\rho_Y(\Psi(x_{i+1}), \Phi(x_i)) \leq \delta_i \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)), \quad (4)$$

$$\rho_X(x_{i+1}, x_i) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)). \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть пространство X полно, отображение $\Psi: X \rightarrow Y$ является α -накрывающим и его график $\text{grh}(\Psi) = \{(x, y) \in X \times Y : y = \Psi(x)\}$ замкнут, а отображение $\Phi: X \rightarrow Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$ и, более того,

$$\beta + \alpha \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \delta_i < \alpha. \quad (6)$$

Тогда для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $\{x_i\}$, которая удовлетворяет условиям (4), (5) при всех i , и любая такая последовательность сходится к некоторой точке совпадения $\xi = \xi(x_0)$, для которой справедливо неравенство

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq \alpha^{-1} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\delta_j + \beta/\alpha) \right) \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)). \quad (7)$$

Сразу же отметим, что в силу (6) существует такое $\hat{\delta} > 0$, что $(\delta_j + \beta/\alpha) \leq (\hat{\delta} + \beta/\alpha) < 1$ для всех достаточно больших номеров j . Поэтому ряд в (7) мажорируется геометрической прогрессией со знаменателем, меньшим единицы, и, значит, он сам сходится. Кроме того, если $\delta_i = \delta$ для любого i , то $\prod_{j=1}^i (\delta_j + \beta/\alpha) = (\delta + \beta/\alpha)^i$ и, значит, оценка (7) принимает вид

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Отметим, что идея предложенного итерационного метода (4), (5) в чем-то близка к модификации метода Ньютона решения уравнения с недифференцируемым оператором, рассмотренного в [2, с. 150].

Доказательство теоремы 1. Докажем, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной. Деля метрику ρ_Y на α , не теряя общности, будем считать, что $\alpha = 1$ и, значит, $\beta < 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) &\leq \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_{i-1})) + \rho_Y(\Phi(x_{i-1}), \Phi(x_i)) \\ &\leq \delta_i \rho_Y(\Psi(x_{i-1}), \Phi(x_{i-1})) + \beta \rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq (\delta_i + \beta) \rho_Y(\Psi(x_{i-1}), \Phi(x_{i-1})). \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что

$$\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) \leq \prod_{j=1}^i (\delta_j + \beta) \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \quad \text{для любого } i \geq 1. \quad (8)$$

Отсюда в силу (5) имеем

$$\rho_X(x_{i+1}, x_i) \leq \prod_{j=1}^i (\delta_j + \beta) \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \quad \text{для любого } i \geq 1. \quad (9)$$

Поскольку по условию $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \delta_i + \beta < 1$, из (9) получаем, что последовательность $\{x_i\}$ фундаментальна и

$$\rho_X(x_i, x_0) \leq \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i (\delta_j + \beta)\right) \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \quad \text{для любого } i. \quad (10)$$

В силу полноты пространства X фундаментальная последовательность $\{x_i\}$ сходится к некоторой точке ξ . Поскольку Φ непрерывно, $\Phi(x_i) \rightarrow \Phi(\xi)$, откуда в силу (8) следует, что $\Psi(x_i) \rightarrow \Phi(\xi)$, из чего в силу замкнутости графика $\text{grph}(\Psi)$ заключаем, что $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$. Переходя в (10) к пределу, получаем (7). Теорема доказана.

Пусть для простоты $\delta_i = \delta$ для любого i . Положим

$$\gamma_1 = \delta + \beta/\alpha, \quad \gamma_2 = (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1}. \quad (11)$$

Если требуется найти точку совпадения $\xi(x_0)$ с точностью до некоторого $\varepsilon > 0$, то в качестве приближенного значения для нее можно брать значение $x_{i(\varepsilon)}$, где

$$i(\varepsilon) = \lceil \log_{\gamma_1} \varepsilon - \log_{\gamma_1} (\gamma_2 \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))) \rceil + 1$$

($[a]$ — целая часть числа a). Если значения δ_i не все одинаковы, то соответствующая оценка на $i(\varepsilon)$ просто более громоздка.

Теореме 1 можно придать и следующий смысл. На каждом этапе вычисления x_{i+1} мы решаем уравнение $\Psi(x) = \Phi(x_i)$, и при этом погрешность вычислений не должна превышать числа $\delta_i \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))$.

Приведем многозначный аналог теоремы 1. Пусть Ψ и Φ — многозначные отображения, ставящие в соответствие каждой точке $x \in X$ непустые замкнутые подмножества $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ метрического пространства Y соответственно. Точка ξ называется *точкой совпадения* многозначных отображений Ψ и Φ , если

$$\Psi(\xi) \cap \Phi(\xi) \neq \emptyset.$$

Задача заключается в нахождении точек совпадения.

Множество $\{(x, y) \in X \times Y : y \in \Psi(x)\}$, называемое *графиком* отображения Ψ , обозначим через $\text{grph}(\Psi)$. Многозначное отображение Ψ называется α -*накрывающим*, если для него имеет место (2). Многозначное отображение Φ удовлетворяет условию Липшица, если оно удовлетворяет условию Липшица относительно метрики Хаусдорфа h . Для множеств $M_1, M_2 \subseteq Y$ положим $\text{dist}(M_1, M_2) = \inf\{\rho_Y(y_1, y_2), y_1 \in M_1, y_2 \in M_2\}$. Для произвольного множества $E \subseteq X$ через $\Psi(E)$ обозначим объединение всех множеств вида $\Psi(x)$, где $x \in E$.

Пусть многозначное отображение Ψ является α -накрывающим, а Φ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$. Возьмем произвольные числа $c > 0$ и $\delta > 0$, такие, что $\beta + \alpha\delta < \alpha$. Из того, что Ψ является α -накрывающим, вытекает, что для произвольного $x_0 \in X$ существуют такие последовательности $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, что

$$\rho_X(x_0, x_1) \leq \alpha^{-1} \text{dist}(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + \delta, \quad (12)$$

$$\rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq \gamma_1 \rho_X(x_{i-1}, x_{i-2}) \quad \text{для любого } i \geq 2, \quad (13)$$

$$\rho_Y(y_i, y_{i-1}) \leq c \rho_X(x_{i-1}, x_{i-2}) \quad \text{для любого } i \geq 2, \quad (14)$$

$$\text{dist}(y_i, \Psi(x_i)) \rightarrow 0, \quad \text{dist}(y_i, \Phi(x_i)) \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Теорема 2. *Предположим, что многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ является α -накрывающим и его график замкнут, а многозначное отображение $\Phi: X \rightrightarrows Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$. Пусть также хотя бы один из графиков $\text{gph}(\Psi)$, $\text{gph}(\Phi)$ является полным пространством.*

Тогда для любого $x_0 \in X$ существуют последовательности $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, удовлетворяющие условиям (12)–(15), и для произвольных таких последовательностей последовательность $\{x_i\}$ сходится к некоторой точке совпадения $\xi = \xi(x_0)$, для которой

$$\rho_X(\xi, x_0) \leq \gamma_2(\text{dist}(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + \alpha\delta), \quad (16)$$

где число γ_2 определяется формулой (11).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2 дает следующий итерационный алгоритм приближенного нахождения точки совпадения. Возьмем две любые сходящиеся к нулю последовательности неотрицательных чисел $\{\nu_i^1\}$ и $\{\nu_i^2\}$. Пусть $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ — произвольные последовательности, для которых имеют место условия (12)–(14) и

$$\rho_Y(y_i, \Psi(x_i)) \leq \nu_i^1, \quad \rho_Y(y_i, \Phi(x_i)) \leq \nu_i^2 \quad \text{для любого } i. \quad (17)$$

В силу теоремы 2 последовательность $\{x_i\}$ сходится к некоторой точке совпадения ξ , для которой имеет место неравенство (16). В этом алгоритме на i -м шаге, когда точки $x_1, \dots, x_{i-1}, y_1, \dots, y_{i-1}$ уже построены, сначала надо найти точку y_i , для которой выполняется (14) и $\rho_Y(y_i, \Phi(x_{i-1})) \leq \nu_i^2$, после чего надо найти точку x_i , для которой выполняется (13) и $\rho_Y(y_i, \Psi(x_i)) \leq \nu_i^1$.

Несложно доказывается оценка

$$\rho_X(\xi, x_i) \leq \gamma_2 \gamma_1^i (\text{dist}(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + \alpha\delta).$$

Она позволяет вычислить количество итераций i , необходимых для нахождения точки совпадения с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Наряду с приведенным теорема 2 дает и другие итерационные методы приближенного нахождения точки совпадения многозначных отображений, например такой. Возьмем $\delta, \delta_1, \delta_2$, удовлетворяющие условиям

$$\delta > 0, \quad \delta_1, \delta_2 \geq 0, \quad \beta + \alpha\delta < \alpha, \quad \beta + \alpha\delta > \alpha(\delta_1 + \delta_2),$$

а также $c > 0$. Для произвольного $x_0 \in X$ существуют такие последовательности $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$, что имеют место условия (12)–(14) и

$$\rho_Y(\Phi(x_i), y_{i+1}) \leq \delta_1 \text{dist}(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) \quad \text{для любого } i \geq 0, \quad (18)$$

$$\rho_Y(\Psi(x_{i+1}), y_{i+1}) \leq \delta_2 \text{dist}(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) \quad \text{для любого } i \geq 0. \quad (19)$$

Теорема 3. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Тогда для любого $x_0 \in X$ существуют последовательности $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, удовлетворяющие условиям (12)–(14), (18), (19) и для произвольных таких последовательностей последовательность $\{x_i\}$ сходится к некоторой точке совпадения ξ , для которой имеет место (16).*

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы 2.

Пример 1 из [3] показывает, что если в теореме 2 отказаться от полноты обоих графиков $\text{gph}(\Psi)$ и $\text{gph}(\Phi)$, то точек совпадения вообще может не существовать. В то же время при других предположениях можно гарантировать

существование такой точки ξ , что

$$\text{dist}(\Psi(\xi), \Phi(\xi)) = 0. \quad (20)$$

Многозначное отображение Ψ называется полунепрерывным сверху в точке x_0 , если из того, что $x_i \rightarrow x_0$, $y_i \in \Psi(x_i)$, следует, что $\text{dist}(y_i, \Psi(x_0)) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Оно называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке.

Теорема 4. Пусть пространство X полно, многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ является α -накрывающим и полунепрерывным сверху, а $\Phi: X \rightrightarrows Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$.

Тогда для любого $x_0 \in X$ существуют последовательности $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, удовлетворяющие либо условиям (12)–(15), либо условиям (12)–(14), (18), (19), и для любых таких последовательностей последовательность $\{x_i\}$ сходится к некоторой точке ξ , для которой имеет место (20) и (16).

Эта заметка является естественным развитием работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1989. [2] М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутцкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969. [3] А. В. Арутюнов, Докл. РАН, **416:2** (2007), 151–155.

Российский университет дружбы народов
e-mail: arutun@orc.ru

Поступило в редакцию
26 июня 2012 г.

УДК 517.95

А-гипергеометрические функции в трансцендентных вопросах алгебраической геометрии*

© 2014. А. В. Стояновский

1. Введение. В ряде работ И. М. Гельфанд с соавторами ввели и изучили важный класс А-гипергеометрических функций. Определение А-гипергеометрической системы линейных уравнений с частными производными и некоторые свойства ее решений приведены в работе [1].

Цель этой заметки состоит в том, чтобы дать общую алгебро-геометрическую конструкцию А-гипергеометрических функций, включающую в частных случаях известные ранее конструкции. Напомним эти известные конструкции.

(а) В работе [2] показано, что периоды произведений комплексных степеней произвольных полиномов от нескольких переменных, т. е. интегралы

$$\oint_C f_1(x_1, \dots, x_m)^{\lambda_1} \cdots f_n(x_1, \dots, x_m)^{\lambda_n} x_1^{\beta_1-1} \cdots x_m^{\beta_m-1} dx_1 \cdots dx_m \quad (1)$$

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00536.