Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Стояновский, *A*-гипергеометрические функции в трансцендентных вопросах алгебраической геометрии, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 1, 93–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3135>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 02:12:38

существование такой точки ξ , что

$$\text{dist}(\Psi(\xi), \Phi(\xi)) = 0. \quad (20)$$

Многозначное отображение Ψ называется полунепрерывным сверху в точке x_0 , если из того, что $x_i \rightarrow x_0$, $y_i \in \Psi(x_i)$, следует, что $\text{dist}(y_i, \Psi(x_0)) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. Оно называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке.

Теорема 4. Пусть пространство X полно, многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ является α -накрывающим и полунепрерывным сверху, а $\Phi: X \rightrightarrows Y$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta < \alpha$.

Тогда для любого $x_0 \in X$ существуют последовательности $\{x_i\}$, $\{y_i\}$, удовлетворяющие либо условиям (12)–(15), либо условиям (12)–(14), (18), (19), и для любых таких последовательностей последовательность $\{x_i\}$ сходится к некоторой точке ξ , для которой имеет место (20) и (16).

Эта заметка является естественным развитием работы [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1989. [2] М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутцкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969. [3] А. В. Арутюнов, Докл. РАН, **416:2** (2007), 151–155.

Российский университет дружбы народов
e-mail: arutun@orc.ru

Поступило в редакцию
26 июня 2012 г.

УДК 517.95

А-гипергеометрические функции в трансцендентных вопросах алгебраической геометрии*

© 2014. А. В. Стояновский

1. Введение. В ряде работ И. М. Гельфанд с соавторами ввели и изучили важный класс А-гипергеометрических функций. Определение А-гипергеометрической системы линейных уравнений с частными производными и некоторые свойства ее решений приведены в работе [1].

Цель этой заметки состоит в том, чтобы дать общую алгебро-геометрическую конструкцию А-гипергеометрических функций, включающую в частных случаях известные ранее конструкции. Напомним эти известные конструкции.

(а) В работе [2] показано, что периоды произведений комплексных степеней произвольных полиномов от нескольких переменных, т. е. интегралы

$$\oint_C f_1(x_1, \dots, x_m)^{\lambda_1} \cdots f_n(x_1, \dots, x_m)^{\lambda_n} x_1^{\beta_1-1} \cdots x_m^{\beta_m-1} dx_1 \cdots dx_m \quad (1)$$

*Работа частично поддержана грантом РФФИ 10-01-00536.

по m -мерному вещественному циклу C со значениями в соответствующей локальной системе, суть A -гипергеометрические функции от коэффициентов полиномов $f_1, \dots, f_n$.

(b) В [3] показано, что периоды экспоненты произвольного полинома, т. е. интегралы

$$\int_C e^{f(x_1, \dots, x_m)} x_1^{\beta_1-1} \dots x_m^{\beta_m-1} dx_1 \dots dx_m, \quad (2)$$

где C есть, возможно, некомпактный m -мерный контур (со значениями в локальной системе), такой, что подынтегральное выражение стремится на нем к нулю на бесконечности, суть A -гипергеометрические функции от коэффициентов полинома f .

(c) Напомним фундаментальную теорему Штурмфельса [4] — «конструктивную основную теорему алгебры».

Теорема 1. *Зависимость комплексных корней произвольного алгебраического уравнения от одной переменной*

$$f(x) = 0 \quad (3)$$

от коэффициентов полинома $f(x)$ выражается (многозначной) A -гипергеометрической функцией.

Все эти теоремы проверяются прямым дифференцированием, показывающим, что требуемая величина (интеграл или корень уравнения) удовлетворяет A -гипергеометрической системе уравнений с частными производными как функция от коэффициентов.

Настоящая заметка возникла при попытках понять и объединить эти конструкции. Результатом является общая конструкция из теории периодов алгебраических многообразий, см. основную теорему ниже. Эта теорема и ее следствия — теоремы 2, 3 ниже — показывают, что A -гипергеометрические функции должны играть важную роль в мотивных конструкциях алгебраической геометрии, так как они образуют «мост» между чисто аналитической и чисто алгебраической теориями.

Автор благодарен М. В. Финкельбергу за проясняющие обсуждения.

2. Основная теорема.

Основная теорема. Пусть

$$x = (x_1, \dots, x_m) \rightarrow z = f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

— полиномиальное отображение аффинных или проективных пространств, где $f_i(x) = \sum_j a_{ij} x^j$, $1 \leq i \leq n$, $j = (j_1, \dots, j_m)$, $x^j = x_1^{j_1} \dots x_m^{j_m}$. Пусть $g = g(z_1, \dots, z_n)$ — (вообще говоря, многозначная) голоморфная функция, квазиоднородная по переменным z_i (т. е. $z_i dg/dz_i = \alpha_i g$ при некотором числе α_i для каждого i). Пусть ω — (вообще говоря, многозначная) голоморфная дифференциальная m -форма от переменных $x_1, \dots, x_m$, квазиоднородная по этим переменным (т. е. $x_p d\omega/dx_p = \beta_p \omega$). Тогда интегралы

$$\oint_C g(f(x)) \omega \quad (4)$$

суть A -гипергеометрические функции от коэффициентов a_{ij} . Здесь C есть m -мерный цикл со значениями в локальной системе, определяемой многозначным подынтегральным выражением.

Доказательство. А-гипергеометрические уравнения в частных производных вытекают из следующих вычислений:

$$\frac{\partial^q}{\partial a_{i_1 j_{(1)}} \cdots \partial a_{i_q j_{(q)}}} \oint_C g(f(x)) \omega = \oint_C \frac{\partial^q g}{\partial z_{i_1} \cdots \partial z_{i_q}} (f(x)) x^{j_{(1)} + \cdots + j_{(q)}} \omega; \quad (5)$$

далее, для каждого $p = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} j_p a_{ij} \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \oint_C g(f(x)) \omega &= \oint_C \sum_{i,j} \frac{\partial g}{\partial z_i} (f(x)) j_p a_{ij} x^j \omega \\ &= \oint_C x_p \frac{\partial g(f(x))}{\partial x_p} \omega = -\beta_p \oint_C g(f(x)) \omega, \end{aligned} \quad (6)$$

так как форма ω квазиоднородна, а $g(f(x))\omega$ замкнута; кроме того, для каждого $i_0 = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_j a_{i_0 j} \frac{\partial}{\partial a_{i_0 j}} \oint_C g(f(x)) \omega &= \oint_C \sum_j \frac{\partial g}{\partial z_{i_0}} (f(x)) a_{i_0 j} x^j \omega \\ &= \oint_C \frac{\partial g}{\partial z_{i_0}} (f(x)) z_{i_0}(x) \omega = \alpha_{i_0} \oint_C g(f(x)) \omega, \end{aligned} \quad (7)$$

так как функция $g(z)$ квазиоднородна. $\square$

3. Примеры. Пример (а) из введения следует непосредственно из основной теоремы, если положить

$$g(z_1, \dots, z_n) = z_1^{\lambda_1} \cdots z_n^{\lambda_n}, \quad \omega = x_1^{\beta_1-1} \cdots x_m^{\beta_m-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Пример (b) получается, если взять $n = 1$,

$$g(z) = e^z, \quad \omega = x_1^{\beta_1-1} \cdots x_m^{\beta_m-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

При этом уравнение (7) не используется (за счет того, что из равенства (5) в данном случае следует больше уравнений), так что $g(z)$ не обязана быть квазиоднородной.

Пример (с) получается, если положить $m = n = 1$, $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \log z$, $\omega = dx$. Действительно, интегрируя по частям, получаем $\oint \log z dx = -\oint x dz/z$. Так же выводится и уравнение (7).

(d) **Теорема 2.** Пусть

$$f(x_1, \dots, x_k, y) = \sum c_{i_1 \dots i_k j} x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k} y^j = 0 \quad (8)$$

— произвольное полиномиальное уравнение. Тогда y есть (многозначная) А-гипергеометрическая функция от коэффициентов $c_{i_1 \dots i_k j}$, зависящая от $x_1, \dots, x_k$ как от параметров.

Эта теорема получается, если в основной теореме положить $n = 1$, $g(z) = \log z$, $\omega = dy$. При этом уравнение квазиоднородности (6) используется только по переменной y , а $x_1, \dots, x_k$ играют роль параметров, так что форма $g(f(x, y))\omega$ должна быть замкнутой только по переменной y .

(е) Следующая теорема получается, если положить

$$g(z_1, \dots, z_n) = z_1^{\lambda_1} \cdots z_l^{\lambda_l} / (z_{l+1} \cdots z_n)$$

в основной теореме и воспользоваться теоремой Коши о вычетах.

Теорема 3. *Интеграл Гельфанда–Лере*

$$\oint_C f_1(x)^{\lambda_1} \dots f_l(x)^{\lambda_l} x_1^{\beta_1-1} \dots x_m^{\beta_m-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m / (df_{l+1} \wedge \dots \wedge df_n) |_{f_{l+1}(x)=\dots=f_n(x)=0} \quad (9)$$

по циклу C со значениями в соответствующей локальной системе на многообразии

$$f_{l+1}(x_1, \dots, x_m) = \dots = f_n(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad (10)$$

есть A -гипергеометрическая функция от коэффициентов полиномов $f_1, \dots, f_n$.

В случае $m = n$, $l = 0$ эта теорема сформулирована в статье [4].

Замечание. Все результаты работы остаются справедливыми, если заменить в них аффинные или проективные пространства на произвольные торические многообразия.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. М. Гельфанд, А. В. Зелевинский, М. М. Капранов, Функц. анализ и его прил., **23**:2 (1989), 12–26. [2] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, Adv. Math., **84**:2 (1990), 255–271. [3] I. M. Gelfand, M. I. Graev, Lett. Math. Phys., **50**:1 (1999), 1–28; <http://arxiv.org/abs/math/9905134>. [4] B. Sturmfels, Discrete Math., **210**:1–3 (2000), 171–181.

Российский государственный гуманитарный университет
e-mail: alexander.stoyanovsky@gmail.com

Поступило в редакцию
17 апреля 2012 г.

Заведующая редакцией и научный редактор Г. М. Цукерман

Подписано к печати 24.01.2014. Дата выхода в свет 20.02.2014. Формат $70 \times 100/16$

Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,8. Усл. кр.-отт. 1,7 тыс. Бум. л. 3,0

Уч.-изд. л. 8,0. Тираж 174 экз. Заказ 1991.

Учредитель: Российская академия наук

Адрес редакции: 117966 Москва, ГСП-1, ул. Губкина 8, комн. 624. Тел. 938-37-56

Издатель: Российская академия наук, Издательство «Наука»,

117997 Москва, Профсоюзная, ул. 90

Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099 Москва, Шубинский пер., 6