Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Мутафян, Б. Л. Фейгин, Характеры представлений квантовой тороидальной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$: плоские разбиения «с трибуной», *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 1, 46–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:09:44

Характеры представлений квантовой тороидальной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$: плоские разбиения «с трибуной»

© 2014. Г. С. Мутафян, Б. Л. Фейгин

Получена формула для производящей функции плоских разбиений $a_{i,j}$ с ограничениями $a_{m,n} = 0$, $a_{i,j} \geq k_j$ при $1 \leq j \leq n$, являющейся характером неприводимого представления квантовой тороидальной алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$.

§ 1. Введение

1.1. Мотивировка. Об алгебре $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$. В этой статье мы продолжаем вычисление характеров представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$, начатое в [1]. Квантовая тороидальная алгебра $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ исследовалась подробно в работе [2]. Она может быть построена следующим образом: пусть $\mathfrak{d}_q$ — ассоциативная алгебра, порожденная образующими $Z^{\pm 1}$, $D^{\pm 1}$, удовлетворяющими соотношениям $DZ = qZD$. Рассмотрим ее как алгебру Ли со скобкой Ли $[a, b] = ab - ba$ (будем обозначать эту алгебру Ли через $\tilde{\mathfrak{d}}_q$). У этой алгебры Ли есть двумерное центральное расширение $\tilde{\mathfrak{d}}_{q,c_1,c_2}$, и алгебра $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ может быть построена как квантование универсальной обертывающей $U(\tilde{\mathfrak{d}}_{q,c_1,c_2})$.

Если обозначить через q_1 параметр деформации и положить $q_2 = q$, то эта алгебра зависит от двух комплексных параметров q_1 , q_2 . (При определении алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ принято вводить третий параметр q_3 с условием $q_1 q_2 q_3 = 1$, и тогда все три параметра входят в определение алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ симметрично.)

В работе [2] рассматривались представления факторалгебры алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ по одномерному центру, зависящие, таким образом (помимо параметров q_i), от параметра K — действия центрального элемента на представлении. Был построен широкий класс таких представлений, названных представлениями Мак-Магона. В таких представлениях можно выделить базис, индексируемый плоскими разбиениями с граничными условиями вдоль координатных осей, и в этом базисе явно указать действие образующих алгебры. Характер представления при этом выражается как производящая функция соответствующих плоских разбиений. Граничные условия определяются старшим весом представления. Среди представлений есть такие, где граничные условия отсутствуют и базис индексируется обычными плоскими разбиениями, производящая функция которых (и характер соответствующего представления) задается формулой Мак-Магона $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{-i}$. В более общем случае на плоские разбиения накладываются граничные условия в виде «трибуны», поставленной вдоль одной, двух или трех

координатных осей. (Определение плоских разбиений с одной трибуной см. далее — определение 1.1.)

Представления, о которых идет речь, зависят от комплексного параметра u (но эта зависимость несущественна), а также от параметров K и q_i . При общих значениях этих параметров представления являются неприводимыми. Они становятся приводимыми, если параметры удовлетворяют специальным условиям. Мы будем рассматривать случай, когда параметры подчиняются соотношению $K = q_1^m q_2^n$. В этом случае в неприводимых факторах представлений базис индексируется плоскими разбиениями, удовлетворяющими дополнительному ограничению $a_{m+1,n+1} = 0$.

В предыдущей работе [1] этот случай уже был частично рассмотрен: была найдена производящая функция плоских разбиений, удовлетворяющих этому условию и не содержащих трибуны. Теперь мы рассмотрим более общий случай плоских разбиений с одной трибуной и с тем же самым дополнительным условием $a_{m+1,n+1} = 0$ и найдем производящую функцию таких разбиений.

1.2. Основные результаты статьи. Будем обозначать через $\mathbb{Z}_{\downarrow}^n$ множество наборов из n нестрого убывающих целых чисел. То есть если $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{\downarrow}^n$, то $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $k_1 \geq \dots \geq k_n$, $k_i \in \mathbb{Z}$. Подмножество множества $\mathbb{Z}_{\downarrow}^n$, состоящее из наборов неотрицательных чисел, будем обозначать через $\mathbb{Z}_{+\downarrow}^n$. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{+\downarrow}^n$ определим транспонированный набор $\bar{\mathbf{k}}$ как набор чисел $s_1 \geq \dots \geq s_{\mu} > 0$, где $\mu = k_1$, а число s_i показывает количество чисел в наборе $\mathbf{k}$, не меньших i . Например, если $\mathbf{k} = (5, 3, 2, 2, 0, 0)$, то $\bar{\mathbf{k}} = (4, 4, 2, 1, 1)$. Если $\mathbf{k} = (0, \dots, 0)$, то $\bar{\mathbf{k}} = \emptyset$.

Определение 1.1. Плоским разбиением с трибуной $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_{+\downarrow}^n$ будем называть набор целых неотрицательных чисел $a_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условиям

- (1) $a_{i,j} \geq a_{i,j+1}$, $a_{i,j} \geq a_{i+1,j}$ для любых $i, j > 0$,
- (2) $a_{i,j} \geq k_i$ при $j > 0$, $1 \leq i \leq n$,
- (3) $|a| < \infty$, где величина $|a|$, называемая *весом разбиения*, определяется следующим образом:

$$|a| = \sum_{j>0} \left(\sum_{i>n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^n (a_{i,j} - k_i) \right). \quad (1.1)$$

Итак, в представлениях алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$, которые мы будем рассматривать, базис индексируется плоскими разбиениями с трибуной $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{+\downarrow}^n$ и дополнительным условием $a_{n+1,m+1} = 0$. Множество всех таких разбиений обозначим через $\mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)}$.

Характер представления выражается как производящая функция

$$f_{\mathbf{k}}^{(m)}(q) = \sum_{a \in \mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)}} q^{|a|}. \quad (1.2)$$

Вычисление этой производящей функции и является целью данной статьи. Мы вычислим ее двумя различными способами, приводящими к двум различным по виду ответам.

Первый способ применим только для случая $m = n$. Как было сказано выше, алгебра $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ (точнее ее фактор по одномерному центру) в пределе при $q_1 \rightarrow 1$ переходит в $\tilde{\mathfrak{d}}_{q,\kappa}$ — одномерное центральное расширение алгебры $\tilde{\mathfrak{d}}_q$. Если $m = n$,

т. е. $K = (q_1 q_2)^n$, то и представления алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ также в пределе переходят в представления алгебры $\tilde{\mathfrak{d}}_{q,\kappa}$. В то же время имеется связь таких представлений алгебры $\tilde{\mathfrak{d}}_{q,\kappa}$ с представлениями алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ (алгебры бесконечных матриц с конечным числом ненулевых элементов). Эта связь подробно описана в [2]. Для нас существенно, что некоторые из представлений алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ (мы их обозначаем через $\Omega_{\mathbf{k}}^-$, см. определение в разд. 2.1) могут быть продолжены до представлений алгебры $\mathfrak{gl}_{\infty,\kappa}$ (центрального расширения алгебры бесконечных матриц с конечным числом ненулевых диагоналей), а их (в силу гомоморфизма $\tilde{\mathfrak{d}}_{q,\kappa} \rightarrow \mathfrak{gl}_{\infty,\kappa}$) можно рассматривать как представления алгебры $\tilde{\mathfrak{d}}_{q,\kappa}$ и продеформировать в представления алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$. Таким способом можно получить все те из рассматриваемых нами представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$, которые соответствуют случаю $m = n$. Следовательно, нужный нам характер $f_{\mathbf{k}}^{(n)}$ можно вычислить как характер представления $\Omega_{\mathbf{k}}^-$.

При $m \neq n$ рассматриваемые представления алгебры $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ не имеют предела при $q_1 \rightarrow 1$, и использовать предложенный выше метод нельзя. Здесь мы применим сочетание комбинаторных и алгебраических методов. Сначала с помощью некоторых комбинаторных рассуждений (алгоритм *RSK*) мы сведем задачу к вычислению другой производящей функции $g_{\mathbf{k}}^{(m)}(q)$. А именно, мы докажем формулу

$$f_{\mathbf{k}}^{(m)}(q) = \frac{1}{M_m} g_{\mathbf{k}}^{(m)}(q), \quad (1.3)$$

где M_m — знаменатель формулы Мак-Магона, $g_{\mathbf{k}}^{(m)}(q)$ — производящая функция плоских разбиений с трибуной $\mathbf{k}$ высоты не более n и m -кратной диагональю (см. точное определение (3.1)). Эта функция может быть вычислена как характер некоторого представления $\Omega_{\mathbf{k}}^+$ алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ (см. определение в разд. 3.2) в некоторой специальной (не главной) градуировке.

Вычисление характеров представлений $\Omega_{\mathbf{k}}^+$ и $\Omega_{\mathbf{k}}^-$ будет производиться практически одним и тем же способом, с использованием двойственности Хау и формулы Костанта. Сначала мы построим некоторую большую алгебру, в которой будут содержаться две коммутирующие подалгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ и $\mathfrak{gl}_n$. В случае представлений $\Omega_{\mathbf{k}}^-$ (при вычислении $f_{\mathbf{k}}^{(n)}$) это бесконечномерная алгебра Гейзенберга (с образующими-бозонами), в случае представлений $\Omega_{\mathbf{k}}^+$ (при вычислении $g_{\mathbf{k}}^{(m)}$) — алгебра Клиффорда (с образующими-фермионами). Затем мы построим представление этой алгебры (обозначаемое через $\mathcal{U}$ в первом случае и через $\mathcal{V}$ во втором), которое может быть разложено в прямую сумму представлений, неприводимых как относительно $\mathfrak{gl}_\infty$, так и относительно $\mathfrak{gl}_n$. Более точно, имеют место разложения

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{\downarrow}^n} \Omega_{\mathbf{k}}^- \otimes \tau_{\mathbf{k}}, \quad \mathcal{V} = \bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{\downarrow}^n} \Omega_{\mathbf{k}}^+ \otimes \tau_{\mathbf{k}},$$

где $\tau_{\mathbf{k}}$ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{gl}_n$ со старшим весом $\mathbf{k}$. После этого искомый характер выражается как q -размерность пространства старших относительно $\mathfrak{gl}_n$ векторов веса $\mathbf{k}$ и вычисляется по формуле Костанта.

Приведем здесь получающееся в результате выражение для $f_{\mathbf{k}}^{(m)}(q)$ при произвольных m, n (т.е. найденное вторым способом).

Теорема 1.2.

$$f_{\mathbf{k}}^{(m)}(q) = \frac{q^{-m|\mathbf{k}|-\zeta}}{(Q_\infty)^n M_m} \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(s) R(\hat{s}(\mathbf{k}), q). \quad (1.4)$$

Здесь использованы следующие обозначения: $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа; $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_n$; $\zeta = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n k_s(k_s - 1)$; $\hat{s}$ — оператор, действующий на решетке $\mathbb{Z}^n$ по следующему правилу: если $\nu \in \mathbb{Z}^n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $s \in \mathfrak{S}_n$, то

$$\hat{s}(\nu) = (\nu_{s(1)} - s(1) + 1, \dots, \nu_{s(n)} - s(n) + n);$$

$$R(\nu, q) = \sum_{t_1, \dots, t_n \geq 0} \left((-1)^{t_1 + \dots + t_n} q^{\frac{1}{2} \sum_i (\nu_i - t_i)^2 - (\nu_i - t_i)} \prod_{i=1}^n \begin{bmatrix} m + t_i - 1 \\ t_i \end{bmatrix}_q \right);$$

$$Q_\infty = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i); \quad M_m = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - q^i)^{\min(i, m)}.$$

Заметим, что равенство (1.3) можно истолковать следующим образом: $f_{\mathbf{k}}^{(m)}$ есть характер представления алгебры $\widehat{\widehat{\mathfrak{gl}_1}}$, $\frac{1}{M_m}$ — характер представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ со старшим весом $(\dots, m, m, m, 0, 0, 0, \dots)$ (это по сути представление Ω_0^+), а $g_{\mathbf{k}}^{(m)}$ — характер представления $\Omega_{\mathbf{k}}^+$ в неглавной градуировке. Таким образом, мы заодно получаем некоторое утверждение о характерах. А именно, *характер представления алгебры $\widehat{\widehat{\mathfrak{gl}_1}}$ равен произведению характеров двух неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$, взятых один в главной, а другой — в неглавной градуировке.*

1.3. План статьи. Случай $m = n$ (первый способ) разобран в §2, случай произвольных m, n — в §3. В случае $m = n$ мы начинаем с описания представления $\Omega_{\mathbf{k}}^-$ (разд. 2.1) и показываем, что $f_{\mathbf{k}}^{(n)}(q)$ есть характер такого представления. Затем (разд. 2.2) мы описываем конструкцию, известную как двойственность Хау, и выражаем характер $f_{\mathbf{k}}^{(n)}(q)$ как q -размерность на пространстве старших векторов веса $\mathbf{k}$ в некотором представлении алгебры $\mathfrak{gl}_n$. В разд. 2.3 мы приводим без доказательства формулу Костанта, после чего в разд. 2.4 вычисляем с помощью нее окончательный результат.

В случае произвольных m, n мы сначала в разд. 3.1 доказываем формулу (1.3). Доказательство аналогично доказательству в [1], однако наличие трибуны требует некоторых пояснений, которые мы приводим достаточно подробно. Затем (разд. 3.2) мы напоминаем структуру представления $\Omega_{\mathbf{k}}^+$ и выражаем $g_{\mathbf{k}}^{(m)}(q)$ как характер на таком представлении в неглавной градуировке. В разд. 3.3 мы коротко напоминаем конструкцию двойственности Хау для представлений $\Omega_{\mathbf{k}}^+$ (подробно она изложена в [1]) и получаем окончательную формулу (1.4).

§2. Случай $m = n$, первый способ

2.1. Представления $\Omega_{\mathbf{k}}^-$. Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_{\downarrow}^n$, $k_1 \geq \dots \geq k_s \geq 0 > k_{s+1} \geq \dots \geq k_n$. Существует единственное неприводимое представление

алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$, порожденное вектором $u_{\mathbf{k}}$, на котором задано следующее действие образующих алгебры:

$$E_{ij}u_{\mathbf{k}} = 0 \quad (i > j), \quad E_{ii}u_{\mathbf{k}} = \omega_i u_{\mathbf{k}}, \quad (2.1)$$

где

$$\omega_i = \begin{cases} 0, & i \leq -s, \\ k_{-i+1}, & -s+1 \leq i \leq 0, \\ k_{n-i+1} - n, & 1 \leq i \leq n-s, \\ -n, & i \geq n-s+1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Это представление мы обозначим через $\Omega_{\mathbf{k}}^-$. Последовательность $\omega_{\mathbf{k}}^- = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ есть *младший вес* этого представления, а вектор $u_{\mathbf{k}}$ — *младший вектор*.

Из общей теории известно, что в таких представлениях можно выделить базис, индексиремый таблицами с целых чисел $c_{ij} \in \mathbb{Z}$, $i, j \geq 1$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &\geq c_{i+1,j}, & 1 \leq j \leq n, \quad i \geq 1, \\ c_{i,j} &\geq c_{i,j+1}, & 1 \leq i \leq n, \quad j \geq 1, \\ c_{i,j} &= 0, & i, j > n, \\ c_{i,j} &\geq k_i, & 1 \leq i \leq n, \quad j \geq 1, \\ c_{i,j} &\geq 0, & 1 \leq j \leq n, \quad i \geq 1, \\ |c| &< \infty, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где величина $|c|$ по аналогии с плоскими разбиениями называется весом таблицы c (и соответствующего ей вектора) и определяется по формуле

$$|c| = \sum_{i=1}^n \sum_{j>n} (c_{i,j} - k_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{i>n} c_{i,j} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (c_{i,j} - \max(k_i, 0)).$$

Пусть x — вектор, соответствующий таблице c . Тогда действие операторов E_{ii} на этот вектор задается формулами

$$E_{ii}x = \begin{cases} \left(\sum_{t=1}^n (c_{t,t+i} - c_{t,t+i-1}) - n \right) x, & i > 0, \\ \left(\sum_{t=1}^n (c_{t-i,t} - c_{t+1-i,t}) \right) x, & i \leq 0. \end{cases}$$

Несложно проверить, что эти формулы согласованы с (2.1), т. е. для младшего вектора $u_{\mathbf{k}}$ (и соответствующей ему минимальной таблицы) определяют такое же действие.

Введя операторы

$$\mathcal{E} = \sum_{i \geq 0} i E_{-i,-i} - \sum_{i > 0} i (E_{ii} + n), \quad \mathcal{Q} = q^{\mathcal{E}},$$

мы можем выразить производящую функцию таблиц вида (2.3) как характер представления

$$\mathcal{E}x = \left(|c| + \sum_{i=1}^s (i-1)k_i - \sum_{i=s+1}^n (n-i+1)k_i + \frac{n(n-s)(n-s+1)}{2} \right) x \equiv (|c| + \xi_{\mathbf{k}})x, \\ \mathrm{tr}(\mathcal{Q})|_{\Omega_{\mathbf{k}}^-} = q^{\xi_{\mathbf{k}}} \sum_c q^{|c|}, \quad (2.4)$$

где сумма берется по всем таблицам, удовлетворяющим условиям (2.3).

При $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{+\downarrow}^n$ (т.е. при $s = n$) условия (2.3) определяют плоские разбиения из множества $\mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(n)}$, и, следовательно, производящая функция таких разбиений выражается через характер представления:

$$f_{\mathbf{k}}^{(n)}(q) = q^{-\sum_{i=1}^n (i-1)k_i} \mathrm{tr}(\mathcal{Q})|_{\Omega_{\mathbf{k}}^-}.$$

2.2. Двойственность Хау. Известно (см. [6]), что представления $\Omega_{\mathbf{k}}^-$ алгебры $\mathfrak{gl}_{\infty}$ могут быть построены путем вложения ее в алгебру Гейзенберга. А именно, рассмотрим алгебру $\mathfrak{G}$, порожденную образующими $b_i^{(\alpha)}, b_{-i}^{*(\alpha)}, i \in \mathbb{Z}, \alpha = 1, \dots, n$, и соотношениями

$$[b_i^{(\alpha)}, b_j^{(\beta)}] = [b_{-i}^{*(\alpha)}, b_{-j}^{*(\beta)}] = 0, \quad [b_{-i}^{*(\alpha)}, b_j^{(\beta)}] = \delta_{i+j,0} \delta_{\alpha,\beta}. \quad (2.5)$$

Построим представление алгебры $\mathfrak{G}$. Выберем порождающий вектор u и положим

$$\begin{cases} b_i^{(\alpha)} u = 0, & i > 0, \\ b_{-i}^{*(\alpha)} u = 0, & i \geq 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

а остальные элементы пусть действуют свободно с учетом соотношений алгебры. Обозначим это представление через $\mathcal{U}$. Очевидно, что оно является неприводимым. Алгебра $\mathfrak{G}$ содержит две коммутирующие подалгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ и $\mathfrak{gl}_{\infty}$. Образующие алгебры $\mathfrak{gl}_{\infty}$:

$$E_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n b_i^{(\alpha)} b_{-j}^{*(\alpha)}. \quad (2.7)$$

Образующие алгебры $\mathfrak{gl}_n$:

$$h^{\alpha\beta} = \sum_{i \geq 0} b_{-i}^{(\alpha)} b_i^{*(\beta)} + \sum_{i < 0} (b_{-i}^{(\alpha)} b_i^{*(\beta)} + 1). \quad (2.8)$$

Обозначим через $\tau_{\mathbf{k}}$ неприводимое представление алгебры $\mathfrak{gl}_n$ со старшим весом $\mathbf{k}$. Следующее утверждение известно как двойственность Хау. Его доказательство можно найти в [6].

Предложение 2.1. *Относительно действия алгебры $\mathfrak{gl}_{\infty} + \mathfrak{gl}_n$ имеет место разложение*

$$\mathcal{U} = \bigoplus_{\mathbf{k}} (\Omega_{\mathbf{k}}^- \otimes \tau_{\mathbf{k}}).$$

В частности, отсюда следует, что множество всех старших векторов относительно $\mathfrak{gl}_n$ с весом $\mathbf{k}$ образует неприводимое представление $\Omega_{\mathbf{k}}^-$, а множество всех младших векторов относительно $\mathfrak{gl}_{\infty}$ с весом $\omega_{\mathbf{k}}^-$ образует неприводимое представление $\tau_{\mathbf{k}}$.

Таким образом, характер $\mathrm{tr}(\mathcal{Q})_{\Omega_{\mathbf{k}}^-}$ может рассматриваться как характер подпредставления старших векторов относительно $\mathfrak{gl}_n$ в представлении $\mathcal{U}$. Поскольку $\mathcal{Q}$ коммутирует с $\mathfrak{gl}_n$, каждое собственное подпространство относительно $\mathcal{Q}$ является представлением алгебры $\mathfrak{gl}_n$. Следовательно, $\mathrm{tr}(\mathcal{Q})_{\Omega_{\mathbf{k}}^-}$ есть q -размерность подпространства старших векторов веса $\mathbf{k}$ в представлении $\mathcal{U}$ алгебры $\mathfrak{gl}_n$.

2.3. Формула Костанта. Пусть имеется некоторое конечномерное представление U полупростой алгебры Ли L . Пусть H — ее подалгебра Картана, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — простые корни, ρ — полусумма положительных корней и W — группа Вейля. Для любых $s \in W$, $x \in H^*$ положим $\hat{s}(x) = s(x + \rho) - \rho$. Представление U разлагается в прямую сумму неприводимых:

$$U = \bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{\downarrow}^n} U_{\mathbf{k}} \otimes \tau_{\mathbf{k}}.$$

Здесь $U_{\mathbf{k}}$ можно рассматривать как множество старших векторов веса $\mathbf{k}$ в U (являющееся подпространством в U). С другой стороны, можно выписать характер

$$\xi(z_1, \dots, z_n) = \mathrm{tr}(\mathcal{Z})|_U, \quad \mathcal{Z} = \prod_{i=1}^n z_i^{h_{\alpha_i}}. \quad (2.9)$$

Введем следующие обозначения: $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, $z^\nu = \prod_{i=1}^n z_i^{\nu_i}$, ξ_ν — коэффициент при z^ν в разложении ξ ,

$$\xi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \xi_\nu z^\nu.$$

Иначе говоря, ξ_ν — размерность весового пространства веса ν .

Предложение 2.2 (формула Костанта). *Размерность $\dim U_{\mathbf{k}}$ выражается как сумма по группе Вейля коэффициентов характера ξ :*

$$\dim U_{\mathbf{k}} = \sum_{s \in W} (-1)^{l(s)} \xi_{\hat{s}(\mathbf{k})}. \quad (2.10)$$

В частности, для алгебры $\mathfrak{gl}_n$ имеем $\rho = (n-1, n-3, \dots, -n+1)$,

$$\mathcal{Z} = \prod_{i=1}^n z_i^{E_{ii}}. \quad (2.11)$$

Группа Вейля W алгебры $\mathfrak{gl}_n$ действует перестановками на компонентах $k_1, \dots, k_n$ произвольного веса $\mathbf{k}$. Иначе говоря, мы можем отождествить W с симметрической группой $\mathfrak{S}_n$, так что для любых $s \in W$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in H^*$

$$(k_1, \dots, k_n) \xrightarrow{s} (k_{s(1)}, \dots, k_{s(n)}).$$

Отсюда несложно получить явное действие $\hat{s}$:

$$(k_1, \dots, k_n) \xrightarrow{\hat{s}} (k_{s(1)} - s(1) + 1, \dots, k_{s(n)} - s(n) + n). \quad (2.12)$$

Замечание: алгебра $\mathfrak{gl}_n$ не является полупростой, она отличается от полупростой алгебры $\mathfrak{sl}_n$ наличием центрального элемента. Однако легко видеть, что это не нарушает справедливость формулы Костанта.

2.4. Вычисление окончательного результата. Как показано выше, характер $\mathrm{tr}(\mathcal{Q})|_{\Omega_{\mathbf{k}}^-}$, который нам нужно получить, есть q -размерность пространства старших векторов веса $\mathbf{k}$ в представлении $\mathcal{U}$, рассматриваемом как представление алгебры $\mathfrak{gl}_n$. Выпишем характер этого представления:

$$\mathrm{tr}(\mathcal{Q})|_{\mathcal{U}} = \prod_{\alpha=1}^n \left(\prod_{i \geq 0} (1 - q^i z_{\alpha}) \prod_{j \geq 1} (1 - q^j z_{\alpha}^{-1}) \right)^{-1} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \chi_{\nu}(q) z^{\nu}. \quad (2.13)$$

Согласно формуле Костанта, имеем

$$f_{\mathbf{k}}^{(n)}(q) = q^{-\sum_{i=1}^n (i-1)k_i} \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(s) \chi_{\hat{s}(\mathbf{k})}(q). \quad (2.14)$$

Теорема 2.3. Если $n = 1$, т. е. $\nu \in \mathbb{Z}$, то

$$\chi_{\nu}(q) = \frac{q^{-\nu(\nu+1)/2}}{(Q_{\infty})^2} \left(\sum_{i=\nu}^{+\infty} (-1)^{i-\nu} q^{i(i+1)/2} \right). \quad (2.15)$$

Доказательство. Полагая $n = 1$, запишем (2.13) в виде

$$\mathrm{tr}(\mathcal{Q})|_{\mathcal{U}} = \prod_{i \geq 0} \left(\sum_{t \geq 0} q^{it} z^t \right) \prod_{j \geq 1} \left(\sum_{s \geq 0} q^{js} z^{-s} \right).$$

При раскрытии скобок получается сумма слагаемых вида

$$q^{i_1 t_1 + \dots + i_{\alpha} t_{\alpha}} z^{t_1 + \dots + t_{\alpha}} \cdot q^{j_1 s_1 + \dots + j_{\beta} s_{\beta}} z^{-s_1 - \dots - s_{\beta}}, \quad (2.16)$$

$$0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{\alpha}, \quad 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_{\beta}, \quad t_1, \dots, t_{\alpha} \geq 1, \quad s_1, \dots, s_{\beta} \geq 1.$$

Каждому такому слагаемому поставим в соответствие пару диаграмм Юнга по следующему правилу: в первой диаграмме Юнга t_1 горизонтальных рядов длины i_1 , t_2 рядов длины i_2 и т. д. Во второй диаграмме s_1 рядов длины j_1 , s_2 рядов длины j_2 и т. д. Пример:

$$q^{0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4} z^{2+1+4} \cdot q^{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 1} z^{-2-3-1} \rightarrow$$

Если выражение (2.16) равно $q^{\gamma} z^{\nu}$, то

- суммарное количество клеток в обеих диаграммах равно γ ,
- разность высот первой и второй диаграммы не превосходит ν .

При фиксированном ν такое соответствие является взаимно однозначным, т. е. коэффициент при z^{ν} есть производящая функция упорядоченных пар диаграмм Юнга, разность высот которых не превосходит ν . При $\nu = 0$ эта производящая функция подсчитана в [3, гл. 2, разд. 2.5]. При $\nu \neq 0$ вычисление проводится аналогично. $\square$

При произвольном n , т. е. при $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, очевидно, что

$$\chi_{\nu}(q) = \prod_{i=1}^n \chi_{\nu_i}(q). \quad (2.17)$$

Собирая вместе формулы (2.17), (2.15), (2.14) и (2.12), получаем

$$f_{\mathbf{k}}^{(n)}(q) = \frac{q^{-\sum_{i=1}^n (i-1)k_i}}{(Q_\infty)^{2n}} \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(s) \left(\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i q^{i(k_j - j + s(j)) + i(i+1)/2} \right) \right).$$

§3. Случай произвольных m, n , второй способ

В этом параграфе мы найдем производящую функцию $f_{\mathbf{k}}^{(m)}$ при произвольных m, n , $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{+\downarrow}^n$. Сделать это напрямую с помощью теории представлений не удастся, поэтому мы с помощью некоторых комбинаторных рассуждений (алгоритм *RSK*) сведем задачу к вычислению другой производящей функции $g_{\mathbf{k}}^{(m)}$. Это будет сделано в разд. 3.1. Вычисление функции $g_{\mathbf{k}}^{(m)}$ может быть произведено методом, аналогичным примененному в §2, с той лишь разницей, что здесь используются другие представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$, обозначаемые через $\Omega_{\mathbf{k}}^+$ (описание их дается в разд. 3.2), а функция $g_{\mathbf{k}}^{(m)}$ представляется как характер такого представления в *неглавной* градуировке (формула (3.8)). Двойственность Хау в этом случае строится аналогично с заменой бозонов на фермионы (см. разд. 3.3), после чего вычисление проводится по той же формуле Костанта, описанной ранее.

3.1. Алгоритм *RSK* и преобразование плоских разбиений. Целью этого раздела является доказательство формулы (1.3). Мы будем сопровождать изложение примерами различных числовых таблиц. Условимся при изображении таких таблиц первым индексом нумеровать строки сверху вниз, а вторым — столбцы слева направо.

Определение 3.1. N -матрицей веса N (или, для краткости, просто матрицей веса N) будем называть набор b целых неотрицательных чисел $b_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3, \dots$, такой, что $\sum_{i,j=1}^\infty (i+j-1)b_{i,j} = N$. Так же, как для разбиений, вес матрицы будем обозначать через $|b|$, т. е. $|b| = \sum_{i,j=1}^\infty (i+j-1)b_{i,j}$. Матрицу, все элементы которой равны 0, будем обозначать через $\mathbf{0}$.

Множество $\mathfrak{B}^{(m)}$ определим как множество всех N -матриц «ширины» m , т. е. удовлетворяющих условию $b_{ij} = 0$ при $j > m$. Множество $\mathfrak{C}_{\mathbf{k}}^{(m)}$ определим как множество плоских разбиений с трибуной $\bar{\mathbf{k}}$ и дополнительными условиями

$$c_{i,i} = c_{i,i+t}, \quad t = 1, \dots, m, \quad c_{1,1} \leq n.$$

Обозначим через $g_{\mathbf{k}}^{(m)}(q)$ производящую функцию таких разбиений:

$$g_{\mathbf{k}}^{(m)}(q) = \sum_{c \in \mathfrak{C}_{\mathbf{k}}^{(m)}} q^{|c|}. \quad (3.1)$$

Формула (1.3) непосредственно вытекает из следующей теоремы:

Теорема 3.2. *Существует биекция*

$$\mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)} \rightarrow \mathfrak{B}^{(m)} \times \mathfrak{C}_{\mathbf{k}}^{(m)},$$

такая, что если разбиению $a \in \mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)}$ соответствует пара (b, c) , $b \in \mathfrak{B}^{(m)}$, $c \in \mathfrak{C}_{\mathbf{k}}^{(m)}$, то $|a| = |b| + |c|$.

Доказательство теоремы основано на построении явных отображений $\varphi: \mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)} \rightarrow \mathfrak{B}^{(m)} \times \mathfrak{C}_{\mathbf{k}}^{(m)}$ и $\psi: \mathfrak{B}^{(m)} \times \mathfrak{C}_{\mathbf{k}}^{(m)} \rightarrow \mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)}$. Эти отображения взаимно обратны и сохраняют вес, тем самым доказывая теорему. Поскольку в отсутствие трибуны оба отображения явно построены в [1], мы здесь построим только отображение φ и укажем, какие поправки вносит наличие трибуны.

Пусть имеется плоское разбиение a . Можно рассматривать его как проекцию объемной диаграммы, составленной из кубиков (трехмерный аналог диаграмм Юнга, изображающих обычные разбиения), на одну из координатных плоскостей. При этом каждое число разбиения показывает количество спроецированных кубиков. Если спроецировать объемную диаграмму на другую плоскость, мы получим другое плоское разбиение. Приведем в качестве примера объемную диаграмму из кубиков и плоские разбиения (обозначенные через $a^{(z)}$ и $a^{(x)}$), получающиеся в результате проецирования ее на плоскости (x, y) и (z, y) :

Если $a^{(z)} \in \mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)}$, то $a^{(x)}$ — плоское разбиение с трибуной $\bar{\mathbf{k}}$ и дополнительным условием $a_{1,m+1} \leq n$. Обозначим множество таких разбиений через $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{k}}^{(m)}$. Соответствие $a^{(z)} \rightarrow a^{(x)}$ устанавливает биекцию между $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{k}}^{(m)}$ и $\mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)}$, сохраняющую вес. Следовательно, производящая функция множества $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{k}}^{(m)}$ тоже равна $f_{\mathbf{k}}^{(m)}(q)$. Именно к разбиениям из множества $\tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{k}}^{(m)}$ мы будем применять алгоритм RSK . В качестве примера приведем два разбиения: $a^{(z)} \in \mathfrak{A}_{(3,1,0)}^{(2)}$ — плоское разбиение с трибуной $\mathbf{k} = (3, 1, 0)$ и условием $a_{4,3}^{(z)} = 0$ — и соответствующее ему разбиение $a^{(x)} \in \tilde{\mathfrak{A}}_{(3,1,0)}^{(2)}$ с трибуной $\bar{\mathbf{k}} = (2, 1, 1)$ и условием $a_{1,3}^{(x)} \leq 3$:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \dots \\
 4 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 4 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 3 & 1 & & & & & & & &
 \end{array}, \quad
 \begin{array}{cccccccccc}
 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & \dots \\
 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
 3 & 2 & & & & & & & \\
 1 & & & & & & & &
 \end{array} \tag{3.2}$$

Для применения алгоритма RSK плоское разбиение нужно разбить на две обратные полустандартные таблицы Юнга разрезанием вдоль диагонали. В отсутствие трибуны описание этого действия можно найти в [1] или в [4]. При

наличии трибуны некоторые числа в одной из таблиц оказываются замененными символом ∞ . Придадим сказанному более строгую форму.

Определение 3.3. Пусть $l \geq n$, $k_1 \geq \dots \geq k_n \geq 0$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$ и $\lambda_i \geq k_i$ при $i = 1, \dots, n$. Обратной полустандартной таблицей Юнга (в дальнейшем, для краткости, просто таблицей Юнга) формы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ с трибуной $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ назовем набор P , состоящий из $P_{i,j}$, $j = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, \lambda_j$, где

- $P_{i,j}$ — целое положительное число, если $1 \leq j \leq l$, $k_j < i \leq \lambda_j$ (при $j > n$ считаем, что $k_j = 0$);
- $P_{i,j} = \infty$, если $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq k_j$,

и при этом верны неравенства $P_{i,j} > P_{i+1,j}$, $P_{i,j} \geq P_{i,j+1}$. (Мы считаем, что оба неравенства $\infty > \infty$ и $\infty \geq \infty$ верны.) Если записать P в виде таблицы, то ее элементы строго убывают по столбцам и нестрого убывают по строкам. Столбцы имеют длину (слева направо) $\lambda_1, \dots, \lambda_l$.

Будем писать $|P| = N$, если $\sum P_{i,j} = N$, где сумма берется по всем элементам таблицы, отличным от ∞ .

Если $a \in \tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{k}}^{(m)}$, то a разбивается в пару (P, Q) таблиц Юнга одинаковой формы, причем Q всегда является обычной таблицей Юнга (т. е. не содержит символа ∞), в то время как таблица P является таблицей Юнга с трибуной $\mathbf{k}$. При этом условие $a_{1,m+1} \leq n$ эквивалентно условию $P_{1,n+1} \leq m$. Если таблицы P, Q имеют форму $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, то $|a| = |P| + |Q| - \sum_{j=1}^l \lambda_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_i(k_i - 1)$. Выражение в правой части назовем *весом* пары (P, Q) и будем обозначать через $|(P, Q)|$. Таким образом, $|a| = |(P, Q)|$. Мы будем отождествлять каждое разбиение с соответствующей ему парой (P, Q) , т. е. писать, например, $(P, Q) \in \tilde{\mathfrak{A}}_{\mathbf{k}}^{(m)}$, если $a \rightarrow (P, Q)$ и $a \in \mathfrak{A}_{\mathbf{k}}^{(m)}$.

Для разбиения $a^{(x)}$ в примере (3.2) пара (P, Q) выглядит следующим образом:

$$a^{(x)} \rightarrow (P, Q): \quad \begin{array}{ccccccc} & & \infty & \infty & 6 & 2 & & 5 & 4 & 4 & 3 \\ P = & \infty & & 2 & 2 & & & 3 & 3 & 1 & . \\ & & \infty & & & & & & & 1 & \end{array}$$

Далее мы будем пошагово применять алгоритм RSK^{-1} к тройке $(P, Q, \mathbf{0})$ ($\mathbf{0}$ — нулевая $\mathbb{N}$ -матрица, см. определение 3.1). В ситуации без трибуны алгоритм подробно описан в [1]. Здесь мы лишь укажем, почему его можно применять в ситуации с трибуной. Напомним, что в [1] алгоритм применялся до тех пор, пока в таблице P есть хотя бы одно число, не превосходящее m . Действие алгоритма на таблицу P заключалось в вычеркивании этого числа. Таким образом, если буквально применить этот алгоритм к ситуации с трибуной, *сама трибуна не будет затронута алгоритмом*. Если бы мы попытались (как это делается при доказательстве формулы Мак-Магона) применить алгоритм до полного обнуления таблицы P , то мы столкнулись бы с непреодолимыми трудностями при вычеркивании символов ∞ (пришлось бы добавлять единицы к элементам матрицы b с бесконечными индексами). Но поскольку мы «вовремя останавливаемся», подобных трудностей не возникает. Рассмотрим опять приведенный выше пример. Там $m = 2$. В таблице P три числа, не превосходящих 2, следовательно, три раза будет применен шаг алгоритма RSK^{-1} . Покажем, как

преобразуется тройка (P, Q, b) после каждого шага (для таблицы b будем писать только значения ненулевых элементов):

$$\begin{pmatrix} \infty & \infty & 6 & 2 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ \infty & 2 & 2 & , & 3 & 3 & 1 & , \\ \infty & & & & 1 & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \infty & \infty & 6 & 5 & 4 & 4 \\ \infty & 2 & 2, & 3 & 3 & 1, \\ \infty & & & 1 & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \infty & \infty & 6 & 5 & 4 & 1 \\ \infty & 2 & , & 3 & 3 & , \\ \infty & & & 1 & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \infty & \infty & 6 & 5 & 3 & 1 \\ \infty & & , & 3 & & , \\ \infty & & & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Если определить вес тройки $|(P, Q, b)|$ как $|(P, Q)| + |b|$, то каждый шаг алгоритма сохраняет этот вес. В итоге исходная тройка $(P, Q, \mathbf{0})$ преобразуется в новую тройку $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{b})$, причем несложно проверить, что $\tilde{b} \in \mathfrak{B}^{(m)}$, $(\tilde{P}, \tilde{Q}) \in \mathfrak{C}_k^{(m)}$.

Итак, мы построили отображение $\varphi: \tilde{\mathfrak{A}}_k^{(m)} \ni a \rightarrow (b, c) \in \mathfrak{B}^{(m)} \times \mathfrak{C}_k^{(m)}$. Если теперь взять произвольную тройку $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{b})$, где $\tilde{b} \in \mathfrak{B}^{(m)}$, $(\tilde{P}, \tilde{Q}) \in \mathfrak{C}_k^{(m)}$, то с ней можно проделать действия, обратные описанным выше. В [1] эти обратные действия описаны как шаги алгоритма *RSK*. Таким образом, тройка $(\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{b})$ преобразуется в $(P, Q, \mathbf{0})$, где $(P, Q) \in \tilde{\mathfrak{A}}_k^{(m)}$, и мы получаем отображение $\psi: \mathfrak{B}^{(m)} \times \mathfrak{C}_k^{(m)} \rightarrow \tilde{\mathfrak{A}}_k^{(m)}$. Доказательство взаимной обратности отображений ψ и φ проводится, как в [1].

3.2. Представления Ω_k^+ . В этом разделе функция $g_k^{(m)}$ будет представлена как характер неприводимого представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ в неглавной градуировке.

Пусть $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_\downarrow^n$. Пусть $\omega_i = (\dots, 1, 1, 0, 0, \dots)$ (нули начинаются с i -го места) — старший вес неприводимого представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$, $\omega_k^+ = \sum_i \omega_{k_i}$, а неприводимое представление алгебры $\mathfrak{gl}_\infty$ со старшим весом ω_k^+ обозначим через Ω_k^+ . Из общей теории известно, что в таком представлении можно выделить базис, индексруемый таблицами с целых неотрицательных чисел $c_{i,j} \in \mathbb{Z}_+$, $i, j \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условиям

$$c_{i,j} = n \quad \text{при } j \leq 0 \text{ или } i \leq k_n, \quad (3.3)$$

$$c_{i,j} \geq c_{i+1,j}, \quad c_{i,j} \geq c_{i,j+1} \quad \text{для любых } i, j \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

$$c_{i,j} \geq s \quad \text{при } j > 0, \quad k_{s+1} < i \leq k_s, \quad s = 0, \dots, n, \quad (3.5)$$

$$|c| < \infty, \quad (3.6)$$

где величина $|c|$ — вес таблицы (и соответствующего ей вектора) — определяется следующим образом:

$$|c| = \sum_{j>0} \sum_{s=1}^n \sum_{i=k_{s-1}}^{k_s-1} (c_{i,j} - (s-1)), \quad |c|_m = |c| + m \sum_{i>0} c_{i,i}.$$

В условии (3.5) считаем, что $k_{n+1} = -\infty$, $k_0 = +\infty$. Действие элемента $E_{ii} \in \mathfrak{gl}_\infty$ на векторе x_c , соответствующем таблице c , определяется следующим образом:

$$E_{ii}x_c = \left(\sum_{t \in \mathbb{Z}} (c_{t,t-i} - c_{t+1,t-i}) \right) x_c, \quad (3.7)$$

При $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{+\downarrow}^n$ область $i > 0, j > 0$ таблицы c представляет собой плоское разбиение высоты не более n с трибуной $\bar{\mathbf{k}}$. Определим операторы

$$\mathcal{E} = \sum_{i \geq 0} i E_{ii} + \sum_{i < 0} i (E_{ii} - n), \quad \mathcal{E}_m = \mathcal{E} + m \sum_{i \geq 0} E_{ii}, \quad Q_m = q^{\mathcal{E}_m}.$$

Для произвольного вектора x , соответствующего таблице c , несложное вычисление дает

$$\mathcal{E}x = (|c| + \zeta)x, \quad \sum_{i \geq 0} E_{ii}x = \left(\sum_{i > 0} c_{i,i} \right)x \implies \mathcal{E}_m x = \left(|c| + m \sum_{i > 0} c_{i,i} + \zeta \right)x,$$

где $\zeta = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n k_s(k_s - 1)$. Заметим, что эти формулы верны и для $k_n < 0$. Осталось заметить, что кратная диагональ, присутствующая в определении множества $\mathfrak{C}_{\mathbf{k}}^{(m)}$ и функции $g_{\mathbf{k}}^{(m)}$, эквивалентна одинарной диагонали, взятой m раз, с поправочным слагаемым $m|\mathbf{k}| = m \sum_i k_i$. Таким образом, получаем выражение функции $g_{\mathbf{k}}^m$ через характер:

$$g_{\mathbf{k}}^m(q) = q^{-\zeta - m|\mathbf{k}|} \operatorname{tr}(Q_m)|_{\Omega_{\mathbf{k}}^+}. \quad (3.8)$$

3.3. Двойственность Хау и окончательное вычисление. Так же, как в разд. 2.2, мы реализуем представление $\Omega_{\mathbf{k}}^+$ алгебры $\mathfrak{gl}_{\infty}$ путем вложения ее в алгебру Клиффорда $\mathcal{C}$. Эта алгебра порождена образующими $\psi_i^{(\alpha)}, \psi_i^{*(\alpha)}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\alpha = 1, \dots, n$, и соотношениями

$$[\psi_i^{(\alpha)}, \psi_j^{(\beta)}]_+ = [\psi_i^{*(\alpha)}, \psi_j^{*(\beta)}]_+ = 0, \quad [\psi_i^{(\alpha)}, \psi_j^{*(\beta)}]_+ = \delta_{-i,j} \delta_{\alpha,\beta}. \quad (3.9)$$

Эти соотношения отличаются от (2.5) заменой коммутатора на антикоммутатор. В этой алгебре также присутствуют подалгебры $\mathfrak{gl}_{\infty}$ и $\mathfrak{gl}_n$, образующие которых задаются формулами, аналогичными формулам (2.7) и (2.8). Таким же образом по формулам (2.6) определяется представление $\mathcal{V}$ алгебры $\mathcal{C}$ со старшим вектором v . (Подробное описание алгебры $\mathcal{C}$ и представления $\mathcal{V}$ см. в [1].)

Предложение 3.4. *Относительно действия алгебры $\mathfrak{gl}_{\infty} + \mathfrak{gl}_n$ имеет место разложение*

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{+\downarrow}} \Omega_{\mathbf{k}}^+ \otimes \tau_{\mathbf{k}}. \quad (3.10)$$

В частности, отсюда следует, что множество всех старших векторов относительно $\mathfrak{gl}_n$ с весом $\mathbf{k}$ образует неприводимое представление $\Omega_{\mathbf{k}}^+$, а множество всех старших векторов относительно $\mathfrak{gl}_{\infty}$ с весом $\omega_{\mathbf{k}}^+$ образует неприводимое представление $\tau_{\mathbf{k}}$.

Это утверждение, так же, как предложение 2.1, является частным случаем двойственности Хау (см. [6]).

Дальнейшие вычисления аналогичны вычислениям в разд. 2.4. Оператор $\mathcal{Z}$ определяется по формуле (2.11), после чего выписываем характер

$$\operatorname{tr}(\mathcal{Q}_m \mathcal{Z})|_{\mathcal{V}} = \prod_{\alpha=1}^n \left(\prod_{i \geq m} (1 + q^i z_{\alpha}) \prod_{j > 0} (1 + q^j z_{\alpha}^{-1}) \right) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \xi_{\nu}(q) z^{\nu}.$$

Согласно формуле Костанта,

$$\mathrm{tr}(\mathcal{Q})|_{\Omega_{\mathbf{k}}^+} = \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(s) \xi_{\hat{s}(\mathbf{k})}(q). \quad (3.11)$$

Предложение 3.5. Если $m = 0$, $n = 1$, то

$$\xi_{\nu}(q) = \frac{q^{(\nu^2 - \nu)/2}}{(Q_{\infty})}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Полагая $m = 0$, $n = 1$, запишем

$$\mathrm{tr}(\mathcal{Q}_0 \mathcal{Z})|_{\mathcal{V}} = \prod_{i \geq 0} (1 + q^i z) \prod_{j > 0} (1 + q^j z^{-1}).$$

При раскрытии скобок получается сумма слагаемых вида

$$q^{i_1 + \dots + i_r} z^r \cdot q^{j_1 + \dots + j_s} z^{-s}, \quad (3.13)$$

$$0 \leq i_1 < \dots < i_r, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_s.$$

Рассмотрим r столбцов, состоящих из $i_1, \dots, i_r$ клеток соответственно, и приставим их друг к другу так, чтобы нижние концы этих столбцов образовывали «лестницу» со ступеньками высоты 1. Аналогично рассмотрим s строк, состоящих из $j_1, \dots, j_s$ клеток, и приставим их друг к другу так, чтобы левые концы этих строк образовывали лестницу со ступеньками длины 1. Затем склеим эти две лестницы так, чтобы столбец длины i_1 склеился со строкой длины j_1 . Тогда каждому слагаемому вида (3.13) будет поставлена в соответствие диаграмма Юнга с «выступом», состоящим из $(r - s)(r - s - 1)/2$ клеток.

Приведем два примера (во втором примере выступ затемнен):

Если выражение (3.13) равно $q^{\gamma} z^{\nu}$, то

- количество клеток в получившейся диаграмме Юнга (вместе с выступом) равно γ ,

- количество клеток в выступе равно $\nu(\nu - 1)/2$.

Таким образом, при фиксированном ν коэффициент ξ_{ν} есть производящая функция диаграмм Юнга (обычных, без выступа), умноженная на $q^{\nu(\nu-1)/2}$, что доказывает формулу (3.12). $\square$

Отсюда при $m = 0$ и произвольном n получаем

$$\mathrm{tr}(\mathcal{Q}_0 \mathcal{Z})|_{\mathcal{V}} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \frac{q^{\frac{1}{2} \sum_i (\nu_i^2 - \nu_i)}}{(Q_{\infty})^n} z^{\nu}. \quad (3.14)$$

При $m > 0$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\mathcal{Q}_m \mathcal{Z})|_{\mathcal{V}} &= \frac{\mathrm{tr}(\mathcal{Q}_0 \mathcal{Z})|_{\mathcal{V}}}{\prod_{\alpha=1}^n \prod_{i=0}^{m-1} (1 + q^i z_{\alpha})} \\ &= (\mathrm{tr}(\mathcal{Q}_0 \mathcal{Z})|_{\mathcal{V}}) \prod_{\alpha=1}^m \left(\sum_{t \geq 0} (-1)^t \begin{bmatrix} m+t-1 \\ t \end{bmatrix}_q z_{\alpha}^t \right) = \frac{1}{(Q_{\infty})^n} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} R(\nu, q) z^{\nu}, \end{aligned}$$

где

$$R(\nu, q) = \sum_{t_1, \dots, t_n \geq 0} \left((-1)^{t_1 + \dots + t_n} q^{\frac{1}{2} \sum_i (\nu_i - t_i)^2 - (\nu_i - t_i)} \prod_i \begin{bmatrix} m + t_i - 1 \\ t_i \end{bmatrix}_q \right).$$

Следовательно,

$$\xi_{\nu}(q) = \frac{1}{(Q_{\infty})^n} R(\nu, q). \quad (3.15)$$

В итоге, собирая результаты (3.15), (3.11), (3.8), (1.3), получаем

$$f_{\mathbf{k}}^{(m)}(q) = \frac{1}{M_m} g_{\mathbf{k}}^m(q) = \frac{q^{-m|\mathbf{k}|-\zeta}}{M_m} \mathrm{tr}(\mathcal{Q})|_{\Omega_{\mathbf{k}}^+} = \frac{q^{-m|\mathbf{k}|-\zeta}}{(Q_{\infty})^n M_m} \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(s) R(\hat{s}(\mathbf{k}), q),$$

что и требовалось.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. С. Мутафян, Б. Л. Фейгин, *Квантовая тороидальная алгебра $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$: вычисление характеров некоторых представлений как производящих функций плоских разбиений*, Функц. анализ и его прил., **47:1** (2013), 62–76.
- [2] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, *Quantum toroidal $\mathfrak{gl}_1$ algebra: plane partitions*, Kyoto J. Math., **52:3** (2012), 621–659; <http://arxiv.org/abs/1110.5310v1>.
- [3] Р. Стэнли, *Перечислительная комбинаторика*, Мир, М., 1990.
- [4] Р. Стэнли, *Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции*, Мир, М., 2005.
- [5] A. I. Molev, *Gelfand–Tsetlin bases for classical Lie algebras*, in: Handbook of Algebra, vol. 4, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006, 109–170; <http://arxiv.org/abs/math/0211289v2>.
- [6] R. Goodman, N. Wallach, *Representations and Invariants of the Classical Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: georg21a@yahoo.com

Поступило в редакцию
17 июля 2013 г.

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
e-mail: borfeigin@gmail.com