Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Фейгин, Вырожденная группа типа A : представления и многообразия флагов, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 1, 73–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:25:27

Вырожденная группа типа A: представления и многообразия флагов*

© 2014. Е. Б. Фейгин

Мы рассматриваем вырождение простой комплексной группы Ли G , являющееся полупрямым произведением борелевской подгруппы и нормальной абелевой унипотентной подгруппы этой группы. Мы определяем класс представлений со старшим весом вырожденной группы типа A, обобщая конструкцию ПВ-градуированных представлений классической группы (ПВВ — сокращение от Пуанкаре–Биркгоф–Витт). Как и в классической ситуации, мы рассматриваем замыкания орбиты группы в проективизациях представлений. Мы показываем, что вырожденные многообразия флагов $\mathcal{F}_n^a$ и их разрешений особенностей R_n могут быть получены с помощью нашей конструкции. Мы доказываем, что координатное кольцо многообразия R_n изоморфно (как векторное пространство) прямой сумме двойственных представлений вырожденной группы из нашего класса. В конце работы мы формулируем несколько гипотез о свойствах представлений со старшим весом вырожденной группы типа A.

Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли с борелевской подалгеброй $\mathfrak{b}$. Обозначим через G, B соответствующие группы Ли. Неприводимые конечномерные представления алгебры $\mathfrak{g}$ играют фундаментальную роль в алгебраической и геометрической теории Ли. Например, обобщенные многообразия флагов группы G могут быть реализованы как G -орбиты в проективизациях представлений. Пусть $\mathfrak{g}^a$ и G^a — соответствующие вырожденные алгебра и группа Ли (см. [2]–[5], [13], [15]). Алгебра Ли $\mathfrak{g}^a$ является полупрямой суммой подалгебры $\mathfrak{b}$ алгебры $\mathfrak{g}$ и абелева идеала $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ с присоединенным действием $\mathfrak{b}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$. Группа G^a является полупрямым произведением борелевской подгруппы и нормальной абелевой унипотентной подгруппы $\exp(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$. В этой работе мы изучаем следующий вопрос: как определить аналоги конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g}$ и обобщенных многообразий флагов для вырожденной группы?

Здесь мы изучаем только алгебры и группы типа A, т. е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $G = SL_n$. Напомним, что в этом случае фундаментальные представления V_{ω_k} занумерованы числами $k = 1, \dots, n-1$ и $V_{\omega_k} \simeq \Lambda^k(\mathbb{C}^n)$. Пусть $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \omega_i$ — доминантный вес, m_i — целые неотрицательные числа. Тогда соответствующее представление со старшим весом V_λ является подпредставлением в тензорном произведении фундаментальных, причем сомножитель V_{ω_i} встречается

*Работа была частично поддержана грантом Президента РФ для поддержки молодых ученых МК-3312.2012.1, фондом Династия и Лабораторией алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, грант правительства РФ дог. 11 11.G34.31.0023. В данной научной работе использованы результаты, полученные в ходе выполнения проекта «Теория представлений в геометрии и математической физике», реализованного в рамках программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012 году, грант No. 12-05-0014, а также результаты, полученные в ходе выполнения проекта 11-01-0017, реализованного в рамках программы «Научный фонд НИУ ВШЭ» в 2012–2013 гг.

ровно m_i раз. Более точно, V_λ порождается тензорным произведением старших векторов фундаментальных представлений под действием универсальной обертывающей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В работах [7], [8], [2] показано, что вырожденная алгебра $\mathfrak{g}^a$ действует на ПВВ-градуированных представлениях V_λ^a , которые являются присоединенными градуированными представлениями к V_λ относительно ПВВ-фильтрации. Заметим также, что, как и в классической ситуации, V_λ^a вложено в тензорное произведение представлений $V_{\omega_i}^a$ так же, как V_λ — в тензорное произведение представлений V_{ω_i} . В то же время, у алгебры $\mathfrak{g}^a$ представлений гораздо больше, чем у $\mathfrak{g}$. Таким образом, возникает естественный вопрос об определении и изучении более широкого класса представлений вырожденной алгебры. Этот вопрос важен не только с точки зрения теории представлений, но и для изучения ПВВ-вырождения многообразий флагов (см. [2]–[4]). Напомним основные определения.

Пусть $\mathfrak{n}^-$ — нильпотентная подалгебра в $\mathfrak{g}$, такая, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}^-$. Обозначим через N^- соответствующую унипотентную подгруппу в G . Пусть $(N^-)^a \simeq \exp(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$ — абелева унипотентная подгруппа в G^a . Эта группа изоморфна произведению $\dim \mathfrak{n}^-$ копий группы $\mathbb{G}_a$ — аддитивной группы основного поля. Зафиксируем старший вектор $v_\lambda \in V_\lambda$. Напомним, что обобщенное многообразие флагов $\mathcal{F}_\lambda$ определяется как G -орбита в $\mathbb{P}(V_\lambda)$ ([6], [9], [12]) точки $[v_\lambda]$ этого пространства (здесь и далее для вектора v в векторном пространстве V мы обозначаем через $[v] \in \mathbb{P}(V)$ прямую, порожденную вектором v). Соответствующее вырожденное многообразие флагов является замыканием $(N^-)^a$ -орбиты точки $[v_\lambda]$ внутри $\mathbb{P}(V_\lambda^a)$ (см. [2], [3]). Это замыкание является нормальным особым (для общего λ) проективным многообразием, которое можно явно описать в терминах линейной алгебры. Для простоты мы ограничимся случаем регулярного доминантного веса λ (все m_i строго положительны). Тогда все соответствующие вырожденные многообразия флагов изоморфны. Обозначим это многообразие через $\mathcal{F}_n^a$. Оно является подмногообразием произведения грассманианов $\prod_{i=1}^{n-1} Gr_i(\mathbb{C}^n)$, т.е. элемент из $\mathcal{F}_n^a$ задается набором подпространств $(V_i)_{i=1}^{n-1}$ n -мерного пространства, удовлетворяющих простым условиям. Отметим, что компоненты V_i соответствуют фундаментальным весам ω_i .

В работе [4] были явно построены разрешения особенностей R_n для многообразий $\mathcal{F}_n^a$. Многообразия R_n являются гладкими проективными многообразиями с действием группы G^a и могут быть реализованы в виде цепочек расслоенных друг над другом многообразий со слоями $\mathbb{P}^1$ (т.е. являются башнями Ботта). Точка в R_n задается набором подпространств $(V_{i,j})$ с $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Эта конструкция подсказывает, что «фундаментальные» представления алгебры Ли $\mathfrak{g}^a$ нумеруются всеми положительными корнями, а не только простыми (как в классической ситуации). Действительно, по каждому положительному корню α можно естественным образом построить представление M_α . Эти модули являются представлениями со старшим весом в том смысле, что M_α порождается старшим вектором v_α под действием симметрической алгебры $\mathfrak{n}^-$ (отметим, что для простых корней α_i имеется изоморфизм $M_{\alpha_i} \simeq V_{\omega_i}^a$). Важным обстоятельством является тот факт, что R_n может быть вложено в произведение (по всем положительным корням α) проективных пространств $\mathbb{P}(M_\alpha)$ как замыкание $(N^-)^a$ -орбиты произведения прямых старшего веса. Как и в классической

ситуации, фундаментальные представления позволяют определить более широкий класс $\mathfrak{g}^a$ -модулей. Действительно, пусть $\mathbf{m} = (m_\alpha)$ — набор целых неотрицательных чисел, занумерованных положительными корнями α . Рассмотрим $\mathfrak{g}^a$ -модуль

$$M_{\mathbf{m}} = S^\bullet(\mathfrak{n}^-) \cdot v_{\mathbf{m}} \subset \bigotimes M_\alpha^{\otimes m_\alpha}, \quad v_{\mathbf{m}} = \bigotimes v_\alpha^{\otimes m_\alpha}.$$

В частности, если $m_\alpha = 0$ для всех не простых корней α , то $M_{\mathbf{m}} \simeq V_\lambda^a$, где $\lambda = \sum m_{\alpha_i} \omega_i$ (α_i — простые корни). В работе мы приводим примеры таких представлений $M_{\mathbf{m}}$ и формулируем несколько гипотез об их структуре.

По определению для любых двух наборов $\mathbf{m}^1$ и $\mathbf{m}^2$ существует $\mathfrak{g}^a$ -эквивариантное вложение $M_{\mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^2} \subset M_{\mathbf{m}^1} \otimes M_{\mathbf{m}^2}$, $v_{\mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^2} \mapsto v_{\mathbf{m}^1} \otimes v_{\mathbf{m}^2}$. Дуализируя, мы получаем алгебру $\bigoplus_{\mathbf{m}} M_{\mathbf{m}}^*$. В этой работе мы доказываем следующую теорему:

Теорема 0.1. *(Мульти)проективный спектр $\mathbb{Z}^{n-1}$ -градуированной алгебры $\bigoplus_{\mathbf{m}} M_{\mathbf{m}}^*$ изоморфен R_n .*

В качестве основного технического средства мы используем явную форму соотношений типа Плюккера в координатном кольце многообразия R_n .

В завершение отметим, что с каждым модулем $M_{\mathbf{m}}$ можно естественным образом связать соответствующее «многообразие флагов». А именно, определим $\mathcal{F}(M_{\mathbf{m}}) \subset \mathbb{P}(M_{\mathbf{m}})$ как замыкание орбиты $(N^-)^a \cdot [v_{\mathbf{m}}]$. Получающиеся таким образом многообразия являются $\mathbb{G}_a$ -многообразиями (см. [1], [11]). Отметим, что если все m_α строго положительны, то $\mathcal{F}(M_{\mathbf{m}}) \simeq R_n$. Если же все m_α кроме m_{α_i} обращаются в нуль, то $\mathcal{F}(M_{\mathbf{m}}) \simeq \mathcal{F}_n^a$.

Наша работа организована следующим образом. В первом параграфе мы вводим все необходимые обозначения и напомним основные определения и конструкции. В §2 мы формулируем наши результаты и приводим примеры. В §3 мы приводим доказательства, а в §4 формулируем несколько гипотез.

§1. Обозначения и основные объекты

1.1. Классическая теория. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$, где $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, а $\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ — борелевская подалгебра. Обозначим через Φ^+ множество положительных корней алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \Phi^+$ — простые корни. Мы иногда будем писать $\alpha > 0$ вместо $\alpha \in \Phi^+$. Для $\alpha > 0$ обозначим через $f_\alpha \in \mathfrak{n}^-$ элемент веса $-\alpha$. Имеем $\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathbb{C} f_\alpha$. Пусть G, B, N, N^- и T — группы Ли, соответствующие алгебрам Ли $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}^-$ и $\mathfrak{h}$.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_l$ — фундаментальные веса, т. е. $(\omega_i, \alpha_j) = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_j) \delta_{i,j}$. Каждый доминантный целочисленный вес λ представляется в виде суммы $\sum_{i=1}^l m_i \omega_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Обозначим через V_λ конечномерный неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль со старшим весом λ и старшим вектором v_λ . При этом $\mathfrak{n} v_\lambda = 0$, $h v_\lambda = \lambda(h) v_\lambda$ ($h \in \mathfrak{h}$) и $V_\lambda = U(\mathfrak{n}^-) v_\lambda$.

Обобщенные многообразия флагов группы G определяются как факторы G/P по параболическим подгруппам. Эти многообразия играют важную роль в геометрической теории представлений. Важное свойство многообразий флагов заключается в том, что они могут быть естественным образом вложены в проективизации представлений со старшим весом. А именно, пусть λ — доминантный вес, такой, что стабилизатор прямой $[v_\lambda]$ в G равен P . Возникает вложение многообразия G/P в пространство $\mathbb{P}(V_\lambda)$ в виде G -орбиты точки $[v_\lambda]$. Обозначим

эту орбиту через $\mathcal{F}_\lambda$. Она является гладким проективным многообразием. Отметим, что $\mathcal{F}_\lambda \simeq \mathcal{F}_\mu$ (как G -многообразия) тогда и только тогда, когда для всех i равенство $(\lambda, \alpha_i) = 0$ эквивалентно равенству $(\mu, \alpha_i) = 0$.

1.2. Вырожденная теория. Пусть $\mathfrak{g}^a$ — вырожденная алгебра Ли, являющаяся полупрямой суммой $\mathfrak{b} \oplus (\mathfrak{n}^-)^a$ борелевской подалгебры $\mathfrak{b}$ алгебры $\mathfrak{g}$ и абелева идеала $(\mathfrak{n}^-)^a$, изоморфного $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ как векторное пространство (см. [2], [3]). Алгебра $\mathfrak{b}$ действует на $(\mathfrak{n}^-)^a$ через присоединенное действие. Пусть $(N^-)^a = \exp(\mathfrak{n}^-)^a$ — абелева группа Ли, являющаяся произведением $\dim \mathfrak{n}^-$ копий группы $\mathbb{G}_a$. Пусть G^a — полупрямое произведение $B \ltimes (N^-)^a$ подгруппы B и нормальной абелевой подгруппы $(N^-)^a$ (действие B на $(N^-)^a$ индуцировано действием B на $(\mathfrak{n}^-)^a$).

Как и в классической ситуации, мы будем говорить, что $\mathfrak{g}^a$ -модуль M является модулем со старшим весом, если найдется вектор $v \in M$, такой, что $\mathfrak{n}v = 0$, прямая $[v]$ $\mathfrak{h}$ -инвариантна и $M = S(\mathfrak{n}^-)^a v$, где $S(\mathfrak{n}^-)^a$ обозначает симметрическую алгебру алгебры $(\mathfrak{n}^-)^a$, которая изоморфна кольцу полиномов $\mathbb{C}[f_\alpha]_{\alpha > 0}$. Ясно, что $\mathfrak{g}^a$ -модули со старшим весом находятся в биективном соответствии с $\mathfrak{b}$ -инвариантными идеалами в $\mathbb{C}[f_\alpha]_{\alpha > 0}$. А именно, M задает идеал-аннулятор $\text{Ann} M \subset \mathbb{C}[f_\alpha]_{\alpha > 0}$. Обратно, $\mathfrak{b}$ -инвариантному идеалу I соответствует $\mathfrak{g}^a$ -модуль $\mathbb{C}[f_\alpha]_{\alpha > 0}/I$. В работах [7], [8] были изучены представления V_λ^a для доминантных весов λ . Представления V_λ^a являются присоединенными градуированными к V_λ относительно ПБВ-фильтрации. Отметим, что все V_λ^a являются представлениями со старшим весом. Однако они не исчерпывают все такие представления. Ниже мы изучаем более широкий естественный класс модулей. Заметим, что все возникающие естественным образом $\mathfrak{g}^a$ -модули со старшим весом имеют градуировку, индуцированную градуировкой по общей степени на $\mathbb{C}[f_\alpha]_{\alpha > 0}$. Обобщая все сказанное выше, мы приходим к следующему определению:

Определение 1.1. Будем называть градуированный $\mathfrak{g}^a$ -модуль

$$M = \bigoplus_{s \geq 0} M(s)$$

модулем (представлением) со старшим весом, если выполнены следующие условия:

- $M(0) = \mathbb{C}v$, $\mathfrak{n}v = 0$, $\mathfrak{h}v \subset M(0)$,
- $M = \mathbb{C}[f_\alpha]_{\alpha > 0}v$,
- $f_\alpha M(s) \subset M(s+1)$ для всех $\alpha > 0$.

Заметим, что из определения следует, что $\mathfrak{b}M(s) \subset M(s)$, так как пространство $M(0)$ инвариантно относительно борелевской подалгебры. В дальнейшем мы будем называть векторы из $M(s)$ векторами ПБВ-степени s .

Определим теперь вырожденную версию многообразий флагов. В отличие от классической ситуации, факторы группы Ли G^a не дают интересных многообразий (например, G^a/B есть просто аффинное пространство). Вместо этого мы используем представления алгебры Ли $\mathfrak{g}^a$ со старшим весом. Пусть M — градуированный $\mathfrak{g}^a$ -модуль со старшим вектором v , $M(0) = \mathbb{C}v$.

Определение 1.2. Многообразие $\mathcal{F}(M)$ есть замыкание $(N^-)^a$ -орбиты прямой старшего веса:

$$\mathcal{F}(M) = \overline{(N^-)^a \cdot [v]} \subset \mathbb{P}(M).$$

В частности, вырожденные многообразия флагов $\mathcal{F}_\lambda^a$, определенные выше, изоморфны $\mathcal{F}(V_\lambda^a)$. Напомним, что группа $(N^-)^a$ изоморфна произведению $\dim \mathfrak{n}^-$ копий группы $\mathbb{G}_a$. Таким образом, многообразия $\mathcal{F}(M)$ являются так называемыми $\mathbb{G}_a^{\dim \mathfrak{n}^-}$ -многообразиями, т. е. $\mathbb{G}_a^{\dim \mathfrak{n}^-}$ -эквивариантными компактификациями абелевой унипотентной группы (см. [1], [11]).

1.3. Тип A . Начиная с этого момента, мы полагаем $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и $G = SL_n$. В этом случае множество положительных корней Φ^+ состоит из корней

$$\alpha_{i,j} = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq j \leq n-1.$$

В дальнейшем мы используем обозначение $f_{i,j}$ для $f_{\alpha_{i,j}}$. Следующее предложение доказано в [7] (о обозначает присоединенное действие $\mathfrak{b}$ на $S(\mathfrak{n}^-) \simeq S(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$).

Предложение 1.3. *Для любого доминантного веса λ представление V_λ^a изоморфно фактору $S(\mathfrak{n}^-)/I_\lambda$, где I_λ — идеал, порожденный подпространством*

$$U(\mathfrak{b}) \circ \text{span}(f_\beta^{(\beta, \lambda)+1}, \beta \in \Phi^+).$$

В работе [3] доказано, что вырожденные многообразия флагов могут быть явно описаны следующим образом. Для простоты мы приводим здесь описание только для многообразия полных флагов. Пусть λ — регулярный доминантный вес, т. е. $(\lambda, \alpha_i) > 0$ для всех i . Зафиксируем n -мерное векторное пространство W и базис $w_1, \dots, w_n$ в W . Операторы $f_{i,j}$ действуют на W с помощью стандартных формул $f_{i,j}w_k = \delta_{i,k}w_{j+1}$. Пусть $\text{pr}_k: W \rightarrow W$ — оператор проекции вдоль k -го базисного вектора, т. е. $\text{pr}_k w_k = 0$ и $\text{pr}_k w_j = w_j$ при $j \neq k$. Все многообразия флагов $\mathcal{F}_\lambda^a$ изоморфны (для регулярного λ), и мы обозначаем это многообразие через $\mathcal{F}_n^a$. Тогда $\mathcal{F}_n^a$ состоит из наборов $(V_1, \dots, V_{n-1})$ подпространств пространства W , таких, что $\dim V_i = i$ и $\text{pr}_{i+1} V_i \subset V_{i+1}$. Многообразия $\mathcal{F}_n^a$ — особые (начиная с $n = 3$) проективные алгебраические многообразия, естественным образом вложенные в произведение грассманианов. Разрешение особенностей R_n для $\mathcal{F}_n^a$ построено в работе [4] (симплектический случай разобран в [5]). Многообразие R_n состоит из наборов $(V_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n-1}$ подпространств пространства W , удовлетворяющих следующим условиям:

- $\dim V_{i,j} = i$, $V_{i,j} \subset \text{span}(w_1, \dots, w_i, w_{j+1}, \dots, w_n)$,
- $V_{i,j} \subset V_{i+1,j}$, $1 \leq i < j \leq n-1$,
- $\text{pr}_{j+1} V_{i,j} \subset V_{i,j+1}$, $1 \leq i \leq j < n-1$.

Можно показать, что R_n является башней Ботта, т. е. существует башня

$$R_n = R_n(0) \rightarrow R_n(1) \rightarrow R_n(2) \rightarrow \dots \rightarrow R_n(n(n-1)/2) = \text{pt},$$

такая, что каждое отображение $R_n(l) \rightarrow R_n(l+1)$ есть $\mathbb{P}^1$ -расслоение. Таким образом, R_n гладкое. Сюръекция $R_n \rightarrow \mathcal{F}_n^a$ задается формулой $(V_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \mapsto (V_{i,i})_{i=1}^n$. Пусть $W_{i,j} = \text{span}(w_1, \dots, w_i, w_{j+1}, \dots, w_n)$. Тогда из определения многообразия R_n получаем, что

$$R_n \subset \prod_{1 \leq i \leq j \leq n-1} \mathbb{P}(\Lambda^i W_{i,j}). \quad (1.1)$$

§2. Представления и координатные кольца

В этой части мы формулируем наши результаты и приводим примеры. Все доказательства даны в следующем параграфе. Везде в дальнейшем $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.

2.1. Представления. Пусть $\alpha = \alpha_{i,j}$ — положительный корень. Определим $\mathfrak{g}^a$ -модуль M_α как фактор $\mathbb{C}[f_\beta]_{\beta > 0}/I_\alpha$, где I_α — идеал, порожденный пространством

$$U(\mathfrak{b}) \circ \text{span}(f_\beta^2, \beta \geq \alpha; f_\beta, \beta \not\geq \alpha).$$

(Здесь мы используем порядок Брюа на корнях, а $\circ$ обозначает присоединенное действие в смысле алгебры $\mathfrak{g}^a$.) Обозначим старший вектор (образ единицы) в M_α через v_α .

Пример 2.1. Рассмотрим старший корень $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$. Тогда M_α является двумерным пространством с базисом $v_\alpha, f_\alpha v_\alpha$. Все операторы $f_\beta, \beta \neq \alpha$, а также $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}^a$ действуют тривиально на M_α .

Лемма 2.2. Если α является простым корнем α_i , то $M_{\alpha_i} \simeq V_{\omega_i}^a$ как $\mathfrak{g}^a$ -модули.

Доказательство следует из предложения 1.3. □

Напомним, что $W_{i,j} = \text{span}(w_1, \dots, w_i, w_{j+1}, \dots, w_n)$.

Лемма 2.3. Пусть $\alpha = \alpha_{i,j}$. Тогда $M_\alpha \simeq \Lambda^i W_{i,j}$.

Доказательство. Определим действие $\mathfrak{g}^a$ на $\Lambda^i W_{i,j}$ следующим образом. Рассмотрим представление $V_{\omega_i}^a$. Как векторное пространство оно изоморфно $\Lambda^i W$. Легко видеть, что подпространство U , порожденное векторами

$$w_{l_1} \wedge \dots \wedge w_{l_i}, \text{ таким, что } i < l_r \leq j \text{ для некоторого } r \leq i,$$

является $\mathfrak{g}^a$ -инвариантным. При этом $\Lambda^i W/U$ может быть отождествлено с $\Lambda^i W_{i,j}$, и этот фактор изоморфен $M_{\alpha_{i,j}}$ согласно предложению 1.3. □

Замечание 2.4. (1) Заметим, что $M_\alpha = \bigoplus_{s \geq 0} M_\alpha(s)$ (см. определение 1.1) и $M_\alpha(s)$ порождено векторами

$$w_{l_1} \wedge \dots \wedge w_{l_i}, \text{ таким, что } l_a \in \{1, \dots, i, j+1, \dots, n\}, \#\{a : l_a > j\} = s.$$

(2) Операторы $f_{a,b}$ действуют тривиально на $M_{\alpha_{i,j}}$ при $a > i$ или $b < j$.

Представления $M_{\alpha_{i,j}}$ играют роль фундаментальных представлений для алгебры $\mathfrak{g}^a$. Определим более широкий класс представлений, порожденный фундаментальными. Пусть $\mathbf{m} = (m_{i,j})_{i \leq j}$ — набор неотрицательных целых чисел. Здесь и далее мы пишем просто $i \leq j$ (или $a \leq b$) вместо $1 \leq i \leq j \leq n-1$ (или $1 \leq a \leq b \leq n-1$), когда это не может привести к путанице. Введем следующее определение.

Определение 2.5. Определим $\mathfrak{g}^a$ -модуль $M_{\mathbf{m}}$ как старшую (картановскую) компоненту в тензорном произведении представлений $M_{\alpha_{i,j}}$, т. е.

$$M_{\mathbf{m}} = S(\mathfrak{n}^-) \cdot \bigotimes_{i \leq j} v_{\alpha_{i,j}}^{\otimes m_{i,j}} \subset \bigotimes_{i \leq j} M_{\alpha_{i,j}}^{\otimes m_{i,j}}.$$

Обозначим старший вектор представления $M_{\mathbf{m}}$, являющийся тензорным произведением $\bigotimes_{i \leq j} v_{\alpha_{i,j}}^{\otimes m_{i,j}}$, через $v_{\mathbf{m}}$.

Пример 2.6. Пусть $m_{i,j} = 0$ при $i \neq j$. Тогда, согласно [7], имеем изоморфизм $M_{\mathbf{m}} \simeq V_\lambda^a$, где $\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i} \omega_i$.

Пример 2.7. Пусть $m_{1,j} = 1$ при $j = 1, \dots, n-1$ и $m_{i,j} = 0$ при $i > 1$. Тогда $f_{i,j}v_{\mathbf{m}} = 0$, если $i \neq 1$, и легко видеть, что $f_{1,1}^{k_1} \cdots f_{1,n-1}^{k_{n-1}}v_{\mathbf{m}} \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$k_1 \leq 1, \quad k_1 + k_2 \leq 2, \quad \dots, \quad k_1 + \dots + k_{n-1} \leq n-1. \quad (2.1)$$

Более того, мономы, удовлетворяющие приведенным выше условиям, являются линейно независимыми. Заметим, что число наборов $(k_1, \dots, k_{n-1})$, удовлетворяющих условию (2.1), равно числу Каталана C_n . Кроме того, размерности однородных компонент $\dim M_{\mathbf{m}}(s)$ задаются компонентами треугольника Каталана (см., например, <http://mathworld.wolfram.com/CatalansTriangle.html>).

Следующая лемма объясняет важность определенных выше представлений. Скажем, что набор $\mathbf{m}$ регулярный, если $m_{i,j} > 0$ при всех $i \leq j$.

Предложение 2.8. Для любого регулярного набора $\mathbf{m}$ многообразие R_n вложено в проективное пространство $\mathbb{P}(M_{\mathbf{m}})$ как замыкание SL_n^a -орбиты, или $(N^-)^a$ -орбиты, точки $[v_{\mathbf{m}}]$:

$$R_n = \overline{SL_n^a \cdot [v_{\mathbf{m}}]} = \overline{(N^-)^a \cdot [v_{\mathbf{m}}]} \subset \mathbb{P}(M_{\mathbf{m}}).$$

Доказательство. Достаточно доказать наше предложение в случае, когда все $m_{i,j}$ равны 1. Заметим, что орбиты $SL_n^a \cdot [v_{\mathbf{m}}]$ и $(N^-)^a \cdot [v_{\mathbf{m}}]$ совпадают и вложены в произведение грассманианов $\prod_{i \leq j} Gr_i(W_{i,j})$. Напомним, что мы зафиксировали базис $w_1, \dots, w_n$ в W . Пусть

$$L = (l_1, \dots, l_i) \subset \{1, \dots, i, j+1, \dots, n\}$$

и $V_{i,j}$ — точка в $Gr_i(W_{i,j})$. Определим $X_L(V_{i,j})$ как ее плюккерову координату. Мы утверждаем, что орбита $(N^-)^a[v_{\mathbf{m}}]$ состоит из наборов подпространств $(V_{i,j})_{i \leq j} \in R_n$, таких, что $X_{1,\dots,i}(V_{i,j}) \neq 0$ (см. леммы 2.11 и 2.12 в [4]). Это доказывает предложение. $\square$

В дальнейшем мы рассматриваем R_n как подмногообразие в $\mathbb{P}(M_1)$, где 1 — набор с $m_{i,j} = 1$ для всех $i \leq j$. Напомним, что $\mathbb{P}(M_1)$, в свою очередь, естественно вложено в $\prod_{\alpha > 0} \mathbb{P}(M_{\alpha})$.

2.2. Координатное кольцо. Обозначим через $X_L^{(i,j)} = X_{l_1, \dots, l_i}^{(i,j)}$ двойственные (плюккеровы) координаты в $W_{i,j}^*$ относительно базиса $w_{l_1} \wedge \dots \wedge w_{l_i}$, где $1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq n$ и $L \subset \{1, \dots, i, j+1, \dots, n\}$. Для перестановки $\sigma \in S_n$ положим

$$X_{l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(i)}}^{(i,j)} = (-1)^{\sigma} X_{l_1, \dots, l_i}^{(i,j)}.$$

Определим ПБВ-степень переменной $X_L^{(i,j)}$ как число таких l_a , что $l_a > j$.

Замечание 2.9. Переменные ПБВ-степени нуль имеют вид $X_{1, \dots, i}^{(i,j)}$. Переменные ПБВ-степени один имеют вид $X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i, m}^{(i,j)}$ для некоторых $r \leq i \leq j < m$.

Приведем явное описание SL_n^a -орбиты, содержащей прямую старшего веса в M_1 . Зафиксируем набор комплексных чисел $(c_{a,b})_{a \leq b}$ и рассмотрим элемент

$$\exp \left(\sum_{a \leq b} c_{a,b} f_{a,b} \right) \in (N^-)^a.$$

Пусть $L = (1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq n)$. Обозначим через d такое число, что $l_d \leq i < l_{d+1}$. Рассмотрим числа $1 \leq r_1 < \dots < r_{i-d} \leq i$, такие, что

$$\{r_1, \dots, r_{i-d}\} \cup \{l_1, \dots, l_d\} = \{1, \dots, i\}.$$

Лемма 2.10. Пусть $L \subset \{1, \dots, i, j+1, \dots, n\}$. Тогда плюккерова координата $X_L^{(i,j)}$ точки $\exp(\sum_{a \leq b} c_{a,b} f_{a,b})[v_1]$ равна

$$(-1)^{\sum_{p=1}^d (l_p - p)} \det(c_{r_a, l_{d+b-1}})_{a,b=1}^{i-d}.$$

Доказательство. Заметим, что $f_{a,b} w_c = \delta_{a,c} w_{b+1}$. Поэтому в $W_{i,j}$

$$\begin{aligned} & \exp\left(\sum_{a \leq b} c_{a,b} f_{a,b}\right) w_1 \wedge \dots \wedge w_i \\ &= (w_1 + c_{1,j} w_{j+1} + \dots + c_{1,n-1} w_n) \wedge \dots \wedge (w_i + c_{i,j} w_{j+1} + \dots + c_{i,n} w_n). \quad \square \end{aligned}$$

Пример 2.11. Пусть $d = i-1$, т.е. $l_{i-1} \leq i$ и $l_i > j$. Пусть $\{r\} = \{1, \dots, i\} \setminus L$. Тогда

$$X_L^{(i,j)} \left(\exp\left(\sum_{a \leq b} c_{a,b} f_{a,b}\right) [v_1] \right) = (-1)^{i-r} c_{r, l_{i-1}}. \quad (2.2)$$

Обозначим через $\mathbb{C}\mathbf{X}_n$ кольцо мультиоднородных полиномов от переменных $X_L^{(i,j)}$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$, $L = (l_1, \dots, l_i)$. Другими словами, $\mathbb{C}\mathbf{X}_n$ является координатным кольцом произведения проективных пространств $\mathbb{P}(W_{i,j})$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Зафиксируем разложение

$$\mathbb{C}\mathbf{X}_n = \bigoplus_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{n(n-1)/2}} \mathbb{C}\mathbf{X}_{\mathbf{m}},$$

где $\mathbb{C}\mathbf{X}_{\mathbf{m}}$ — пространство полиномов общей степени $m_{i,j}$ по каждому набору переменных $X_L^{(i,j)}$. Пусть $I \subset \mathbb{C}\mathbf{X}_n$ — некоторый идеал. Обозначим через $X(I) \subset \prod_{i \leq j} \mathbb{P}(\Lambda^i W_{i,j})$ многообразие его нулей, а для подмногообразия X в $\prod_{i \leq j} \mathbb{P}(\Lambda^i W_{i,j})$ обозначим через $I(X)$ идеал мультиоднородных полиномов, обращающихся в нуль на X .

Наша цель — описать идеал $I(R_n)$ в $\mathbb{C}\mathbf{X}_n$, состоящий из полиномов, обращающихся в нуль на R_n (которые мы часто будем называть соотношениями). Заметим, что координатное кольцо Q_n многообразия R_n имеет вид

$$Q_n = \mathbb{C}\mathbf{X}_n / I(R_n).$$

Опишем сначала аналоги соотношений Плюккера, которые принадлежат $I(R_n)$.

Эти соотношения занумерованы следующими данными:

- двумя парами (i_1, j_1) , (i_2, j_2) , такими, что $i_1 \geq i_2$ и $1 \leq i_1 \leq j_1 \leq n-1$, $1 \leq i_2 \leq j_2 \leq n-1$;
- натуральным числом k , удовлетворяющим условию $1 \leq k \leq i_2$;
- двумя наборами индексов $L = (l_1, \dots, l_{i_1})$, $P = (p_1, \dots, p_{i_2})$, таких, что $L \subset \{1, \dots, i_1, j_1+1, \dots, n\}$, $P \subset \{1, \dots, i_2, j_2+1, \dots, n\}$.

Обозначим соотношение Плюккера, соответствующее описанным выше данным, через $R_{L,J}^{(i_1, j_1), (i_2, j_2); k}$. Каждое такое соотношение является полиномом в кольце $\mathbb{C}\mathbf{X}_n$, который определяется следующим образом.

Во-первых, пусть $i_1 \neq i_2$ и $j_1 \geq j_2$. Тогда

$$R_{L,P}^{(i_1,j_1),(i_2,j_2);k} = X_L^{(i_1,j_1)} X_P^{(i_2,j_2)} - \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq n} X_{L'}^{(i_1,j_1)} X_{P'}^{(i_2,j_2)},$$

где суммирование происходит по r_i , таким, что $l_{r_i} \in \{1, \dots, i_2, j_1 + 1, \dots, n\}$, и нижние индексы L', P' в мономе $X_{L'}^{(i_1,j_1)} X_{P'}^{(i_2,j_2)}$, отвечающем последовательности $(r_1, \dots, r_k)$, имеют вид

$$L' = (l_1, \dots, l_{r_1-1}, p_1, l_{r_1+1}, \dots, l_{r_k-1}, p_k, l_{r_k+1}, \dots, l_{i_1}), \quad (2.3)$$

$$P' = (l_{r_1}, \dots, l_{r_k}, p_{k+1}, \dots, p_i). \quad (2.4)$$

Во-вторых, пусть $j_1 \leq j_2$. Тогда мы берем соотношение, описанное выше, с дополнительным условием $L \subset \{1, \dots, i_1, j_2 + 1, \dots, n\}$.

Замечание 2.12. Заметим, что начальный член $X_L^{(i_1,j_1)} X_J^{(i_2,j_2)}$ присутствует в соотношении тогда и только тогда, когда

$$\{p_1, \dots, p_k\} \subset \{1, \dots, i_2, j_1 + 1, \dots, n\}.$$

Пример 2.13. Пусть $i_1 = i_2$, $j_1 = j_2$. Тогда соотношения $R_{L,P}^{(i,j),(i,j);k}$ являются классическими соотношениями Плюккера. Их общие нули задают грассманиан i -мерных подпространств в $W_{i,j}$.

Пример 2.14. Пусть $i_1 = i_2$, $j_1 < j_2$. Тогда соотношения $R_{L,P}^{(i,j),(i,j+1);k}$ являются вырожденными соотношениями Плюккера в смысле [2]. В частности, общие нули соотношений $R_{L,P}^{(i,j),(i,j);k}$, $R_{L,P}^{(i,j+1),(i,j+1);k}$ и $R_{L,P}^{(i,j),(i,j+1);k}$ задают подмногообразие пар U, V в произведении грассманианов $Gr_i(W_{i,j}) \times Gr_i(W_{i,j+1})$, таких, что $\text{rg}_{j+1} U \subset V$.

Пример 2.15. Пусть $n = 3$. Тогда $\mathbb{C}\mathbf{X}_3$ — это кольцо мультиоднородных полиномов от трех групп переменных

$$X_1^{(1,1)}, X_2^{(1,1)}, X_3^{(1,1)}; \quad X_1^{(1,2)}, X_3^{(1,2)}; \quad X_{1,2}^{(2,2)}, X_{1,3}^{(2,2)}, X_{2,3}^{(2,2)}.$$

Соотношения Плюккера — это

$$\begin{aligned} R_{(3),(1)}^{(1,1),(1,2);1} &= X_3^{(1,1)} X_1^{(1,2)} - X_1^{(1,1)} X_3^{(1,2)}, \\ R_{(2,3),(1)}^{(2,2),(1,1);1} &= X_{2,3}^{(2,2)} X_1^{(1,1)} + X_{1,2}^{(2,2)} X_3^{(1,1)}, \\ R_{(2,3),(1)}^{(2,2),(1,2);1} &= X_{2,3}^{(2,2)} X_1^{(1,2)} + X_{1,2}^{(2,2)} X_3^{(1,2)}. \end{aligned}$$

Пример 2.16. Пусть $n = 4$. Тогда единственное соотношение, содержащее переменные $X_{l_1,l_2}^{(2,2)}$ и $X_p^{(1,3)}$, — это

$$R_{(1,2),(4)}^{(2,2),(1,3);1} = X_{1,2}^{(2,2)} X_4^{(1,3)} + X_{2,4}^{(2,2)} X_1^{(1,3)}.$$

Пример 2.17. Пусть $1 \leq i \leq j \leq n - 1$. Тогда идеал в $\mathbb{C}[X_{l_1, \dots, l_i}^{(i,j)}]$, порожденный соотношениями $R_{L,P}^{(i,j),(i,j);k}$, в точности совпадает с идеалом, определяющим многообразие Грассмана $Gr_i(W_{i,j})$.

Предложение 2.18. Полиномы $R_{L,P}^{(i_1,j_1),(i_2,j_2);k}$ обращаются в нуль на R_n .

Пусть $J_n \subset \mathbb{C}X_n$ — идеал, порожденный описанными выше соотношениями Плюккера. В следующем параграфе мы докажем такую теорему:

Теорема 2.19. *Идеал $I(R_n)$ является насыщением идеала J_n . Точнее, для каждого $F \in I(R_n)$ существует набор неотрицательных целых чисел $N_{i,j}$, $i \leq j$, таких, что*

$$\prod_{i \leq j} (X_{1,\dots,i}^{(i,j)})^{N_{i,j}} F \in J_n.$$

Компьютерные вычисления позволяют высказать следующую гипотезу:

Гипотеза 2.20. Идеал J_n прост, т.е. $I(R_n) = J_n$.

§3. Доказательства

3.1. Идеал.

Предложение 3.1. $J_n \subset I(R_n)$, т.е. все соотношения $R_{L,P}^{(i_1,j_1),(i_2,j_2);k}$ обращаются в нуль на R_n .

Доказательство. Напомним, что равенство Сильвестра [9, разд. 8.1, лемма 2] утверждает, что для любых двух $(s \times s)$ -матриц M и N и числа $k \leq s$ выполняется равенство

$$\det M \det N - \sum_{1 \leq r_1 < \dots < r_k \leq s} \det M' \det N' = 0,$$

где матрицы M' и N' получаются из M и N обменом первых k столбцов матрицы N и столбцов с номерами $r_1, \dots, r_k$ матрицы M (с сохранением порядка столбцов). Наше предложение следует из леммы 2.10 и равенства Сильвестра. $\square$

Лемма 3.2. Соотношения $R_{L,P}^{(i,j),(i,j);k}$, $R_{L,P}^{(i+1,j),(i+1,j);k}$ и $R_{L,P}^{(i,j),(i+1,j);k}$ для всевозможных L и P определяют многообразие пар $(V_{i,j}, V_{i+1,j}) \subset Gr_i(W_{i,j}) \times Gr_{i+1}(W_{i+1,j})$, удовлетворяющих условию $V_{i,j} \subset V_{i+1,j}$.

Доказательство. Общие нули соотношений $R_{L,P}^{(i,j),(i,j);k}$ и $R_{L,P}^{(i+1,j),(i+1,j);k}$ совпадают с произведением грассманианов $Gr_i(W_{i,j}) \times Gr_{i+1}(W_{i+1,j})$ в произведении проективных пространств $\mathbb{P}(\Lambda^i W_{i,j}) \times \mathbb{P}(\Lambda^{i+1} W_{i+1,j})$. Кроме того, соотношения $R_{L,P}^{(i+1,j),(i,j);k}$ являются классическими соотношениями Плюккера, т.е. пара пространств лежит в множестве нулей этих соотношений тогда и только тогда, когда первое пространство является подпространством второго. $\square$

Лемма 3.3. Нули соотношений $R_{L,P}^{(i,j),(i,j);k}$, $R_{L,P}^{(i,j+1),(i,j+1);k}$ и $R_{L,P}^{(i,j),(i,j+1);k}$ с произвольными L и P образуют многообразие пар $(V_{i,j}, V_{i,j+1}) \subset Gr_i(W_{i,j}) \times Gr_i(W_{i,j+1})$, удовлетворяющих условию $\text{pr}_{j+1} V_{i,j} \subset V_{i,j+1}$.

Доказательство. Доказательство аналогично приведенному выше. Единственное различие заключается в том, что соотношения $R_{L,P}^{(i,j),(i,j+1);k}$ являются вырожденными соотношениями Плюккера в смысле [2] (см. пример 2.14). $\square$

Предложение 3.4. Множество нулей идеала J_n совпадает с R_n , т.е. $R_n = X(J_n)$.

Доказательство. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что если все соотношения $R_{L,P}^{(i_1,j_1),(i_2,j_2);k}$ обращаются в нуль в точке $x \in \prod_{i \leq j} \mathbb{P}(M_{\alpha_{i,j}})$, то $x \in R_n$. Это следует из лемм 3.2 и 3.3. $\square$

Следующее предложение является ключевым для нас.

Предложение 3.5. Для каждого $F \in \mathbb{C}X_n$ существует набор чисел $N_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $i \leq j$, и полином $G \in \mathbb{C}X_n$, такие, что

$$\prod_{i \leq j} (X_{1,\dots,i}^{(i,j)})^{N_{i,j}} F - G \in J_n$$

и G зависит только от переменных ПБВ-степени 0 или 1

$$X_{1,\dots,i}^{(i,j)}, \quad i \leq j, \quad \text{и} \quad X_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,i,m}^{(i,j)}, \quad 1 \leq r \leq i \leq j < m.$$

Более того, G может быть выбран таким образом, что если он существенно зависит от переменной $X_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,i,m}^{(i,j)}$ для некоторых i, j , то он не зависит ни от одной переменной вида $X_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,i_1,m}^{(i_1,j_1)}$ при $(i_1, j_1) \neq (i, j)$.

Доказательство. Напомним, что ПБВ-степень переменной $X_L^{(i,j)}$ определяется как число таких $l_a \in L$, что $l_a > j$. Пусть $X_L^{(i,j)}$ — переменная ПБВ-степени больше единицы и $r \notin L$ для некоторого $r \leq i$. Рассмотрим соотношение $R_{L,(r,1,\dots,r-1,r+1,\dots,i)}^{(i,j),(i,j);1}$. Имеем

$$(-1)^{r-1} R_{L,(r,1,\dots,r-1,r+1,\dots,i)}^{(i,j),(i,j);1} = X_L^{(i,j)} X_{1,\dots,i}^{(i,j)} - \sum_{a: l_a > j} X_{l_1,\dots,l_{a-1},r,l_{a+1},\dots,l_i}^{(i,j)} X_{1,\dots,r-1,l_a,r+1,\dots,i}^{(i,j)}.$$

Заметим, что ПБВ-степень каждой из переменных $X_{l_1,\dots,l_{a-1},r,l_{a+1},\dots,l_i}^{(i,j)}$ на единицу меньше, чем степень переменной $X_L^{(i,j)}$. Теперь первое утверждение нашего предложения может быть легко доказано (нисходящей) индукцией.

Предположим теперь, что полином G существенно зависит от переменных

$$X_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,i_1,m}^{(i_1,j_1)} \quad \text{и} \quad X_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,i_2,m}^{(i_2,j_2)}$$

для двух разных пар (i_1, j_1) и (i_2, j_2) . Пусть $i_1 \geq i_2$. Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} & (-1)^{r-1} R_{(1,\dots,r-1,r+1,\dots,i_1,m),(r,1,\dots,r-1,r+1,\dots,i_2)}^{(i_1,j_1),(i_2,j_2);1} \\ &= X_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,i_1,m}^{(i_1,j_1)} X_{1,\dots,i_2}^{(i_2,j_2)} - (-1)^{i_2+i_1} X_{1,\dots,i_1}^{(i_1,j_1)} X_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,i_2,m}^{(i_2,j_2)}. \end{aligned}$$

Используя его, мы можем избавиться от переменной $X_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,i_1,m}^{(i_1,j_1)}$ (умножая на $X_{1,\dots,i_2}^{(i_2,j_2)}$). $\square$

3.2. Представления кольца Q_n . Пусть $Q_n = \mathbb{C}X_n / I(R_n)$ — координатное кольцо многообразия R_n . Рассмотрим алгебру полиномов A_n от переменных $T_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$, и $Z_{i,j}$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$. Определим гомоморфизм $\Psi: \mathbb{C}X_n \rightarrow A_n$ следующим образом. Пусть $X_L^{(i,j)}$ — переменная, такая, что

$$1 \leq l_1 < \dots < l_d \leq i \leq j < l_{d+1} < \dots < l_i$$

(таким образом, ПБВ-степень этой переменной равна $i - d$). Определим $(i \times i)$ -матрицу M по формуле

$$M_{a,b} = \begin{cases} (-1)^{l_a - a}, & \text{если } b = a \leq d, l_a \in L, \\ Z_{a, l_b - 1}, & \text{если } a \notin L, a \leq i, b > d, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Определим гомоморфизм Ψ по формуле

$$X_{l_1, \dots, l_i}^{(i,j)} \mapsto T_{i,j} \det M. \quad (3.2)$$

Предложение 3.6. *Ядро гомоморфизма Ψ совпадает с $I(R_n)$.*

Доказательство. Напомним, что $(N^-)^a$ -орбита старшей прямой является открытой плотной клеткой $U \subset R_n$. Заметим, что $I(R_n) = I(U)$. Вложение

$$R_n \subset \prod_{i \leq j} \mathbb{P}(\Lambda^i W_{i,j})$$

определяется с помощью определителей из формулы в лемме 2.10. Таким образом, полином из $\mathbb{C}X_n$ обращается в нуль на U тогда и только тогда, когда он принадлежит ядру гомоморфизма Ψ (отметим, что переменные $T_{i,j}$ гарантируют мультиоднородность). $\square$

Следствие 3.7. *Формула (3.2) определяет вложение $Q_n \rightarrow A_n$.*

Следствие 3.8. *Имеет место разложение*

$$Q_n = \bigoplus_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n(n-1)/2}} Q_{\mathbf{m}},$$

где $Q_{\mathbf{m}}$ состоит из полиномов общей степени $m_{i,j}$ по переменным $X_L^{(i,j)}$.

Заметим, что это разложение очень похоже на соответствующее разложение координатного кольца многообразия флагов. В этом классическом случае слагаемыми разложения являются двойственные пространства к неприводимым представлениям алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В связи с этим вопрос о свойствах пространств $Q_{\mathbf{m}}$ является важным и интересным.

3.3. Коцикличность. Основной целью этого раздела является доказательство коцикличности действия алгебры Ли $(\mathfrak{n}^-)^a$ на каждом из пространств $Q_{\mathbf{m}}$ с коциклическим вектором

$$v_{\mathbf{m}}^* = \prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i,j)})^{m_{i,j}}.$$

Напомним, что представление называется коциклическим, если двойственное представление является циклическим. Другими словами, мы докажем, что $Q_{\mathbf{m}}^* = S((\mathfrak{n}^-)^a)v_{\mathbf{m}}$, где $S((\mathfrak{n}^-)^a)$ — симметрическая алгебра.

Пусть $\mathbf{m}$ — такой набор чисел, что для некоторой пары i, j имеем $m_{i,j} = 1$ и $m_{c,d} = 0$ для всех $(c, d) \neq (i, j)$ (эти наборы аналогичны фундаментальным весам классической алгебры). Обозначим соответствующую однородную компоненту пространства $Q_{\mathbf{m}}$ через $Q_{i,j}$.

Опишем сначала структуру действия $(\mathfrak{n}^-)^a$ на $Q_{i,j}$. Заметим, что пространство $Q_{i,j}$ имеет базис $X_L^{(i,j)}$, занумерованный наборами L , такими, что $L =$

$(1 \leq l_1 < \dots < l_i \leq n)$ и $L \subset \{1, \dots, i, j+1, \dots, n\}$. отождествим $Q_{i,j}$ с двойственным пространством к $\Lambda^i(W_{i,j})$, полагая $X_L^{(i,j)} w_P = \delta_{L,P}$ для всех $P = (1 \leq p_1 < \dots < p_i \leq n)$, где $w_P = w_{p_1} \wedge \dots \wedge w_{p_i}$. Получаем структуру $\mathfrak{g}^a$ -модуля на $Q_{i,j}$, $Q_{i,j}^* \simeq \Lambda^i(W_{i,j})$. В частности,

$$f_{a,b} X_L^{(i,j)} = \begin{cases} -X_{l_1, \dots, l_{r-1}, a, l_{r+1}, \dots, l_i}^{(i,j)}, & \text{если } a \leq i \leq j < b \text{ и } l_r = b+1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Напомним, что $X_{\sigma L} = (-1)^\sigma X_L$ для любой перестановки $\sigma \in S_i$.) Легко видеть, что $Q_{i,j}$ является коциклическим представлением алгебры $(\mathfrak{n}^-)^a$ с коциклическим вектором $X_{1, \dots, i}^{(i,j)}$.

Определим теперь структуру $(\mathfrak{n}^-)^a$ -модуля на всех $Q_{\mathbf{m}}$. По определению имеется сюръекция $\bigotimes_{i \leq j} Q_{i,j}^{\otimes m_{i,j}} \rightarrow Q_{\mathbf{m}}$. На тензорном произведении есть естественная структура $(\mathfrak{n}^-)^a$ -модуля, и, значит, нам достаточно показать, что идеал $I(R_n)$ является $(\mathfrak{n}^-)^a$ -инвариантным. Докажем это утверждение сначала для J_n .

Лемма 3.9. *Идеал J_n инвариантен относительно $(\mathfrak{n}^-)^a$ -действия, определенного выше.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $f_{a,b} R_{L,P}^{(i_1, j_1), (i_2, j_2); k} \in J_n$ для любого элемента $f_{a,b} \in (\mathfrak{n}^-)^a$. Но легко видеть, что $f_{a,b} R_{L,P}^{(i_1, j_1), (i_2, j_2); k}$ по-прежнему является (другим) обобщенным соотношением Плюккера из нашего списка. $\square$

Теорема 3.10. *Идеал $I(R_n)$ является $(\mathfrak{n}^-)^a$ -инвариантным. Кроме того, $I(R_n)$ есть насыщение идеала J_n .*

Доказательство. Докажем сначала второе утверждение. Используя предложение 3.5, найдем числа $N_{i,j}$ и полином G , такие, что

$$\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i,j)})^{N_{i,j}} F - G \in J_n \quad (3.3)$$

и G зависит только от переменных ПБВ-степени 0 и 1. Кроме того, будем предполагать, что G зависит только от одной переменной вида $X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i, m}^{(i,j)}$ для каждой пары $r < m$. Мы утверждаем, что если $F \in I(R_n)$, то $G = 0$. Действительно, выберем пары r, m и i, j , такие, что $r \leq i \leq j < m$ и G зависит от $X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, a, m}^{(i,j)}$. Пусть

$$G = \sum_{p \geq 0} (X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i, m}^{(i,j)})^p G_p$$

— разложение полинома G по степеням переменных $X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i, m}^{(i,j)}$ (т.е. G_p не зависят от переменной $X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i, m}^{(i,j)}$). Используя предложение 3.6, получаем, что $\Psi G = 0$. Заметим, что

$$\Psi X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i, m}^{(i,j)} = (-1)^{i-r} T_{i,j} Z_{r, m-1}.$$

Значит, переменная $Z_{r, m-1}$ встречается только в $X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i, m}^{(i,j)}$. Отсюда следует, что все G_p равны 0. Продолжая эту процедуру, получаем, что $G = 0$. Как

следствие (3.3) имеет вид

$$\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{N_{i, j}} F \in J_n$$

и, значит, $I(R_n)$ есть насыщение идеала J_n (см. [10, упражнение 5.10]).

Теперь докажем первое утверждение нашего предложения. Заметим, что $f_{a, b} X_{1, \dots, i}^{(i, j)} = 0$ для всех a, b, i, j . Так как J_n является $\mathfrak{g}^a$ -инвариантным, получаем

$$\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{N_{i, j}} (f_{a, b} F) \in J_n \subset I(R_n).$$

Но идеал $I(R_n)$ прост, т. е. $f_{a, b} F \in I(R_n)$. $\square$

Согласно доказанной выше теореме, каждое пространство $Q_{\mathbf{m}}$ является $(\mathfrak{n}^-)^a$ -модулем. Мы хотим доказать, что эти представления коциклические с коциклическими векторами, являющимися произведениями переменных $X_{1, \dots, i}^{(i, j)}$. Другими словами, мы хотим доказать, что для каждого ненулевого $F \in Q_{\mathbf{m}}$

$$\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{m_{i, j}} \in \mathbb{C}[f_{a, b}]_{a \leq b} F.$$

Теорема 3.11. $Q_{\mathbf{m}}$ является коциклическим представлением с коциклическим вектором $\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{m_{i, j}}$.

Доказательство. Обозначим через $v_{\mathbf{m}}^*$ образ вектора $\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{m_{i, j}}$ в Q_n . Пусть $F \in \mathbb{C}X_n$ и $F \notin I(R_n)$. Согласно предложению 3.5, мы можем записать

$$\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{N_{i, j}} F - G \in J_n$$

для некоторых чисел $N_{i, j}$ и полинома G . Так как $F \notin I(R_n)$, то $G \neq 0$. Предположим, что член

$$\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{l_{i, j}} \prod_{r < m} (X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i(r, m), m}^{(i(r, m), j(r, m))})^{p(r, m)}$$

с некоторыми индексами $i(r, m) \leq j(r, m)$ и степенями $p(r, m)$ встречается в G с ненулевым коэффициентом. Тогда, так как $f_{a, b} X_{1, \dots, i}^{(i, j)} = 0$, то

$$\prod_{r < m} f_{r, m}^{p(r, m)} G = \prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{l_{i, j}} \prod_{r < m} f_{r, m}^{p(r, m)} (X_{1, \dots, r-1, r+1, \dots, i(r, m), m}^{(i(r, m), j(r, m))})^{p(r, m)},$$

и результат пропорционален (с ненулевым коэффициентом пропорциональности) произведению степеней переменных $X_{1, \dots, i}^{(i, j)}$. Получаем следующее утверждение: найдутся числа $N_{i, j}$, $p(r, m)$, такие, что

$$\prod_{r < m} f_{r, m}^{p(r, m)} \left(\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{N_{i, j}} F \right) = \text{const} \cdot \prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{N_{i, j} + m_{i, j}}.$$

Поскольку все $f_{a, b}$ переводят $X_{1, \dots, i}^{(i, j)}$ в нуль, получаем

$$\prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{N_{i, j}} \prod_{r < m} f_{r, m}^{p(r, m)} F - \prod_{i \leq j} (X_{1, \dots, i}^{(i, j)})^{N_{i, j} + m_{i, j}} \in I(R_n).$$

Таким образом,

$$\left(\prod_{r < m} f_{r,m}^{p(r,m)} \right) F - \prod_{i \leq j} (X_{1,\dots,i}^{(i,j)})^{m_{i,j}} \in I(R_n)$$

и, значит, $(\prod_{r < m} f_{r,m}^{p(r,m)}) F = v_{\mathbf{m}}^*$ в Q_n . $\square$

Следствие 3.12. Представления $Q_{\mathbf{m}}$ являются коциклическими относительно действия $(\mathfrak{n}^-)^a$ с коциклическим вектором $v_{\mathbf{m}}^*$. Имеет место изоморфизм $(\mathfrak{n}^-)^a$ -модулей $Q_{\mathbf{m}}^* \simeq M_{\mathbf{m}}$.

Доказательство. Легко видеть, что $(\mathfrak{n}^-)^a$ -модули $Q_{i,j}^*$ и $M_{i,j}$ изоморфны. Так как оба семейства представлений $Q_{\mathbf{m}}^*$ и $M_{\mathbf{m}}$ строятся индуктивно с помощью $(\mathfrak{n}^-)^a$ -вложений

$$M_{\mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^2} \subset M_{\mathbf{m}^1} \otimes M_{\mathbf{m}^2}, \quad Q_{\mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^2}^* \subset Q_{\mathbf{m}^1}^* \otimes Q_{\mathbf{m}^2}^*,$$

мы получаем доказательство нашего следствия. $\square$

§4. Гипотезы

В заключительной части мы приводим гипотезы о структуре геометрических и алгебраических объектов, определенных выше в нашей работе.

Сначала напомним уже сформулированную выше гипотезу об обобщенных соотношениях Плюккера. Напомним, что через J_n мы обозначаем идеал, порожденный всеми обобщенными соотношениями Плюккера.

Гипотеза 4.1. Идеалы J_n и $I(R_n)$ совпадают.

Один из возможных способов доказательства заключается в построении линейно независимых мономов в $Q_n = \mathbb{C}\mathbf{X}_n/I(R_n)$, таких, что они образуют порождающее множество для $\mathbb{C}\mathbf{X}_n/J_n$ (напомним, что $J_n \subset I(R_n)$). Обычно это делается с помощью полустандартных таблиц и их аналогов (см. [9], [2]). Было бы очень интересно описать соответствующие комбинаторные объекты в нашей ситуации.

Следующая гипотеза дает представление модулей $M_{\mathbf{m}}$ с помощью образующих и соотношений. Она обобщает аналогичное утверждение из [7], где рассмотрен случай диагональных наборов весов ($m_{i,j} = 0$ при $i \neq j$).

Гипотеза 4.2. $\mathfrak{g}^a$ -модуль $M_{\mathbf{m}}$ изоморфен фактору $\mathbb{C}[f_{i,j}]_{i \leq j}/I_{\mathbf{m}}$, где $I_{\mathbf{m}}$ — идеал, порожденный пространством

$$U(\mathfrak{b}) \circ \text{span}(f_{i,j}^{\sum_{i \leq k \leq l \leq j} m_{k,l} + 1}, i \leq j). \quad (4.1)$$

Отметим также, что компьютерные вычисления позволяют высказать гипотезу, что мономиальные базисы из [7], [14] могут быть обобщены на наш случай. А именно, пусть $S_{\mathbf{m}}$ — подмножество в $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{n(n-1)/2}$, состоящее из наборов $\mathbf{s} = (s_{\alpha})_{\alpha > 0}$, таких, что для каждого пути Дика $\mathbf{p}$, начинающегося в α_i и заканчивающегося в α_j , выполняется неравенство

$$\sum_{\beta \in \mathbf{p}} s_{\beta} \leq \sum_{i \leq k \leq l \leq j} m_{k,l}.$$

Гипотеза 4.3. Элементы $f^{\mathbf{s}} v_{\mathbf{m}}$, $\mathbf{s} \in S_{\mathbf{m}}$, образуют базис в $M_{\mathbf{m}}$.

Заметим, что две последние гипотезы тесно взаимосвязаны. Точнее, легко показать, что имеется сюръективное отображение $\mathbb{C}[f_{i,j}]_{i \leq j} / I_{\mathbf{m}} \rightarrow M_{\mathbf{m}}$ (так как все соотношения из правой части выполнены в $M_{\mathbf{m}}$). Кроме того, верна следующая лемма.

Лемма 4.4. *Векторы $\{f^{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in S_{\mathbf{m}}\}$ порождают правую часть в (4.1).*

Доказательство. Доказательство полностью повторяет аналогичное рассуждение из [7]. $\square$

Таким образом, для того, чтобы доказать сформулированные выше гипотезы, достаточно проверить, что векторы $\{f^{\mathbf{s}} v_{\mathbf{m}}, \mathbf{s} \in S_{\mathbf{m}}\}$ линейно независимы. Компьютерные вычисления подтверждают этот факт, но доказывать его мы не умеем. Основное отличие от диагонального случая, рассмотренного в [7], заключается в том, что суммы Минковского $S_{\mathbf{m}^1} + S_{\mathbf{m}^2}$ перестают совпадать с $S_{\mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^2}$ для общих весов $\mathbf{m}^1$ и $\mathbf{m}^2$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] I. Arzhantsev, *Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$* , Proc. Amer. Math. Soc., **139**:3 (2011), 783–786.
- [2] E. Feigin, *$\mathbb{G}_a^M$ degeneration of flag varieties*, Selecta Math. (в печати); <http://arxiv.org/abs/1007.0646>.
- [3] E. Feigin, *Degenerate flag varieties and the median Genocchi numbers*, Math. Res. Lett., **18**:6 (2011), 1163–1178.
- [4] E. Feigin, M. Finkelberg, *Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BW theorem*, <http://arxiv.org/abs/1103.1491>.
- [5] E. Feigin, M. Finkelberg, P. Littelmann, *Symplectic degenerate flag varieties*, <http://arxiv.org/abs/1106.1399>.
- [6] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Math., Readings in Math., vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n* , Transform. Groups, **16**:1 (2011), 71–89.
- [8] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras*, Int. Math. Res. Notices, **24** (2011), 5760–5784.
- [9] У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии*, МЦНМО, М., 2006.
- [10] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
- [11] B. Hassett, Yu. Tschinkel, *Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$* , Int. Math. Res. Notices, **20** (1999), 1211–1230.
- [12] S. Kumar, *Kac–Moody Groups, Their Flag Varieties and Representation Theory*, Progress in Math., vol. 204, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [13] D. Panyushev, O. Yakimova, *A remarkable contraction of semisimple Lie algebras*, Ann. Inst. Fourier (в печати); <http://arxiv.org/abs/1107.0702>.
- [14] E. Vinberg, *On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebras*, Conference talk, Bielefeld, 2005.
- [15] O. Yakimova, *One-parameter contractions of Lie–Poisson brackets*, J. European Math. Society (в печати); <http://arxiv.org/abs/1202.3009>.