Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Гусейн-Заде, Н. Н. Нехорошев, Об особенностях типа A_k на плоских кривых фиксированной степени, *Функци. анализ и его прил.*, 2000, том 34, выпуск 3, 69–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa314>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:23:06

УДК 512.772.1

Об особенностях типа A_k на плоских кривых фиксированной степени*

© 2000. С. М. Гусейн-Заде, Н. Н. Нехорошев

Существует общая задача описания особенностей, которые могут встречаться на (комплексных) алгебраических гиперповерхностях, в частности на плоских кривых фиксированной степени (см., например, [2]). Вариант этой задачи (когда гиперповерхность вещественна и имеет (над полем вещественных чисел) изолированную точку в рассматриваемой особенности) может быть важен для нахождения равномерных показателей Лоясевича для вещественных многочленов фиксированной степени [4]. Здесь мы рассматриваем особенности типа A_k , которые могут встречаться на плоских кривых степени d . Пусть $k(d)$ — наибольшее целое k , для которого существует плоская кривая степени d , имеющая особенность типа A_k . Предложение 1 дает верхнюю оценку для $k(d)$. В соответствии с ним $\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} k(d)/d^2 \leq 3/4$. В работе приводится пример плоской кривой степени $28s+9$ ($s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), имеющей особенность типа A_k с $k = 420s^2 + 269s + 42$. Таким образом, $\underline{\lim}_{d \rightarrow \infty} k(d)/d^2 \geq 15/28$ (заметьте, что $15/28 > 1/2$). Пример строится по существу тем же способом, что и кривая степени 22 с особенностью типа A_{257} в [3] (цель построения того примера была несколько иной).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. $k(d) \leq (d-1)^2 - [d/2] \cdot ([d/2] - 1)$ (здесь $[\cdot]$ означает целую часть числа).

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Мы подозреваем, что это утверждение является известным, однако нам не удалось найти соответствующую ссылку.

2. Полунепрерывность спектра особенности дает оценку сверху того же порядка, т.е. асимптотически $3d^2/4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно предполагать, что кривая C является приведенной (т.е. не содержит кратных компонент). Поэтому на комплексной проективной плоскости можно выбрать бесконечно удаленную прямую, которая пересекает кривую C в d различных точках. Пусть аффинная часть кривой C задается уравнением $f(x, y) = 0$, где f — многочлен степени d . Для достаточно малого ε поверхность $V = \{f(x, y) + z^2 = \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^3$ неособа, а отрицательный индекс инерции формы пересечений на группе гомологий $H_2(V; \mathbb{R})$ как раз совпадает с правой частью неравенства (это следует, например, из результата Дж. Стинбринка о форме пересечений квазиоднородной особенности, примененного к (изолированной) особенности $f_d(x, y) + z^2$, где $f_d(x, y)$ — однородная составляющая степени d многочлена f). Теперь предложение следует из того факта, что форма пересечений особенности типа A_k от трех переменных отрицательно определена, а если кривая C имеет особенность типа A_k , то группа исчезающих гомологий этой особенности вложена в группу гомологий $H_2(V; \mathbb{R})$ (см., например, [1]). $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует плоская кривая степени $28s+9$, имеющая особенность типа A_k с $k = 420s^2 + 269s + 42$ ($s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).*

*Работа первого автора частично поддержана грантом 98-01-00612 РФФИ и грантом 96-0713 ИНТАС. Автор благодарен Университету г. Ницца (Франция), во время пребывания в котором была выполнена настоящая работа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\ell = 3s + 1$, $m = 7s + 2$, и пусть (аффинная плоская) кривая C задается уравнением

$$F(x, y) = y^2 - 2yA(x, y) + x^{8\ell} + 4x^{7\ell}y^m = 0, \quad (1)$$

где $A(x, y) = [x^{4\ell} + 2x^{3\ell}y^m - 2x^{2\ell}y^{2m} + 4x^\ell y^{3m} - 10y^{4m}]$. Степень d кривой C равна $4m + 1 = 7\ell + m = 28s + 9$. Пусть $z = y - A(x, y)$ (x и z являются локальными координатами на плоскости около начала координат). Тогда

$$F(x, y) = z^2 + 56x^{3\ell}y^{5m} - 56x^{2\ell}y^{6m} + 80x^\ell y^{7m} - 100y^{8m}. \quad (2)$$

Поскольку $z(x, y) = y - x^{4\ell} +$ члены высшей степени, имеет место равенство $y(x, z) = z + x^{4\ell} +$ члены высшей степени. Подставляя это выражение в (2), получаем

$$F(x, z) = z^2 + 56x^{3\ell+20\ell m} + \sum a_{ij}x^i z^j = z^2 + 56x^{k+1} + \sum a_{ij}x^i z^j,$$

где $k = 420s^2 + 269s + 42$, а под знаком суммы имеются только члены с мульти-степенью (i, j) , лежащей над отрезком $(0, 2)(k + 1, 0)$, т.е. такие, для которых $i/(k + 1) + j/2 > 1$. Это доказывает предложение. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Имеется близкая задача нахождения наибольшего целого $k' = k'(d)$, такого, что особенность типа $A_{k'}$ примыкает к изолированной однородной особенности степени d от двух переменных (или (эквивалентно) к особенности из того же страта $\mu = \text{const}$). Имеет место неравенство $k'(d) \geq k(d)$. Все рассуждения выше проходят и для этой задачи, и потому неравенства предложений 1 и 2 имеют место и для числа $k'(d)$.

Известно, что существует такое $M \geq 0$, что для любого вещественного многочлена $P(x, y)$ степени d от двух переменных, имеющего локальный минимум в начале координат в $\mathbb{R}^2$, для некоторого $c > 0$ в некоторой окрестности начала координат имеет место неравенство $P(x, y) \geq c\|(x, y)\|^M$. Нижняя грань M_d таких показателей M называется равномерным показателем Лоясевича для многочленов степени d от двух переменных. Для нечетного s функция $F(x, y)$ имеет локальный минимум в начале координат на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$. Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Равномерный показатель Лоясевича M_d для многочленов степени d от двух переменных больше или равен $420s^2 + 269s + 43$, где $s = 2[(d + 19)/56] + 1$. Поэтому $\lim_{d \rightarrow \infty} M_d/d^2 \geq 15/28$.

ЗАМЕЧАНИЕ. По Гвоздзиевичу (J. Gwoździejewicz) $M_d \leq (d - 1)^2 + 1$ (см. [4]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. Наука, М., 1984.
2. Greuel G.-M., Lossen C., Shustin E. Invent. Math., **133**, No. 3, 539–580 (1998).
3. Гусейн-Заде С. М., Нехорошев Н. Н. Функциональный анализ и его прил., **17**, вып. 4, 82–83 (1983).
4. Kollár J. An Effective Łojasiewicz Inequality for Real Polynomials. Preprint, XXX Mathematics Archives, math. AG/9904161.
5. Steenbrink J. H. M. Compositio Math., **34**, No. 2, 211–223 (1977).

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: sabir@mccme.ru
nekhoro@nw.math.msu.su

Поступило в редакцию
11 августа 1999 г.