Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Окуньков, Схемы Гильберта и кратные q -дзета-значения, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 2, 79–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3140>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:04:48

Схемы Гильберта и кратные q -дзета-значения*

© 2014. А. Ю. ОКУНЬКОВ

К столетию со дня рождения И. М. Гельфанда

В работе обсуждаются некоторые гипотезы о кратных q -дзета-значениях и их приложениях к задачам перечислительной геометрии.

§1. Кратные q -дзета-значения

1.1. Кратные дзета-значения, т. е. ряды вида

$$\zeta(s) = \zeta(s_1, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > \dots > n_k} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_k^{s_k}}, \quad (1.1)$$

где s_i суть неотрицательные целые числа и $s_1 > 1$, привлекали внимание крупнейших математиков, начиная с Эйлера, см., например, [20]. К настоящему времени открыто потрясающее воображение количество свойств и приложений этих чисел, многие из которых уже доказаны, в то время как другие остаются гипотезами. Введение в мотивные и теоретико-представленические аспекты этих чисел читатель может найти в таких книгах, как [1, гл. 25] и [5] соответственно.

1.2. Настоящая статья посвящена q -деформациям рядов (1.1). В литературе уже можно найти много работ, посвященных различным q -деформациям кратных дзета-значений, см., например, [2], [17], [21]. Те из многих возможных деформаций, которые будут важны для нас, имеют вид

$$Z(s) = \sum_{n_1 > \dots > n_k} \prod (n_i)^{-s_i}, \quad (n)^{-s} = \frac{p_s(q^n)}{(1 - q^n)^s}, \quad (1.2)$$

где p_s есть некоторый фиксированный многочлен степени $\leq s$ без постоянного члена.

Линейная оболочка рядов (1.2) не зависит от выбора числителей p_s . Однако для обсуждения гипотетической $\mathbb{Z}/2$ -градуировки на алгебре кратных q -дзета-значений удобно выбрать числители возвратными, т. е. удовлетворяющими условию $t^s p_s(1/t) = p_s(t)$. Это возможно лишь при $s > 1$; поэтому, начиная с этого места, мы предполагаем, что $s_i \geq 2$, и полагаем по определению

$$p_s(t) = \begin{cases} t^{s/2}, & s = 2, 4, 6, \dots, \\ t^{(s-1)/2}(1+t), & s = 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

1.3. Мы определяем $q\text{MZV}$ как линейную оболочку рядов $Z(s)$ с $s_i \geq 2$ в алгебре формальных степенных рядов $\mathbb{Q}[[q]]$ и рассматриваем ее как алгебру

*Я благодарен NSF за поддержку в рамках FRG 1159416.

над $\mathbb{Q}$. Мы вводим в этой алгебре возрастающую фильтрацию по весу, полагая

$$\text{weight } Z(s) = \sum s_i$$

на образующих $Z(s)$. Заметим что

$$\mathbf{QM} = \mathbb{Q}[Z(2), Z(4), Z(6)] \subset \mathbf{qMZV}$$

есть не что иное, как классическое кольцо квазимодулярных форм [8], которое играет для кратных q -дзета-значений роль подкольца $\mathbb{Q}[\pi^2] \subset \mathbf{MZV}$, порожденного четными дзета-значениями. Кольцо $\mathbf{QM}$ содержит все $Z(2k)$ и с правильной нормализацией (которая включает в себя правильный выбор постоянных членов) является $\mathbb{Z}$ -градуированным по весу. Мне неизвестно, можно ли поднять фильтрацию по весу до градуировки по весу для всей алгебры $\mathbf{qMZV}$.

Очевидно, что

$$(1 - q)^{\text{weight } Z(s)} \rightarrow 2^{\#\text{odd}(s)} \zeta(s), \quad q \rightarrow 1,$$

и тем самым определяется гомоморфизм $\mathbf{grqMZV} \rightarrow \mathbf{MZV}$, где $\mathbf{grqMZV}$ есть присоединенная градуированная алгебра для весовой фильтрации алгебры $\mathbf{qMZV}$, а $\#\text{odd}(s)$ — число нечетных членов в s . У этого гомоморфизма большое ядро, как уже видно на примере его ограничения $\mathbf{QM} \rightarrow \mathbb{Q}[\pi^2]$. Поскольку $\zeta(s) > 0$, мы видим, что $Z(s)$ не содержится в подпространстве меньшей весовой фильтрации.

1.4. Мы предлагаем следующую гипотезу.

Гипотеза 1. Алгебра $\mathbf{qMZV}$ есть линейная оболочка рядов $Z(s)$ с $2 \leq s_i \leq 5$, она $\mathbb{Z}/2$ -градуирована по весу и инвариантна относительно оператора $q \frac{d}{dq}$, который увеличивает вес на 2. Ряд Гильберта градуированной алгебры $\mathbf{grqMZV}$ есть

$$\sum_k t^k \dim_{\mathbb{Q}} \mathbf{grqMZV}_k = \frac{1}{1 - t^2 - t^3 - t^4 - t^5 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{11} + t^{12}}. \quad (1.3)$$

Первое из этих утверждений можно сравнить с гипотезой Хоффмана [7], доказанной Брауном [3], которая говорит, что $\mathbf{MZV}$ есть линейная оболочка рядов $\zeta(s)$ с $s_i \in \{2, 3\}$. Заметим, однако, что в то время как, предположительно, эти ряды образуют линейный базис в $\mathbf{MZV}$, ряд Гильберта (1.3) предсказывает много линейных соотношений между $Z(s)$ с $2 \leq s_i \leq 5$.

§2. Схемы Гильберта поверхностей

2.1. Рассмотрим неособую квазипроективную поверхность S . Схема Гильберта $\text{Hilb}(S, n)$ параметризует 0-мерные подсхемы $\mathfrak{S} \subset S$ длины n , см., например, [6], [10], [13]. Она на самом деле является неособым неприводимым квазипроективным многообразием размерности $2n$. Если S проективна, то проективны и ее схемы Гильберта.

Геометрия схемы Гильберта и, в частности, характеристические числа различных естественных расслоений на ней представляют огромный интерес для

перечислительной алгебраической геометрии и математической физики, в частности, для изучения суперсимметричных калибровочных теорий. Характеристические числа расслоений могут быть определены не только для полных поверхностей, но и для поверхностей, допускающих действие тора с полным множеством неподвижных точек. В этом случае характеристические числа принимают значения в локализации эквивариантных когомологий точки. С этого момента мы зафиксируем действие связной редуктивной алгебраической группы G на S , причем предполагаем, что множество неподвижных точек максимального тора группы G полно. Удобно не предполагать, что это действие эффективно.

2.2. Любое линейное расслоение $\mathcal{L}$ на поверхности S определяет векторное расслоение ранга n на схеме Гильберта $\mathrm{Hilb}(S, n)$ со слоем

$$\mathcal{L}^{[n]}|_{\mathfrak{S}} = H^0(\theta_{\mathfrak{S}} \otimes \mathcal{L}).$$

Такие векторные расслоения называются тавтологическими.

Касательное пространство к точке $\mathfrak{S}$ схемы Гильберта может быть описано так:

$$\mathcal{T}|_{\mathfrak{S}} = \chi(\theta_S) - \chi(\mathcal{I}_{\mathfrak{S}}, \mathcal{I}_{\mathfrak{S}}),$$

где $\mathcal{I}_{\mathfrak{S}}$ обозначает пучок идеалов подсхемы $\mathfrak{S}$ и

$$\chi(A, B) = \sum (-1)^i \mathrm{Ext}^i(A, B).$$

С помощью теоремы Гротендика–Римана–Роха отсюда можно выразить характеристические классы касательного расслоения $\mathcal{T}$ в терминах характеристических классов тавтологических расслоений. Однако для наших целей подобная процедура представляется совершенно непрактичной, и нам будет удобнее рассматривать характеристические классы касательных расслоений как объекты, отличные от характеристических классов тавтологических расслоений.

Далее, касательное расслоение $\mathcal{T}$ может быть, в некотором роде, подкручено с помощью G -эквивариантного линейного расслоения $\mathcal{M} \in \mathrm{Pic}(S)$ следующим образом:

$$\mathcal{T}(\mathcal{M})|_{\mathfrak{S}} = \chi(\mathcal{M}) - \chi(\mathcal{I}_{\mathfrak{S}}, \mathcal{I}_{\mathfrak{S}} \otimes \mathcal{M}).$$

В частности, если $\mathcal{M}$ есть просто характер группы G , то $\mathcal{T}(\mathcal{M}) = \mathcal{T} \otimes \mathcal{M}$; такого рода параметр $\mathcal{M}$ в теории Некрасова [14] называется массой материи в присоединенном представлении.

2.3. Мы зафиксируем $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и характеристический класс f и образуем следующую производящую функцию:

$$\langle f \rangle = \sum_n q^n \int_{\mathrm{Hilb}(S, n)} f(\mathcal{L}^{[n]}) \mathrm{Euler}(\mathcal{T}(\mathcal{M})). \quad (2.1)$$

По построению

$$\langle f \rangle \in H_G^*(\mathrm{pt})_{\mathrm{loc}}[[q]].$$

Поскольку расслоение $\mathcal{M}$ можно всегда домножить на характер группы G , производящие функции (2.1) содержат информацию о спаривании произвольного характеристического класса тавтологического расслоения $\mathcal{L}^{[n]}$ с классами Черна расслоений $\mathcal{T}(\mathcal{M})$. Именно такого рода комбинации часто возникают в приложениях, см., например, [9]. Заметим, однако, что в [9] те же характеристические числа упакованы в иные производящие функции.

Заметим что для нетривиальной группы G все градуированные компоненты кольца $H_G^*(\text{pt})_{\text{loc}}$ нетривиальны, а это означает, что суммарная степень характеристических классов в (2.1) не обязана равняться размерности схемы Гильберта.

2.4. В статье [4] было показано, что

$$\langle 1 \rangle = \prod_{n>0} (1 - q^n)^\delta, \quad \delta = - \int_S c_2(TS \otimes \mathcal{M}),$$

где TS обозначает касательное расслоение поверхности S . Положим

$$\langle f \rangle' = \langle f \rangle / \langle 1 \rangle$$

и определим связные производящие функции, пользуясь правилом включения-исключения, т. е.

$$\begin{aligned} \langle \text{ch}_a \text{ch}_b \rangle^\circ &= \langle \text{ch}_a \text{ch}_b \rangle' - \langle \text{ch}_a \rangle' \langle \text{ch}_b \rangle', \\ \langle \text{ch}_a \text{ch}_b \text{ch}_c \rangle^\circ &= \langle \text{ch}_a \text{ch}_b \text{ch}_c \rangle' - \langle \text{ch}_a \text{ch}_b \rangle' \langle \text{ch}_c \rangle' \\ &\quad - \langle \text{ch}_a \text{ch}_c \rangle' \langle \text{ch}_b \rangle' - \langle \text{ch}_b \text{ch}_c \rangle' \langle \text{ch}_a \rangle' + 2 \langle \text{ch}_a \rangle' \langle \text{ch}_b \rangle' \langle \text{ch}_c \rangle' \end{aligned}$$

и т. д. Здесь ch_a суть компоненты характера Черна.

Знаменатели связных производящих функций лучше, а именно

$$\langle f \rangle^\circ \in \mathbb{k}[[q]],$$

где $\mathbb{k}$ есть образ отображения

$$H_G^*(S) \ni \gamma \mapsto \int_S \gamma \cup c_2(TS \otimes \mathcal{M}) \in H_G^*(\text{pt})_{\text{loc}}.$$

2.5. Мы предлагаем следующую гипотезу о функциональной природе производящих функций $\langle f \rangle'$.

Гипотеза 2. *Каждый ряд $\langle f \rangle'$ есть кратное q -дзета-значение веса $\text{weight } f$, где*

$$\text{weight } \text{ch}_k = k + 2.$$

Для $\mathcal{L} = \mathcal{K}_S^{1/2}$ это кратное q -дзета-значение имеет ту же четность, что и вес характеристического класса f .

Заметим, что

$$\langle f \cdot \text{ch}_0 \rangle' = q \frac{d}{dq} [\langle f \rangle' + \ln \langle 1 \rangle],$$

чем объясняется наш интерес к действию оператора $q \frac{d}{dq}$ на алгебре $\mathfrak{qMZV}$.

2.6. Среди гипотез, обсуждаемых в настоящей статье, гипотеза 2 представляется наиболее доступной, возможно, с использованием технических средств, разработанных в работе [4]. В действительности под влиянием гипотезы 2 в работе [4] уже было показано, что

$$\langle c_1(\mathcal{O}^{[n]}) \rangle' = \frac{1}{2} (Z(2) - Z(3)) \int_S (c_1 c_2 - c_3) (TS \oplus \mathcal{M}).$$

С помощью основного результата из [4] производящая функция (2.1) может быть вычислена как след по пространству Фока от произведения некоторого

вершинного оператора и некоторого квантового интеграла движения вторично квантованной тригонометрической системы Калоджеро. Требуемые квантовые интегралы движения могут быть чисто механическим образом выражены в терминах бозонных полей с помощью, например, формулы из [18] или многих других подходов к квантовой интегрируемости системы Калоджеро, разработанных в литературе. Это дает возможность явно вычислить получающиеся следы в виде кратных q -рядов типа ряда

$$\sum_{k,l>0} \frac{q^{k+l}}{(1-q^k)(1-q^l)(1-q^{k+l})},$$

исследованного в [4]. Задача, тем самым, сводится к тому, чтобы показать, что некоторые достаточно конкретные ряды лежат в $q\text{MZV}$. Разумеется, трудно знать заранее, насколько легка или тяжела окажется подобная проверка.

§3. Схемы Гильберта трехмерных многообразий

3.1. Пусть теперь X — неособое квазипроективное трехмерное многообразие. Рассмотрим его схему Гильберта точек $\text{Hilb}(X, n)$. Это уже весьма особая приводимая схема, однако она, будучи простейшим многообразием модулей в теории Дональдсона–Томаса [19], обладает совершенной теорией препятствий (в данном случае виртуальной размерности 0) и соответствующим 0-мерным виртуальным фундаментальным классом.

По аналогии с (2.1) мы определяем

$$\langle f \rangle_{3D} = \sum_n (-q)^n \int_{[\text{Hilb}(X, n)]_{\text{vir}}} f(\mathcal{L}^{[n]}), \quad (3.1)$$

где $\mathcal{L}^{[n]}$ — векторное расслоение ранга n на $\text{Hilb}(X, n)$, определенное так же, как и для поверхностей.

Например, X может быть тотальным пространством линейного расслоения $\mathcal{M}$ на поверхности S , и тогда $\text{Hilb}(S, n)$ будет одной из компонент схемы $\text{Hilb}(X, n)^{\mathbb{C}^\times}$, где $\mathbb{C}^\times$ действует растяжениями слоя расслоения $\mathcal{M}$. Ее вклад в интеграл (3.1) тесно связан с интегралами, рассмотренными в §2. Однако упаковка в производящую функцию здесь другая, и несколько другой окажется функциональная природа ряда (3.1).

3.2. Равенство

$$\langle 1 \rangle_{3D} = \prod_{n>0} (1 - q^n)^{n\delta_{3D}}, \quad \delta_{3D} = \int_X (c_1 c_2 - c_3), \quad (3.2)$$

было проверено для $X = \mathbb{C}^3$ в [12] и сформулировано там же в качестве гипотезы для произвольного X . Доказательство этой гипотезы для всех X было получено в [11], другое доказательство было анонсировано Джуном Ли. Как и ранее, мы положим

$$\langle f \rangle'_{3D} = \langle f \rangle_{3D} / \langle 1 \rangle_{3D} \quad (3.3)$$

и определим связные производящие функции, как в §2. Определим также последовательность $H_G^*(\text{pt})$ -подмодулей

$$H_G^*(\text{pt})_{\text{loc}} \supset \mathbb{k}_1 \supset \mathbb{k}_2 \supset \dots$$

как образы отображений

$$H_G^*(X) \ni \gamma \mapsto \int_X \gamma \cup (c_1 c_2 - c_3)^d, \quad q = 1, 2, \dots$$

3.3. Гипотетически производящие функции (3.3) лежат в подалгебре

$$\text{оqZ} = \mathbb{Q} \left[\left(q \frac{d}{dq} \right)^l Z(2k+1) \right]_{k \geq 1, l \geq 0} \subset \text{qMZV}, \quad (3.4)$$

порожденной нечетными q -дзета-значениями и их производными. Эту подалгебру можно рассматривать как q -аналог подалгебры

$$\text{oZ} = \mathbb{Q}[\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots] \subset \text{MZV},$$

которая по стандартным гипотезам трансцендентности есть свободная коммутативная $\mathbb{Q}$ -алгебра на своих образующих. Можно предположить, что алгебра (3.4) обладает аналогичным свойством, а именно что ее образующие алгебраически независимы над полем $\mathbb{Q}$. Пользуясь этим предположением, мы можем определить градуировку по трехмерному весу и глубине, полагая

$$\begin{aligned} \text{weight}_{3D} \left(q \frac{d}{dq} \right)^l Z(2k+1) &= 2k+1+l, \\ \text{depth} \left(q \frac{d}{dq} \right)^l Z(2k+1) &= 1. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.4. Гипотеза 3. Для связанных производящих функций

$$\left\langle \prod \text{ch}_{k_i} \right\rangle^\circ \in \sum_d \mathbb{k}_d \otimes_{\mathbb{Q}} \text{оqZ}_{\leq 2+\sum(k_i+1), d}, \quad (3.6)$$

где первая часть нижнего индекса означает верхнюю оценку на трехмерный вес, а вторая — глубину.

Можно предположить, что те методы, которые были разработаны для доказательства равенства (3.2), аналогичным образом позволят свести общий случай этой гипотезы к частному случаю $X = \mathbb{C}^3$.

3.5. Разумеется, для $X = \mathbb{C}^3$ гипотеза 3 может быть подвергнута проверке сравнением коэффициентов в разложении в ряд по q . Более продуктивно, однако, разлагать в ряд по параметру

$$t_{12} = t_1 + t_2 \in H_{GL(3)}^2(\text{pt}),$$

где t_i суть веса координат в $\mathbb{C}^3$. Для связанных производящих функций мы имеем

$$\left\langle \prod \text{ch}_{k_i} \right\rangle^\circ \in \delta_{3D} \cdot H_{GL(3)}^{\sum k_i}(\text{pt})[[q]], \quad \delta_{3D} = \frac{(t_1+t_2)(t_1+t_3)(t_2+t_3)}{t_1 t_2 t_3},$$

и, таким образом, разложение в ряд по t_{12} конечно.

Пусть π обозначает трехмерное разбиение, которое мы представим себе в виде столбиков кубиков $\square = (i, j, k)$ высоты π_{ij} , т. е.

$$1 \leq k \leq \pi_{ij},$$

установленных на квадратах $\square = (i, j)$ двумерного разбиения λ , лежащего в плоскости двух первых координат. Множества уровня функции π определяют разложение диаграммы λ в объединение косых диаграмм

$$\emptyset \subset \dots \subset \lambda'' \subset \lambda' \subset \lambda.$$

Ранг косой диаграммы мы определим как минимальное число каемочных крюков (rim hooks), из которых она может быть составлена, см. разд. 4.5 статьи [16]. Число

$$\rho(\pi) = \sum \text{rank}(\lambda^{(i)} / \lambda^{(i+1)})$$

мы назовем рангом трехмерного разбиения π . Можно показать, см. [16], что

$$\text{order}_{t_{12}} \text{вклад}(\pi) = \rho(\pi),$$

где order означает порядок зануления вдоль дивизора $t_{12} = 0$, а под вкладом разбиения π мы понимаем тот вес, с которым π входит в формулу локализации для виртуального фундаментального цикла.

Таким образом, члены малой степени по t_{12} происходят от вкладов трехмерных разбиений малого ранга, и соответствующие суммы могут быть, в принципе, исследованы явно.

3.6. Например, рассмотрим вычисление производящей функции

$$\langle \text{ch}_0 \rangle' \in \delta_{3D} \cdot \mathbb{Q}[[q]],$$

для чего достаточно вычислить линейный по t_{12} член. Трехмерное разбиение π имеет ранг 1, если и только если

- (1) разбиение λ есть крюк и
- (2) функция π_{ij} есть константа, скажем, c .

Обозначив через $n = |\pi|$ размер разбиения π , мы видим что c делит n и что для каждого c есть ровно n/c возможных разбиений λ . Как несложно проверить,

$$\left(\frac{t_3}{t_{12}} \text{вклад}(\pi) \right) \Big|_{t_{12}=0, t_3=0} = \frac{(-1)^{n+1}}{c}.$$

Поскольку $\text{ch}_0 = n$, мы получаем

$$\langle \text{ch}_0 \rangle' = -\delta_{3D} \sum_n q^n \sum_{c|n} (n/c)^2 = -\delta_{3D} Z(3),$$

что эквивалентно (3.2).

3.7. Было бы интересно знать, в какой мере соответствие между теориями Громова–Виттена и Дональдсона–Томаса (так называемое GW/DT-соответствие), предложенное в [12], выполняется для функции (3.3).

Аналоги связанных производящих функций $\langle \prod \text{ch}_{k_i} \rangle^\circ$ в теории Громова–Виттена суть следующие интегралы Ходжа:

$$\left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{k_i+1} \right\rangle = \sum_{g \geq 0} u^{2g-2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \Lambda(t_1) \Lambda(t_2) \Lambda(t_3) \prod_{i=1}^n \psi_i^{k_i+1}, \quad (3.7)$$

где $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ — пространство Делиня–Мамфорда, параметризующее стабильные кривые C рода g с n отмеченными точками,

$$\Lambda(t) = t^g - t^{g-1} \lambda_1 + \dots \pm \lambda_g, \quad \lambda_i = c_i(H^0(\omega_C)),$$

есть, с точностью до нормализации, полином Черна расслоения Ходжа и $\psi_i \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ — первый класс Черна линейного расслоения, образованного кокасательной прямой в i -й отмеченной точке.

3.8. Явное соответствие между теориями Громова–Виттена и Дональдсона–Томаса означало бы описание горизонтальных стрелок в следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[\text{ch}_k] & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{Q}[i][\tau_k] \\ \langle \rangle^\circ \downarrow & & \downarrow \langle \rangle \\ \mathbb{k} \otimes \text{qgZ} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{k} \otimes \mathbb{Q}[i][u^{-1}, u] \end{array}$$

где предполагается, что ϕ (но не Φ !) есть гомоморфизм алгебр. Общая структура отображения Φ обсуждалась в [12], существует также явное гипотетическое его описание [15]. В обычном GW/DT-соответствии отображение ϕ задано разложением рациональной функции от q в ряд по u , где $q = e^{iu}$. Это не может буквально работать в данном случае по крайней мере по двум причинам.

Во-первых, в GW/DT-соответствии для схем Гильберта точек (в отличие от кривых ненулевой степени) систематически появляются множители $1/2$. Это касается даже ряда (3.2). Во-вторых, асимптотическое разложение нечетных q -дзета-значений включает трансцендентные члены, а именно

$$Z(2k+1) \sim \frac{(2k)! \zeta(2k+1)}{(-\log q)^{2k+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+2k} B_{2n}}{(2n)! (2n+2k)} (-\log q)^{2n-1},$$

при $q \uparrow 1$. Если положить

$$\phi(Z(2k+1)) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+2k} B_{2n}}{(2n)! (2n+2k)} (-iu)^{2n-1},$$

то в небольших примерах можно наблюдать эквивалентность между вычислениями в обеих теориях. Однако у автора нет уверенности, что такая эквивалентность будет иметь место всегда.

Вместо этого я бы предложил открытую проблему определения функциональной природы рядов (3.7), решение которой, возможно, потребует выхода за рамки асимптотических разложений q -дзета-значений.

Благодарности. Я признателен Саше Гончарову, Эрику Карлссону, Давешу Молику, Никите Некрасову, Алексею Обломкову и Рахулу Пандхарипанде за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, vol. 17, Société Math. de France, Paris, 2004.
- [2] D. Bradley, *Multiple q -zeta values*, J. Algebra, **283**:2 (2005), 752–798.
- [3] F. Brown, *Mixed Tate motives over $\mathbb{Z}$* , Ann. of Math. (2), **175**:2 (2012), 949–976.
- [4] E. Carlsson, A. Okounkov, *Exts and vertex operators*, Duke Math. J., **161**:9 (2012), 1797–1815.
- [5] P. Etingof, O. Schiffmann, *Lectures on quantum groups*, Lectures in Mathematical Physics, International Press, Somerville, MA, 2002.

- [6] L. Göttsche, *Hilbert schemes of points on surfaces*, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. II, Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 483–494.
- [7] M. E. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra, **194**:2 (1997), 477–495.
- [8] M. Kaneko, D. Zagier, *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms*, in: The moduli space of curves (Texel Island, 1994), Progr. Math., vol. 129, Birkhäuser, Boston, 1995, 165–172.
- [9] M. Kool, V. Shende, R. Thomas, *A short proof of the Göttsche conjecture*, Geom. Topol., **15**:1 (2011), 397–406.
- [10] M. Lehn, *Lectures on Hilbert schemes*, in: Algebraic Structures and Moduli Spaces (Montreal, 2003), CRM Proc. Lecture Notes, vol. 38, Amer. Math. Soc., Providence, 2004, 1–30.
- [11] M. Levine, R. Pandharipande, *Algebraic cobordism revisited*, Invent. Math., **176**:1 (2009), 63–130.
- [12] D. Maulik, N. Nekrasov, A. Okounkov, R. Pandharipande, *Gromov–Witten theory and Donaldson–Thomas theory*. I, II, Compos. Math., **142**:5 (2006), 1263–1304.
- [13] H. Nakajima, *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*, Univ. Lecture Series, vol. 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [14] N. Nekrasov, *Seiberg–Witten prepotential from instanton counting*, Adv. Theor. Math. Phys., **7**:5 (2003), 831–864.
- [15] A. Oblomkov, A. Okounkov, R. Pandharipande, *The GW/DT correspondence for descendents*, не опубликовано.
- [16] A. Okounkov, R. Pandharipande, *The local Donaldson–Thomas theory of curves*, Geom. Topol., **14**:3 (2010), 1503–1567.
- [17] J. Okuda, Y. Takeyama, *On relations for the multiple q -zeta values*, Ramanujan J., **14**:3 (2007), 379–387.
- [18] A. Smirnov, *On the instanton R -matrix*, <http://arxiv.org/abs/1302.0799>.
- [19] R. Thomas, *A holomorphic Casson invariant for Calabi–Yau 3-folds and bundles on $K3$ fibrations*, J. Differential Geom., **54**:2 (2000), 367–438.
- [20] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in: First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Progr. Math., vol. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, 497–512.
- [21] В. Зудилин, *Алгебраические соотношения для кратных дзета-функций*, УМН, **58**:1 (2003), 3–32.

Columbia University
Институт проблем передачи информации РАН
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
e-mail: okounkov.columbia@gmail.com

Поступило в редакцию
17 января 2014 г.