Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кириллов, О мираболической алгебре Ли $\mathfrak{p}_n$, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 2, 88–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:27:02

О мираболической алгебре Ли $\mathfrak{p}_n$

© 2014. А. А. Кириллов

Посвящается столетию со дня рождения И. М. Гельфанда

1. Введение. Группа $GL(n+1, \mathbb{R})$ действует справа на пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ вектор-строк длины $n+1$. Это действие транзитивно на подмножестве $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Обозначим через P_v стабилизатор ненулевого вектора v и через $\mathfrak{p}_v$ его алгебру Ли. Все эти группы и алгебры Ли для разных векторов v изоморфны. Обозначим через P_n и $\mathfrak{p}_n$ группу и алгебру Ли, соответствующие вектору $v = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Их можно рассматривать также как группу и алгебру Ли всех аффинных преобразований n -мерного векторного пространства.

Мы будем записывать $g \in P_n$ в виде блочной матрицы $g = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Элементы из $\mathfrak{p}_n$ будут блочными матрицами вида $\alpha = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Естественный базис в алгебре Ли $\mathfrak{p}_n$ состоит из матричных единиц E_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$.

Пусть $\mathfrak{p}_n^*$ обозначает двойственное пространство к $\mathfrak{p}_n$. Точку $F \in \mathfrak{p}_n^*$ мы будем записывать в виде квадратной матрицы порядка $n+1$, у которой последний столбец заполнен не числами, а звездочками: $F = \begin{pmatrix} X & * \\ y & * \end{pmatrix}$. Коприсоединенное действие принимает форму сопряжения:

$$K(g)F = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & * \\ y & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (AX + by)A^{-1} & * \\ yA^{-1} & * \end{pmatrix}.$$

Значение функционала F на элементе $\alpha \in \mathfrak{p}_n$ дается формулой

$$\langle F, \alpha \rangle = \text{tr}(F \cdot \alpha) = \text{tr}(XA + yb).$$

В соответствии с блочной структурой матрицы F мы разобьем координаты точки F на две группы: $x_{ij}(F) := \langle F, E_{ij} \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$, и $y_k(F) := \langle F, E_{k, n+1} \rangle$, определяющие матрицу X и вектор-строку y .

Важная роль P_n и $\mathfrak{p}_n$ в теории представлений основана на том факте, что $\mathfrak{p}_n$ является фробениусовой алгеброй Ли. Напомним: это значит, что для некоторой точки (а, стало быть, для почти всех точек) $F \in \mathfrak{p}_n^*$ билинейная форма

$$B_F(X, Y) := \langle F, [X, Y] \rangle$$

невыврождена на $\mathfrak{p}_n$. Геометрически это значит, что в пространстве $\mathfrak{p}_n^*$ есть открытые коприсоединенные орбиты.

Одним из следствий этого факта (см. [2]) является такое утверждение: некоммутативное тело Ли $\mathcal{D}(\mathfrak{p}_n)$ изоморфно телу частных $\mathcal{D}_{\binom{n+1}{2}}$ алгебры Вейля $A_{\binom{n+1}{2}}$ дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами от $\binom{n+1}{2}$ переменных.

В этой заметке мы даем явную формулу для пфаффиана $\text{Pf}(B_F)$ формы B_F как полинома от координат точки $F \in \mathfrak{p}_n^*$.

Примеры. Для $n = 1$ группа P_1 — это хорошо известная группа “ $ax + b$ ” аффинных преобразований прямой. Форма B_F относительно базиса E_{11}, E_{12} имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ -x_{12} & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, $\text{Pf}(B_F) = x_{12}$.

Для $n = 2$ форма B_F относительно базиса $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}, E_{13}, E_{23}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & -x_{21} & 0 & x_{13} & 0 \\ -x_{12} & 0 & x_{11} - x_{22} & x_{12} & 0 & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} - x_{11} & 0 & -x_{21} & x_{23} & 0 \\ 0 & -x_{12} & x_{21} & 0 & 0 & x_{23} \\ -x_{13} & 0 & -x_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_{13} & 0 & -x_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\text{Pf}(B_F) = x_{21}x_{23}^2 + (x_{11} - x_{22})x_{13}x_{23} - x_{12}x_{13}^2$. Это квадратичная форма от переменных x_{13}, x_{23} с коэффициентами, которые являются линейными полиномами от x_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$.

2. Способ вычислений. Искомая величина $W_n = \text{Pf}(B_F)$ является полиномом от координат матрицы X и вектора y .

Лемма. 1. Полином W_n биоднороден степени n от координат вектора y и степени $\binom{n}{2}$ от элементов матрицы X . (Другими словами, это n -форма от y , $\binom{2n-1}{n}$ коэффициентов которой являются $\binom{n}{2}$ -формами от X .)

2. Полином W_n инвариантен относительно группы $\text{SL}(n, \mathbb{R}) \subset P_n$, действующей на вектор y умножением справа на A^{-1} и на матрицу X сопряжением, $X \mapsto AXA^{-1}$.

Первое свойство вытекает из блочной структуры матрицы M формы B_F , соответствующей разбиению базиса на две группы. А именно, $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$, где блок M_{11} заполнен координатами первой группы (или нулями), блоки M_{12} и M_{21} — координатами второй группы (или нулями), а блок M_{22} — нулями (ср. примеры выше).

Второе свойство следует из инвариантности 2-формы B_F относительно присоединенного действия группы P_n на X, Y и одновременно коприсоединенного действия на F . Старшая внешняя степень $\wedge^{\text{top}} B_F$ также P_n -инвариантна. Поскольку векторное пространство $\wedge^{\text{top}} \mathfrak{p}_n$ одномерно, эта старшая степень имеет вид $W_n(F)d^{\text{top}} X$. Под действием элемента $g = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_n$ второй сомножитель $d^{\text{top}} X$ умножается на $(\det A)^n$. Поэтому первый сомножитель, $W_n(F)$, должен умножаться на $(\det A)^{-n}$. Для $A \in \text{SL}(n, \mathbb{R})$ это действие тривиально.

2.1. Подход с помощью теории инвариантов. Полином W_n принадлежит тензорному произведению двух $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -модулей: n -й симметрической степени $S^n(V)$ и $\binom{n}{2}$ -й симметрической степени $S^{\binom{n}{2}}(\text{End } V)$. Первый модуль неприводим и имеет старший вес $n\omega_1$. Чтобы получить $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ -инвариант, мы должны во втором модуле использовать неприводимую компоненту с дуальным старшим весом $n\omega_{n-1}$. Число таких компонент по определению равно кратности обобщенной экспоненты $\binom{n}{2}$ для представления $\pi_{n\omega_{n-1}}$.

К счастью, эта кратность легко вычисляется (ср. [5]). Прежде всего, представление $\pi_{n\omega_{n-1}}$ имеет только один (с точностью до числового множителя) вектор нулевого веса. Значит, наше представление имеет только одну обобщенную экспоненту. Таким образом, это один из тех редких случаев, когда известная формула Като–Люстига–Хесселинка эффективна, так как сводится к легко вычисляемому старшему члену. В данном случае это $q^{\text{ht}(n\omega_{n-1})} = q^{\binom{n}{2}}$.

Поэтому полином W_n , удовлетворяющий утверждениям леммы, определяется однозначно с точностью до числового множителя.

2.2. Подход с помощью теории матриц. Полином W_n имеет интересую интерпретацию в теории матриц и связан с понятием гипердетерминанта (ср. [1]). Напомним, что $(n \times n)$ -матрица A над полем K называется регулярной, если для некоторого вектора $a \in K^n$ семейство n векторов $a, Aa, \dots, A^{n-1}a$ линейно независимо. В таком случае эти векторы образуют базис в K^n , в котором матрица A имеет специальную форму

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & c_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_1 \end{pmatrix} \quad (\text{рациональная нормальная форма}). \quad (1)$$

В нашем случае определитель матрицы, составленной из вектор-строк $y, yX, \dots, yX^{n-1}$, удовлетворяет утверждениям леммы и, значит, с точностью до множителя совпадает с полиномом W_n от элементов матрицы X и координат вектора y . Таким образом, условие $W_n \neq 0$ эквивалентно совокупности двух условий: (а) матрица X регулярна; (б) векторы $y, yX, \dots, yX^{n-1}$ линейно независимы.

Множество регулярных матриц открыто в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Его дополнение задано $\binom{2n-1}{n}$ алгебраическими уравнениями степени $\binom{n}{2}$. Для диагонализированных матриц условие регулярности формулируется просто: все собственные значения должны быть различными. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — (комплексные) собственные значения матрицы X , и пусть $\{v_s\}_{1 \leq s \leq n}$ — базис в комплексификации $\mathbb{C}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$, в котором X имеет диагональную форму. Тогда $v_s X^k = \lambda_s^k v_s$. Пусть $y = \sum_{m=1}^n y_m v_m$. Матрица перехода от системы векторов $\{y, yX, \dots, yX^{n-1}\}$ к системе $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ имеет определитель $\prod_{s=1}^n y_s \cdot \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$. Отсюда следует, что в этом случае

$$W_n(X, y)^2 = \Delta(X) \cdot \prod_s y_s^2.$$

3. Изоморфизм тела Ли $\mathcal{D}(\mathfrak{p}_n)$ и тела частных алгебры Диксмье $\mathcal{D}_{\binom{n+1}{2}}$. Мы опишем здесь явную форму изоморфизма, установленного в [2].

3.1. Замена переменных. Рассмотрим снова базис $\{E_{ij}\}$ в $\mathfrak{p}_n$. Мы хотим сделать обратимую замену этих некоммутативных переменных, так чтобы новые переменные удовлетворяли более простым коммутационным соотношениям. Для этого мы воспользуемся равенствами

$$[E_{ii}, E_{j,n+1}] = \delta_{ij} E_{j,n+1}.$$

Если мы положим

$$q_i = E_{i,n+1}, \quad p_i = q_i^{-1} E_{ii}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

то новые переменные $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ будут удовлетворять так называемым каноническим коммутационным соотношениям

$$p_i p_j = p_j p_i, \quad q_i q_j = q_j q_i, \quad p_i q_j = q_j p_i = \delta_{ij} \cdot 1.$$

Введем $\mathbb{Z}^n$ -градуировку в $U(\mathfrak{p}_n)$ следующим образом. Пусть $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$. Определим вес элемента E_{ij} как $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ и для каждого монома M из символов E_{ij} определим его вес как сумму весов всех его сомножителей. Для вектора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ мы обозначим через E_λ элемент $\sum_i \lambda_i E_{ii} \in \mathfrak{p}_n$. Поскольку

$$[E_{ii}, E_{jk}] = (\delta_{ij} - \delta_{ij}) E_{jk},$$

мы видим, что каждый моном M является собственным вектором оператора $\text{ad } E_\lambda$:

$$[E_\lambda, M] = (w(M), \lambda) \cdot M,$$

где $w(M) = \sum_i w_i(M) \varepsilon_i$ — вес монома M и $(w(M), \lambda) = \sum_i w_i(M) \lambda_i$.

В частности, дроби $\widetilde{E}_{ij} := q_i^{-1} E_{ij} q_j$ имеют числители и знаменатели одного веса, поэтому они перестановочны со всеми E_{ii} , $1 \leq i \leq n$.

С другой стороны, прямое вычисление показывает, что

$$[\widetilde{E}_{ij}, q_k] = \delta_{jk} q_k.$$

3.2. Допустимые матрицы. Для любой вещественной $(n \times n)$ -матрицы $C = \|c_{ij}\|$ мы обозначим через $E(C)$ элемент $\sum_{i,j} c_{ij} \widetilde{E}_{ij} \in \mathfrak{p}_n$. Эти элементы перестановочны со всеми E_{ii} и удовлетворяют соотношениям

$$[E(C), q_k] = \sum_{ij} c_{ij} \delta_{jk} q_k = C_k q_k, \quad \text{где } C_k = \sum_i c_{ik}.$$

Назовем матрицу C допустимой, если выполнены условия

$$\sum_i c_{ik} = 0 \quad \text{при } 1 \leq k \leq n.$$

Мы видим, что для допустимых матриц C элементы $E(C)$ перестановочны со всеми переменными $(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$.

Далее, прямое вычисление коммутатора $[\widetilde{E}_{ij}, \widetilde{E}_{kl}]$ показывает, что

$$[E(C), E(C')] = E([C, C']) \quad \text{для любых допустимых } C, C'.$$

Заметим, что допустимые матрицы образуют подалгебру Ли в $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, которая в точности равна аннулятору вектора $(1, \dots, 1)$, а следовательно, изоморфна $\mathfrak{p}_{n-1}$. Продолжая этот процесс, мы устанавливаем искомый изоморфизм между $\mathscr{D}(\mathfrak{p}_n)$ и $\mathscr{D}(\mathfrak{p}_{n+1})$.

4. Открытые орбиты в $\mathfrak{p}_n^*$. Обозначим через $S_n \subset \mathfrak{p}_n^*$ гиперповерхность (с особенностями), заданную уравнением $W_n = 0$. Мы покажем, что ее дополнение $\Omega = \mathfrak{p}_n^* \setminus S_n$ является объединением двух открытых коприсоединенных орбит. Более точно, пусть $\varepsilon = \pm 1$ и $F_\varepsilon \in \mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ — матрица, у которой ненулевыми координатами являются $f_{21} = \varepsilon$ и $f_{k+1,k} = 1$, $2 \leq k \leq n$. Заметим, что $F_1 = \begin{pmatrix} J_n & 0 \\ v_n & 0 \end{pmatrix}$, где J_n — стандартный нильпотентный жорданов блок порядка n , а v_n есть n -й базисный вектор в пространстве строк.

Обозначим через Ω_ε коприсоединенную орбиту, содержащую F_ε .

Теорема. 1. *Коприсоединенные орбиты Ω_ε , $\varepsilon = \pm 1$, являются единственными открытыми орбитами в $\mathfrak{p}_n^*$.*

2. *Дополнением в $\mathfrak{p}_n^*$ к объединению $\Omega_1 \cup \Omega_{-1}$ является гиперповерхность S_n .*

Доказательство. Мы показали в разд. 2, что форма B_F имеет максимальный ранг $\binom{n+1}{2}$, если и только если $W_n(F) \neq 0$, т. е. на дополнении к S_n . Значит, это дополнение является объединением открытых орбит. Непосредственное вычисление показывает, что $W_n(F_\varepsilon) = \varepsilon$. Поскольку $W_n(F)$ сохраняет знак при коприсоединенном действии группы P_n , орбиты Ω_ε различны для разных ε .

Рассмотрим точку $F \in \Omega$, для которой $W_n(F) > 0$. Пусть $F = \begin{pmatrix} X & * \\ y & * \end{pmatrix}$. Тогда X — регулярная матрица и векторы $y, yX, \dots, yX^{n-1}$ линейно независимы. Поэтому существует матрица $A \in \mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R})$, для которой AXA^{-1} имеет рациональную нормальную форму (1). Точнее, пусть $\{v_k, 1 \leq k \leq n\}$ — стандартный базис в пространстве вектор-строк; определим A условиями $Av_k = X^{n-k}Av_n$, $1 \leq k \leq n$. Тогда

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & * \\ y & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (AX + by)A^{-1} & * \\ yA^{-1} & * \end{pmatrix}.$$

Матрицы AXA^{-1} и J_n отличаются только последним столбцом. Поскольку $yA^{-1} = v_n$, у матрицы $byA^{-1} = bv_n$ последний столбец равен b , а остальные столбцы заполнены нулями. Поэтому, подбирая подходящий вектор b и полагая $g = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, мы получаем $K(g)F = F_1$. Следовательно, F принадлежит орбите Ω_1 . Мы доказали, что область, где $W_n > 0$, является одной P_n -орбитой. Область, где $W_n < 0$, получается из нее внешним автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}_n$, а потому также является одной P_n -орбитой.

Заметим, что унитарные неприводимые представления группы P_n , соответствующие открытым орбитам, индуцированы одномерными характерами максимальной унипотентной подгруппы N , состоящей из строго верхнетреугольных матриц. Оно естественно реализуется в пространстве функций на нижнетреугольной борелевской подгруппе в $\mathrm{GL}_+(n, \mathbb{R}) \subset P_n$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinski, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, MA, 1994. [2] I. M. Gelfand, A. A. Kirillov, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **31**:1 (1966), 509–523. [3] A. A. Kirillov, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, **6**:1 (Jan–March 2001) (2000), 7–20. [4] A. A. Kirillov, *Mosc. Math. J.*, **1**:1 (2001), 49–63. [5] A. A. Kirillov, in: *Proc. of the Conference in the memory of J.-M. Souriau*, Aix-en-Provence, 2013.