Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Б. Винберг, Пределы интегрируемых гамильтонианов на полупростых алгебрах Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 2, 39–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3143>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 14:45:12

Пределы интегрируемых гамильтонианов на полупростых алгебрах Ли*

© 2014. Э. Б. Винберг

*Посвящается Израилю Моисеевичу Гельфанду
в связи с его столетием*

Мы доказываем, что предел интегрируемых гамильтонианов на полупростой алгебре Ли также является интегрируемым гамильтонианом, и строим некоторые пределы интегрируемых гамильтонианов, получаемых методом сдвига инвариантов, которые сами таким методом получены быть не могут.

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли и $P(\mathfrak{g})$ — соответствующая алгебра Пуассона, т.е. симметрическая алгебра пространства $\mathfrak{g}$, снабженная стандартной скобкой Пуассона. отождествляя при помощи инвариантного скалярного умножения алгебру $\mathfrak{g}$ с ее дуальным пространством $\mathfrak{g}^*$, мы будем рассматривать элементы алгебры $P(\mathfrak{g})$ как полиномиальные функции на $\mathfrak{g}$.

Метод сдвига инвариантов, восходящий к Манакову [2] и сформулированный и обоснованный в общем виде в работе Мищенко и Фоменко [3], связывает с каждым регулярным элементом $a \in \mathfrak{g}$ некоторую коммутативную (в смысле скобки Пуассона) однородную подалгебру $C(a)$ алгебры $P(\mathfrak{g})$ максимальной возможной степени трансцендентности (равной размерности борелевской подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$). Подалгебра $C(a)$ свободно порождается базисными инвариантами присоединенной группы алгебры $\mathfrak{g}$ и их ненулевыми кратными производными по направлению a . Коммутативные подалгебры такого вида мы будем называть подалгебрами Мищенко–Фоменко.

Если элемент a стремится к сингулярному элементу a_0 таким образом, что подалгебра $C(a)$ стремится к некоторому пределу, то этот предел будет коммутативной однородной подалгеброй с тем же рядом Пуанкаре. Степень трансцендентности предельной подалгебры совпадает с ее размерностью Гельфанда–Кириллова и определяется ее рядом Пуанкаре (см. об этом подробнее ниже). Следовательно, она совпадает со степенью трансцендентности алгебры $C(a)$. Мы также приводим иное доказательство этого факта, дающее алгоритм нахождения базиса трансцендентности предельной подалгебры.

Ситуация, когда элемент a стремится к a_0 , оставаясь в фиксированной картановской подалгебре, была детально исследована в работах автора [1] и Шувалова [4]. В частности, в последней работе было доказано, что в этой ситуации предельная подалгебра всегда свободна и имеет ту же степень трансцендентности, что и $C(a)$. Вопрос о том, не будет ли всегда предельная подалгебра свободной (или хотя бы конечно порожденной), остается открытым.

*Работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-00704.

Мы приведем некоторые примеры пределов подалгебр Мищенко–Фоменко, отличные от тех, которые были рассмотрены в [1], [4], и обсудим проблему описания многообразия всех интегрируемых квадратичных гамильтонианов, получаемых таким путем.

Данная работа была завершена во время моего пребывания в университете Билефельда в мае–июне 2013 г. Я благодарю этот университет за гостеприимство.

§ 1. Формальные пределы однородных подалгебр алгебры многочленов

Предел последовательности однородных подалгебр алгебры многочленов над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, имеющих один и тот же ряд Пуанкаре, может естественным образом пониматься как сумма пределов их однородных компонент в смысле соответствующих грассмановых многообразий. Нам, однако, будет удобнее, несколько сузив это понятие предела, формализовать его, заменив последовательность однородных подалгебр одной подалгеброй в алгебре многочленов над полем формальных рядов Лорана.

Пусть K — некоторое поле. Через $K[t]$, $K[[t]]$ и $K((t))$ мы будем, как обычно, обозначать алгебры многочленов и формальных степенных рядов и поле формальных рядов Лорана с коэффициентами из K .

Для всякого векторного пространства V над полем K положим

$$V[t] = V \otimes K[t], \quad V[[t]] = V \otimes K[[t]], \quad V((t)) = V \otimes K((t)).$$

Отметим, что $V((t))$ — векторное пространство над полем $K((t))$ той же размерности, что и V над полем K . Обозначим через $\mathfrak{v}$ канонический гомоморфизм $V[[t]] \rightarrow V$ («взятие значения в нуле»).

Определение 1. *Формальным пределом* (при $t \rightarrow 0$) подпространства $U(t)$ пространства $V((t))$ называется подпространство

$$U(0) = \mathfrak{v}(U(t) \cap V[[t]])$$

пространства V .

Если пространство $U(0)$ конечномерно, то любые прообразы его базисных векторов в $U(t) \cap V[[t]]$ составляют базис пространства $U(t)$, так что

$$\dim U(0) = \dim U(t).$$

В общем случае прообразы линейно независимых векторов пространства $U(0)$ линейно независимы, так что если пространство $U(0)$ бесконечномерно, то и пространство $U(t)$ бесконечномерно.

Снабдим пространство $V((t))$ *формальной топологией*, приняв за окрестности нуля подмножества вида $t^m V[[t]]$, $m \in \mathbb{Z}$. Из соображений непрерывности ясно, что если подпространство $U(t)$ конечномерно, его формальный предел не изменится при замене базисных векторов достаточно близкими им векторами.

Пусть теперь $A = \bigoplus_{m=0}^{\infty} A_m$ — градуированная алгебра с $A_0 = K$ и $\dim A_m = d_m(A) < \infty$ при всех m . Ее рядом Пуанкаре называется формальный степенной ряд

$$P(A, z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m(A) z^m.$$

В дальнейшем мы будем считать, что A — целостная алгебра, т. е. коммутативная ассоциативная алгебра без делителей нуля.

Если A — конечно порожденная алгебра, то ее ряд Пуанкаре есть ряд Тейлора некоторой рациональной функции, голоморфной в круге $|z| < 1$ и имеющей в 1 полюс порядка, равного степени трансцендентности $\text{tr. deg } A$ алгебры A ; тем самым степень трансцендентности алгебры A определяется ее рядом Пуанкаре.

В любом случае степень трансцендентности алгебры A совпадает с ее размерностью Гельфанда–Кириллова $\text{Dim } A$ [6]. В [5, теорема 4.5] доказано, что если алгебра A вкладывается в конечно порожденную градуированную алгебру (в качестве градуированной подалгебры), то

$$\text{Dim } A = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{k=0}^m d_k(A)}{\log m}.$$

Тем самым и в этом случае степень трансцендентности алгебры A определяется ее рядом Пуанкаре.

Если $B(t) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} B_m(t)$ ($B_m(t) \subset A_m((t))$) — однородная подалгебра $K((t))$ -алгебры $A((t)) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} A_m((t))$, то формальный предел $B(0) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} B_m(0)$ будет однородной подалгеброй алгебры A с тем же рядом Пуанкаре, что и $B(t)$.

В дальнейшем предполагается, что

$$A = K[x_1, \dots, x_n]$$

— алгебра многочленов со стандартной градуировкой. Алгебра $A((t))$ может рассматриваться как алгебра формальных рядов Лорана с коэффициентами из A или как алгебра многочленов над полем $K((t))$.

Если K — поле нулевой характеристики, то многочлены $f_1(t), \dots, f_d(t) \in A((t))$ алгебраически независимы тогда и только тогда, когда их якобиева матрица имеет ранг d (как матрица с элементами из $A((t))$). Отсюда следует, что в пространстве всех наборов из d однородных многочленов заданных степеней алгебраически независимые наборы образуют подмножество, открытое в формальной топологии.

Предложение 1. *Предположим, что K — поле нулевой характеристики и подалгебра $B(t) \subset A((t))$ свободно порождается однородными многочленами $f_1(t), \dots, f_d(t) \in A((t))$, причем предельная подалгебра $B(0) \subset A$ является конечно порожденной. Тогда любые однородные многочлены $\tilde{f}_1(t), \dots, \tilde{f}_d(t) \in A((t))$, достаточно близкие к $f_1(t), \dots, f_d(t)$, свободно порождают подалгебру $\tilde{B}(t)$, имеющую тот же формальный предел, что и $B(t)$.*

Доказательство. Из сказанного выше следует, что если многочлены $\tilde{f}_1(t), \dots, \tilde{f}_d(t)$ достаточно близки к $f_1(t), \dots, f_d(t)$, то они алгебраически независимы и, следовательно, подалгебры $\tilde{B}(t)$ и $B(t)$, а значит, и их предельные подалгебры $\tilde{B}(0)$ и $B(0)$ имеют один и тот же ряд Пуанкаре. Далее, любой однородный элемент подалгебры $B(0)$ есть по определению свободный член некоторого формального степенного ряда из $A[[t]]$, представимого в виде $F(f_1(t), \dots, f_d(t))$, где F — многочлен с коэффициентами из $K((t))$. Если многочлены $\tilde{f}_1(t), \dots, \tilde{f}_d(t)$ достаточно близки к $f_1(t), \dots, f_d(t)$, то $F(\tilde{f}_1(t), \dots, \tilde{f}_d(t))$ тоже будет принадлежать $A[[t]]$ и будет иметь тот же свободный член. Таким образом, можно обеспечить, чтобы любой конкретный однородный элемент подалгебры $B(0)$,

а значит, и любое конечное множество таких элементов принадлежали $\tilde{B}(0)$. В частности, можно обеспечить, чтобы образующие подалгебры $B(0)$ принадлежали $\tilde{B}(0)$; но тогда и вся подалгебра $B(0)$ будет содержаться в $\tilde{B}(0)$ и из равенства рядов Пуанкаре будет следовать, что $B(0) = \tilde{B}(0)$. $\square$

Замечание 1. Формальный предел свободной подалгебры может не быть свободной подалгеброй. Например, формальным пределом свободной подалгебры

$$B(t) = K((t))[x^2 + ty^2, x^3] \subset K((t))[x, y]$$

является, как легко видеть, подалгебра

$$B(0) = K[x^2, x^3, x^4 y^2] \subset K[x, y],$$

не являющаяся свободной.

Замечание 2. Формальный предел конечно порожденной подалгебры может не быть конечно порожденной подалгеброй. Например, формальным пределом подалгебры

$$B(t) = K((t))[x + ty, xy, xy^2] \subset K((t))[x, y]$$

является подалгебра

$$B(0) = K[x, xy, xy^2, xy^3, \dots] \subset K[x, y].$$

Однако мне неизвестно, может ли формальный предел свободной подалгебры не быть конечно порожденной подалгеброй.

Замечание 3. Мне также неизвестно, верно ли и в случае поля положительной характеристики, что в пространстве всех наборов однородных многочленов $f_1(t), \dots, f_d(t) \in A((t))$ заданных степеней алгебраически независимые наборы образуют подмножество, открытое в формальной топологии.

Из предыдущего вытекает

Теорема 1. *Формальный предел $B(0)$ любой однородной подалгебры $B(t) \subset A((t))$ имеет ту же степень трансцендентности (над K), что и $B(t)$ (над $K((t))$).*

Предполагая, что K — поле нулевой характеристики, дадим более конструктивное доказательство этой теоремы.

Доказательство. Рассмотрение младших членов по t показывает, что прообразы в $B(t) \cap A[[t]]$ алгебраически независимых элементов алгебры $B(0)$ алгебраически независимы в $B(t)$. Следовательно, $\text{tr. deg } B(0) \leq \text{tr. deg } B(t)$.

Пусть $\text{tr. deg } B(t) = d$, и пусть $f_1(t), \dots, f_d(t) \in B(t)$ — алгебраически независимые однородные многочлены. Умножая их на подходящие степени t , можно добиться того, чтобы они лежали в $A[[t]]$. Пусть $J(t)$ — их якобиева матрица (относительно $x_1, \dots, x_n$). Существует минор порядка d этой матрицы, не равный нулю. Если он не делится на t , то матрица $J(0)$, являющаяся якобиевой матрицей многочленов $f_1(0), \dots, f_d(0)$, имеет ранг d и, значит, многочлены $f_1(0), \dots, f_d(0)$ алгебраически независимы и $\text{tr. deg } B(0) = d$.

Если все миноры порядка d матрицы $J(t)$ делятся на t , то многочлены $f_1(0), \dots, f_d(0)$ алгебраически зависимы. Пусть

$$F(f_1(0), \dots, f_d(0)) = 0$$

— алгебраическая зависимость наименьшей степени между ними. Пусть для определенности многочлен $f_d(0)$ фактически участвует в этой зависимости, т. е. $\partial_d F \neq 0$. В силу нашего выбора многочлена F имеем

$$(\partial_d F)(f_1(0), \dots, f_d(0)) \neq 0.$$

Это означает, что многочлен $F(f_1(t), \dots, f_d(t))$ делится на t в $A[[t]]$, а многочлен $(\partial_d F)(f_1(t), \dots, f_d(t))$ не делится.

Заменив многочлен $f_d(t)$ на

$$\tilde{f}_d(t) = t^{-1}F(f_1(t), \dots, f_d(t)),$$

мы снова получим алгебраически независимую систему многочленов из $B(t) \cap A[[t]]$. Ее якобиева матрица $\tilde{J}(t)$ получается из $J(t)$ умножением последней строки на $t^{-1}(\partial_d F)(f_1(t), \dots, f_d(t))$ и прибавлением к ней некоторой линейной комбинации предыдущих строк, а миноры порядка d матрицы $\tilde{J}(t)$ получаются из соответствующих миноров матрицы $J(t)$ умножением на $t^{-1}(\partial_d F)(f_1(t), \dots, f_d(t))$. Следовательно, наибольшая степень t , на которую делятся все миноры порядка d якобиевой матрицы, при такой операции уменьшается на 1. Повторив эту операцию несколько раз, мы в конце концов придем к рассмотренной выше ситуации, когда в матрице $J(t)$ имеется минор порядка d , не делящийся на t . $\square$

§2. Пределы подалгебр Мищенко–Фоменко

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли над полем K нулевой характеристики и $P(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_m(\mathfrak{g})$ — ее алгебра Пуассона. Для каждого регулярного элемента $a \in \mathfrak{g}$ будем обозначать через $C(a)$ соответствующую подалгебру Мищенко–Фоменко алгебры $P(\mathfrak{g})$ (см. введение). Это коммутативная однородная подалгебра степени трансцендентности, равной размерности $b(\mathfrak{g})$ борелевской подалгебры алгебры $\mathfrak{g}$.

Пространство $C_k(a)$ однородных элементов степени k алгебры $C(a)$ состоит из k -х дифференциалов инвариантов присоединенной группы в точке a . В частности, $C_1(a)$ совпадает с централизатором $\mathfrak{z}(a)$ элемента a в алгебре $\mathfrak{g}$, размерность которого равна рангу алгебры $\mathfrak{g}$. (Напомним, что мы отождествляем $P_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^* \subset \mathfrak{g}$.) Для описания пространства $C_2(a) \subset P_2(\mathfrak{g})$ удобно интерпретировать элементы пространства $P_2(\mathfrak{g})$ как симметрические операторы в $\mathfrak{g}$; тогда [3, теорема 2.1]

$$C_2(a) = \{S \in P_2(\mathfrak{g}) : \text{ad}(a)S = \text{ad}(b) \text{ для некоторого } b \in \mathfrak{z}(a)\}.$$

Заметим, что из равенства $\text{ad}(a)S = \text{ad}(b)$ (при условии, что S — симметрический оператор) следует, что S коммутирует с $\text{ad}(a)$. При $b = 0$ таким образом получается подпространство $C_1(a)^2 \subset C_2(a)$. Его коразмерность в $C_2(a)$ равна полупростому рангу алгебры $\mathfrak{g}$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(K)$. Матрица A является регулярным элементом алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда ее минимальный многочлен имеет степень n . (В этом случае матрицы $E, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ составляют базис ее централизатора $\mathfrak{z}(A)$.) Предположим, что матрица A регулярна в этом смысле и невырожденна. Тогда $\mathfrak{z}(A) \ni A^{-1}$ и уравнение

$$\text{ad}(A)S = \text{ad}(A^{-1})$$

имеет решение

$$S: X \mapsto -A^{-1}XA^{-1},$$

причем S — симметрический оператор в алгебре $\mathfrak{g}$. Так как матрица A^{-1} может быть любой регулярной невырожденной матрицей, то оператор $X \mapsto PXP$ является интегрируемым квадратичным гамильтонианом для любой регулярной невырожденной матрицы P . Отметим, что соответствующая квадратичная форма на $\mathfrak{g}$ имеет вид $\text{tr}(PX)^2$.

Наряду с алгеброй $\mathfrak{g}$ будем рассматривать алгебру

$$\mathfrak{g}((t)) = \mathfrak{g} \otimes K((t)).$$

Это редуктивная алгебра Ли над полем $K((t))$, и мы можем применить метод сдвига инвариантов к ней. А именно, для любого регулярного элемента $a(t) \in \mathfrak{g}((t))$ определена подалгебра Мищенко–Фоменко

$$C(a(t)) \subset P(\mathfrak{g}((t))) = P(\mathfrak{g})((t)).$$

Это коммутативная однородная подалгебра, степень трансцендентности которой равна $b(\mathfrak{g}((t))) = b(\mathfrak{g})$, и можно рассмотреть ее формальный предел. Допуская некоторую вольность, мы будем обозначать его через $C(a(0))$. Очевидно, что это коммутативная однородная подалгебра алгебры $P(\mathfrak{g})$. Согласно теореме 1, ее степень трансцендентности также равна $b(\mathfrak{g})$.

Заметим, что подалгебра $C(a(t))$ не изменяется при умножении $a(t)$ на любую степень t . Поэтому можно считать, что $a(t)$ — формальный степенной ряд (с коэффициентами из $\mathfrak{g}$) с ненулевым свободным членом.

Если ряд $F(t) \in \mathfrak{g}[[t]]$ принадлежит некоторой подалгебре Мищенко–Фоменко $C(a(t)) \subset P(\mathfrak{g}((t)))$, то его свободный член $F(0)$ по определению принадлежит ее формальному пределу $C(a(0)) \subset P(\mathfrak{g})$ и тем самым является интегрируемым гамильтонианом на алгебре $\mathfrak{g}$.

Замечание 4. Из предложения 1 и соображений, использованных при его доказательстве, следует, что если предельная подалгебра $C(a(0))$ является конечно порожденной, она не изменится при замене ряда $a(t)$ его достаточно большим начальным отрезком. При этом, если $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, формальный предел будет совпадать с обычным пределом.

Замечание 5. Сингулярные элементы алгебры $\mathfrak{g}((t))$ образуют замкнутое алгебраическое подмногообразие, определенное над K . Поэтому, если элемент $a(t)$ этой алгебры — многочлен от t , его регулярность равносильна тому, что $a(t_0)$ — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$ при некотором $t_0 \in K$. Аналогично, если $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и $a(t)$ — степенной ряд, сходящийся в некоторой окрестности нуля, то регулярность элемента $a(t)$ алгебры $\mathfrak{g}((t))$ равносильна тому, что $a(t_0)$ — регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}$ при всех t_0 из достаточно малой проколотой окрестности нуля.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(K)$ и $P \in \mathfrak{g}$ — любая матрица. Рассмотрим элемент $P(t) = P + tQ$ алгебры $\mathfrak{gl}_n[t]$, где Q — какая-нибудь невырожденная регулярная матрица. В двумерном пространстве $\{s_0P + t_0Q : s_0, t_0 \in K\}$ невырожденные регулярные матрицы образуют непустое открытое в топологии Зарисского подмножество, инвариантное относительно умножений на ненулевые элементы

поля K , т. е. дополнение к объединению конечного числа одномерных подпространств. Следовательно, все матрицы вида $P + t_0 Q$, $t_0 \in K$, за исключением конечного числа, регулярны и невырождены. Это означает, что $P(t)$ — невырожденный регулярный элемент алгебры $\mathfrak{g}((t))$.

Согласно примеру 1 в применении к алгебре $\mathfrak{g}((t))$, квадратичный гамильтониан

$$S(t): X(t) \mapsto P(t)X(t)P(t)$$

принадлежит некоторой подалгебре Миценко–Фоменко в $P(\mathfrak{g}((t)))$ и, следовательно, его свободный член

$$S(0): X \mapsto PXP$$

принадлежит ее предельной подалгебре и тем самым является интегрируемым квадратичным гамильтонианом на алгебре $\mathfrak{g}$.

Таким образом, симметрический оператор $S: X \mapsto PXP$ является интегрируемым квадратичным гамильтонианом на алгебре $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(K)$ для любой матрицы P . Если $\text{Ker } P \not\subset \text{Im } P$ (т. е. в жордановой форме матрицы P есть нулевая клетка) и $\text{rk } P > 1$, то этот гамильтониан не входит ни в какую подалгебру Миценко–Фоменко.

В самом деле, предположим, что найдутся такая регулярная матрица A и матрица B , что

$$\text{ad}(A)S = \text{ad}(B). \quad (1)$$

Тогда $\mathfrak{z}(B) \supset \text{Ker } S$; но легко видеть, что если $\text{Ker } P \not\subset \text{Im } P$, то $\text{Ker } S$ порождает алгебру всех матриц (как ассоциативную алгебру). Следовательно, $\text{ad}(B) = 0$ и, значит, $\text{Im } S \subset \mathfrak{z}(A)$. Однако нетрудно проверить, что если $\text{rk } P > 1$, то подпространство $\text{Im } S \subset \mathfrak{gl}_n(K)$ либо некоммутативно, либо (при $P^2 = 0$) имеет слишком большую размерность, чтобы содержаться в централизаторе регулярной матрицы.

Пример 3. Пусть $\mathfrak{g}$ — расщепимая простая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ — простые корни, $e_1, \dots, e_r$ — соответствующие корневые векторы, $f_1, \dots, f_r$ — корневые векторы, отвечающие противоположным корням, и $h_i = [e_i, f_i]$. Мы будем предполагать, что векторы e_i и f_i нормированы таким образом, что $\alpha_i(h_i) = 2$. Пусть, далее, δ — старший корень, e_δ и $e_{-\delta}$ — корневые векторы, отвечающие корням δ и $-\delta$, и $h_\delta = [e_\delta, e_{-\delta}]$, причем $\delta(h_\delta) = 2$. Имеем $h_\delta = \sum_{i=0}^r m_i h_i$, где $m_1, \dots, m_r$ — некоторые натуральные числа.

Положим

$$a(t) = e_{-\delta} + t \sum_{i=0}^r e_i \in \mathfrak{g}[t], \quad b(t) = \sum_{i=0}^r m_i f_i + t e_\delta \in \mathfrak{g}[t].$$

Согласно известному результату Костанта [7], $a(t_0)$ и, аналогично, $b(t_0)$ — регулярные полупростые элементы алгебры $\mathfrak{g}$ при всех $t_0 \in K$, $t_0 \neq 0$. Это означает, что $a(t)$ и $b(t)$ — регулярные полупростые элементы алгебры $\mathfrak{g}((t))$. Кроме того, легко видеть, что $[a(t), b(t)] = 0$. Пусть $S(t)$ — симметрический оператор в $\mathfrak{g}((t))$, удовлетворяющий уравнению

$$\text{ad}(a(t))S(t) = \text{ad}(b(t)). \quad (2)$$

Тогда соответствующий квадратичный гамильтониан принадлежит подалгебре $C(a(t)) \subset P(\mathfrak{g}((t)))$, а квадратичный гамильтониан, соответствующий младшему коэффициенту S ряда $S(t)$, принадлежит ее предельной подалгебре и, значит, является интегрируемым.

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K)$ имеем $b(t) = ta(t)^{-1}$, и одним из решений уравнения (2) является оператор

$$S(t): x(t) \mapsto -t^{-1}(b(t)x(t)b(t))_0,$$

где индекс 0 обозначает проекцию на пространство матриц с нулевым следом (параллельно единичной матрице). Его младший член есть оператор

$$S: x \mapsto -(fxf)_0,$$

где $f = \sum_{i=0}^r f_i$. (Все коэффициенты m_i в данном случае равны 1.) Это по существу гамильтониан того типа, который был описан в предыдущем примере. Было бы интересно найти явный вид гамильтониана S в общем случае, т. е. для произвольной расщепимой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

§3. Многообразие интегрируемых квадратичных гамильтонианов

В этом параграфе мы будем считать, что поле K алгебраически замкнуто.

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли над K и $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ — открытое (в топологии Зарисского) подмножество ее регулярных элементов. Мы докажем, что все квадратичные гамильтонианы, входящие в подалгебры Мищенко–Фоменко $C(a)$, $a \in \mathfrak{g}^{\text{reg}}$, и их формальные пределы образуют неприводимое алгебраическое подмногообразие в $P_2(\mathfrak{g})$.

Пусть $\text{Comm}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ — совокупность пар коммутирующих элементов алгебры $\mathfrak{g}$. Известно [8], что это неприводимое алгебраическое многообразие. Пересечение

$$\text{Comm}^0(\mathfrak{g}) = \text{Comm}(\mathfrak{g}) \cap (\mathfrak{g}^{\text{reg}} \times \mathfrak{g})$$

является его открытым подмножеством.

Обозначим через $M_2^0(\mathfrak{g})$ совокупность всех квадратичных гамильтонианов, входящих в подалгебры $C(a)$, $a \in \mathfrak{g}^{\text{reg}}$, и положим

$$M_2(\mathfrak{g}) = \overline{M_2^0(\mathfrak{g})}$$

(замыкание в топологии Зарисского в $P_2(\mathfrak{g})$). Согласно описанию квадратичных элементов подалгебр Мищенко–Фоменко, приведенному в предыдущем параграфе, $M_2^0(\mathfrak{g})$ есть проекция на $P_2(\mathfrak{g})$ алгебраического многообразия

$$\mathfrak{M}_2^0(\mathfrak{g}) = \{(a, b, S) \in \text{Comm}^0(\mathfrak{g}) \times P_2(\mathfrak{g}) : \text{ad}(a)S = \text{ad}(b)\}.$$

(Здесь элементы пространства $P_2(\mathfrak{g})$ понимаются как симметрические операторы в $\mathfrak{g}$.) Заметим, что многообразие $\mathfrak{M}_2^0(\mathfrak{g})$ неприводимо, так как оно проектируется на неприводимое алгебраическое многообразие $\text{Comm}^0(\mathfrak{g})$ со слоями, являющимися аффинными пространствами. Следовательно, замыкание его проекции на $P_2(\mathfrak{g})$, т. е. $M_2(\mathfrak{g})$, также является неприводимым алгебраическим многообразием, а $M_2^0(\mathfrak{g})$ густо в нем (т. е. содержит непустое открытое подмножество).

Следующая общая лемма показывает, что $M_2(\mathfrak{g})$ — это и есть совокупность квадратичных элементов всех формальных пределов подалгебр Мищенко–Фоменко.

Лемма 1. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — морфизм неприводимых алгебраических многообразий над полем K . Тогда, если $x(t) \in X(K((t)))$ и $\varphi(x(t)) = y(t) \in Y(K[[t]])$, то $y(0) \in \overline{\varphi(X)}$. Обратно, для любой точки $y \in \overline{\varphi(X)}$ найдется такая точка $x(t) \in X(K((t)))$, что $\varphi(x(t)) = y(t) \in Y(K[[t]])$ и $y(0) = y$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\varphi(X(L)) \subset \overline{\varphi(X)}(L)$$

для любого поля $L \supset K$. Кроме того, если $y(t) \in \overline{\varphi(X)}(K[[t]])$, то $y(0) \in \overline{\varphi(X)}$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

При доказательстве второго утверждения можно, во-первых, считать, что $\overline{\varphi(X)} = Y$, т.е. морфизм φ доминантен, и, во-вторых, перейдя к подходящим аффинным картам, — что X и Y являются аффинными многообразиями. При этих предположениях из теоремы о продолжении гомоморфизмов следует, что существует такой дивизор $D \subset Y$, что

$$\varphi(X(L)) \supset Y(L) \setminus D(L) \quad (3)$$

для любого алгебраически замкнутого поля $L \supset K$ (в частности, для $L = K$).

Далее, если $\dim Y > 1$, то существует многочлен $F \in K[Y]$, обращающийся в нуль в данной точке $y \in Y$, но не обращающийся тождественно в нуль ни на одной неприводимой компоненте дивизора D . Заменяя тогда Y на какую-нибудь неприводимую компоненту дивизора $F = 0$, а X — на подходящую неприводимую компоненту ее полного прообраза, можно понизить размерность. Таким образом, достаточно доказать лемму в случае, когда Y — кривая. В этом случае дивизор D состоит из конечного числа точек и $D(L) = D$ для любого поля $L \supset K$.

Итак, пусть Y — (аффинная) кривая. Рассмотрим ее нормализацию $\nu: \tilde{Y} \rightarrow Y$. Пусть $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ — какой-нибудь прообраз точки y . Морфизм ν определяется вложением алгебры $K[Y]$ в алгебру $K[\tilde{Y}]$. Последняя алгебра, в свою очередь, вкладывается в пополнение локальной алгебры точки $\tilde{y}$, которая, как известно, изоморфна $K[[t]]$. Тем самым мы получаем гомоморфизм $K[Y] \rightarrow K[[t]]$, т.е. некоторую точку $y(t) \in Y(K[[t]])$. Очевидно, что $y(0) = y$, но $y(t) \neq y$ и, значит, $y(t) \notin D$. Следовательно, $y(t) \in \varphi(X(L))$, где L — алгебраическое замыкание поля $K((t))$, т.е. поле рядов Пуанкаре. Это означает, что $y(t) = \varphi(x(t))$, где $x(t) \in X(K((t^{1/q})))$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$. Заменяя t на t^q , мы получим требуемую точку из $X(K((t)))$. $\square$

В нашей ситуации лемма применяется к многообразиям $X = \mathfrak{M}_2^0(\mathfrak{g})$, $Y = P_2(\mathfrak{g})$.

Найдем размерность многообразия $M_2(\mathfrak{g})$ для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ ранга r . Для фиксированной картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ обозначим через $M_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ совокупность всех квадратичных гамильтонианов, входящих в подалгебры $C(a)$, $a \in \mathfrak{h}^{\text{reg}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^{\text{reg}}$. Очевидно, что

$$M_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = P_2(\mathfrak{h}) \times N_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),$$

где $N_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ состоит из симметрических операторов вида

$$S(a, b): \mathfrak{h} \rightarrow 0, \quad e_\alpha \mapsto \frac{\alpha(b)}{\alpha(a)} e_\alpha \quad (a \in \mathfrak{h}^{\text{reg}}, b \in \mathfrak{h}). \quad (4)$$

Ясно также, что

$$\dim P_2(\mathfrak{h}) = \frac{r(r+1)}{2}, \quad \dim N_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 2r - 1.$$

Так как полупростые элементы образуют плотное подмножество в $\mathfrak{g}$, то

$$M_2(\mathfrak{g}) = \overline{\text{Ad}(G)M_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})},$$

где G — связная алгебраическая группа, соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что корневые векторы e_α и $e_{-\alpha}$ являются собственными векторами оператора $S(a, b)$ с одним и тем же собственным значением. Поэтому картановская подалгебра $\mathfrak{h}$ однозначно восстанавливается по оператору общего положения из $M_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ как сумма одномерных собственных подпространств. Следовательно,

$$\dim M_2(\mathfrak{g}) = \dim M_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) + \dim \mathfrak{g} - r = \dim \mathfrak{g} + \frac{r^2 + 3r - 2}{2}.$$

Пример 4. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ получаем $\dim M_2(\mathfrak{g}) = 4$. Далее, всякий оператор $S \in M_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ в этом случае действует на ортогональном дополнении $\mathfrak{h}^\perp$ к картановской подалгебре скалярно. Отсюда следует, что $M_2(\mathfrak{g})$ есть замыкание множества полупростых симметрических операторов, имеющих кратное собственное значение. Операторы $S \in M_2(\mathfrak{g})$ могут быть охарактеризованы тем, что E, S, S^2 линейно зависимы (т. е. степень минимального многочлена не больше 2). Помимо полупростых операторов, $M_2(\mathfrak{g})$ содержит операторы, имеющие единственное (трехкратное) собственное значение и жордановы клетки порядков 2 и 1.

Положим

$$M_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \overline{M_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}, \quad N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \overline{N_2^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})}.$$

Ясно, что

$$M_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = P_2(\mathfrak{h}) \times N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$$

и что $N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ есть $(2r - 1)$ -мерное неприводимое подмногообразие в пространстве $D(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ диагональных (в базисе из корневых векторов) симметрических операторов в $\mathfrak{h}^\perp$. (Симметричность здесь означает равенство диагональных элементов, отвечающих противоположным корням.)

Пример 5. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(K)$ очевидно, что $N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = D(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Отметим, однако, что уже в этом случае многообразие $M_2(\mathfrak{g})$ содержит операторы, сохраняющие $\mathfrak{h}$, но не принадлежащие $M_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Пример 6. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3(K)$ имеем $\dim N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \dim D(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 3$, так что $N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = D(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Пример 7. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(K)$ имеем $\dim N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 5$, в то время как $\dim D(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = 6$, так что $N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ — гиперповерхность в $D(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Найдем ее уравнение.

Корневыми векторами в данном случае являются матричные единицы E_{ij} ($i \neq j$). Пространство $D(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ состоит из операторов вида

$$E_{ij} \mapsto p_{ij}E_{ij} \quad (p_{ij} = p_{ji} \in K).$$

Если $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = \text{diag}(b_1, b_2, b_3, b_4)$, то для оператора $S(a, b)$, задаваемого формулой (4), имеем

$$p_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j}. \quad (5)$$

Так как $\text{tr } a = 0$, то матрица a определяется числами

$$a_{12} = a_1 - a_2, \quad a_{23} = a_2 - a_3, \quad a_{34} = a_3 - a_4.$$

Аналогично, матрица b определяется числами

$$b_{12} = b_1 - b_2, \quad b_{23} = b_2 - b_3, \quad b_{34} = b_3 - b_4.$$

Уравнения (5) переписываются в виде

$$\begin{aligned} b_{12} &= p_{12}a_{12}, \quad b_{23} = p_{23}a_{23}, \quad b_{34} = p_{34}a_{34}, \\ b_{12} + b_{23} &= p_{13}(a_{12} + a_{23}), \quad b_{23} + b_{34} = p_{24}(a_{23} + a_{34}), \\ b_{12} + b_{23} + b_{34} &= p_{14}(a_{12} + a_{23} + a_{34}). \end{aligned}$$

После исключения b_{12} , b_{23} , b_{34} получаем равенства

$$\begin{aligned} p_{12}a_{12} + p_{23}a_{23} &= p_{13}(a_{12} + a_{23}), \\ p_{23}a_{23} + p_{34}a_{34} &= p_{24}(a_{23} + a_{34}), \\ p_{12}a_{12} + p_{23}a_{23} + p_{34}a_{34} &= p_{14}(a_{12} + a_{23} + a_{34}), \end{aligned}$$

на которые можно смотреть как на систему однородных линейных уравнений относительно a_{12} , a_{23} , a_{34} . Эта система должна иметь ненулевое решение (так как $a \in \mathfrak{h}^{\text{reg}}$). Приравнявая нулю ее определитель, после несложного вычисления получаем уравнение

$$\sum_{(i,j,k,l)} \text{sgn}(i, j, k, l) p_{ij} p_{jk} p_{kl} = 0, \quad (6)$$

где суммирование идет по всем перестановкам (i, j, k, l) чисел 1, 2, 3, 4.

Многочлен от 6 переменных, стоящий в левой части этого уравнения, однороден по совокупности переменных и имеет по каждой из них степень 1. Пользуясь этим и соображениями симметрии, легко доказать его неприводимость. Отсюда следует, что уравнение (6) задает в точности многообразие $N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

В общем случае даже описание многообразия $N_2(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ является сложной задачей. Кроме того, к этому не сводится описание многообразия $M_2(\mathfrak{g})$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Э. Б. Винберг, *О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры*, Изв. АН СССР, сер. матем., **54**:1 (1990), 3–25.
- [2] С. В. Манаков, *Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n -мерного твердого тела*, Функц. анализ и его прил., **10**:4 (1976), 93–94.
- [3] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, *Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли*, Изв. АН СССР, сер. матем., **42**:2 (1978), 396–415.
- [4] В. В. Шувалов, *О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли*, Функц. анализ и его прил., **36**:4 (2002), 55–64.
- [5] W. Borho, H. Kraft, *Über die Gelfand-Kirillov-Dimension*, Math. Ann., **220**:1 (1976), 1–24.
- [6] I. M. Gelfand, A. A. Kirillov, *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., **31** (1966), 5–19.

- [7] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math., **81** (1959), 973–1032.
- [8] R. W. Richardson, *Commuting varieties of semisimple Lie algebras and algebraic groups*, Compositio Math., **38**:3 (1979), 311–327.

Московский государственный университет,
механико-математический факультет
e-mail: vinberg@zebra.ru

Поступило в редакцию
5 января 2014 г.