Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, М. И. Граев, Когомологии в неунитарных представлениях полупростых групп Ли (группа $U(2, 2)$), *Функци. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 3, 1–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3144>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:02:01

УДК 517.5

Когомологии в неунитарных представлениях полупростых групп Ли (группа $U(2, 2)$)*

© 2014. А. М. ВЕРШИК, М. И. ГРАЕВ

К столетию со дня рождения Израэля Моисеевича Гельфанда

Предлагается метод построения особых неунитарных представлений полупростых групп Ли с помощью представлений подгрупп Ивасава. В качестве характерного примера изучается группа $U(2, 2)$.

§1. Введение: обзор теории особых представлений

1.1. Группы токов и особые представления. Группой токов G^X , где X — топологическое пространство с вероятностной борелевской мерой m , а G — произвольная локально компактная группа, называется группа непрерывных отображений $X \rightarrow G$ с поточечным умножением и с тем или иным условием интегрируемости по мере. Изучение представлений групп токов инициировано как самой теорией представлений, так и приложениями к математической физике. Хорошо известная модель неприводимых представлений групп токов G^X — фоковская, или гауссовская, в которой существенную роль играют ненулевые 1-когомологии группы коэффициентов (группы G) со значениями в неприводимых унитарных представлениях этой группы. Такое неприводимое представление T группы G в гильбертовом пространстве H обладает нетривиальным 1-коциклом, т. е. непрерывным отображением $b: G \rightarrow H$, удовлетворяющим условию

$$b(g_1 g_2) = T(g_1)b(g_2) + b(g_1) \quad \text{для любых } g_1, g_2 \in G$$

и условию нетривиальности: не существует вектора $\xi \in H$, такого, что $b(g) = T(g)\xi - \xi$ для любого $g \in G$. Такие представления называются *особыми*. Единичное представление является особым для всех групп с нетривиальными комплексными аддитивными характеристиками, поскольку комплексный аддитивный характер и является нетривиальным 1-коциклом в одномерном единичном комплексном представлении.

В других терминах особое представление характеризуется существованием *почти инвариантных векторов*; последнее означает, что для всякого $\epsilon > 0$ и любого компакта K в группе G существует такой вектор h в пространстве представления, что $\|U_k h - h\| < \epsilon$ для всех $k \in K$; здесь U_k — оператор представления, отвечающий элементу k .

По теореме [1] всякое особое представление компактно порожденной группы обязано быть не отделимым по Хаусдорфу от единичного представления в топо-

*А. М. В. поддержан грантами РФФИ 14-01-00373 и ОФИ_м 13-01-12422. М. И. Г. поддержан грантом РФФИ 13-01-00190а.

логии Фелла. Топология Фелла на пространстве унитарных представлений локально компактной группы G задается следующим образом: открытая окрестность представления π в гильбертовом пространстве H определяется числом ϵ , конечным набором $h_1, \dots, h_k$ элементов пространства H и компактом K группы G и состоит из всех унитарных представлений ρ группы G , в пространстве которых найдутся такие элементы $f_1, \dots, f_k$, что

$$\sup_{i=1, \dots, k; g \in K} \{ |\langle \pi(g)h_i, h_i \rangle - \langle \rho(g)f_i, f_i \rangle| < \epsilon \}.$$

Обратное утверждение неверно: не всякое представление, не отделимое от единичного, является особым, т. е. имеет нетривиальные первые когомологии.

В работе [2] Шалом доказал гипотезу, высказанную в [1]: если у локально компактной группы единичное представление не изолировано в множестве всех неприводимых унитарных представлений (т. е. группа не обладает свойством Каждана T), то хотя бы одно особое представление существует. Доказательство основной теоремы в [2] (см. также [3, теорема 3.2.1]) неконструктивно и поэтому не дает прямого способа нахождения особого представления: мы очень мало знаем о том, как выделить особые представления из множества всех представлений, не отделимых от единичного представления (или «приклеенных» к нему).

Принята следующая терминология: *корой (core) данного представления* π называется множество таких представлений ρ , что произвольные открытые окрестности представлений π и ρ имеют непустое пересечение. В кору регулярного представления аменабельной группы входят все неприводимые представления, и это характеристика аменабельности. Особенно важно использование этого понятия для неприводимых представлений и, в частности, для единичного представления. Если не оговорено противное, то *корой группы* называется кора ее единичного одномерного представления¹⁾.

Ненулевые когомологии со значениями в представлении называются редуцированными [2], если соответствующий коцикл не является пределом тривиальных коциклов. Редуцированные когомологии существуют только в представлениях, лежащих в коре, но не лежащих в подкорке. Для полупростых групп $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ нетривиальные когомологии редуцированы. Существуют ли разрешимые группы с этим условием, авторам неизвестно. Наконец, упомянем для полноты еще одно любопытное понятие — группы со свойством Хагерупа ([3], [4]): это группы с неизолированным единичным представлением (т. е. не обладающие свойством Каждана), но у которых коциклы в особом представлении удовлетворяют специальному свойству невырожденности: коцикл как отображение группы в гильбертово пространство

$$\beta: G \rightarrow H$$

¹⁾ Более детальная терминология: представления, лежащие в коре единичного представления, называются *бесконечно малыми* (в смысле, аналогичном лейбницевскому; см. [1]), *подкоркой данного представления* π называется множество всех представлений ρ , в замыкании которых лежит представление π (соответственно *подкоркой* группы называется подкорка ее единичного представления). В других терминах это означает, что ρ слабо содержит π (в частности, единичное представление). Подкорка есть, очевидно, подмножество коры. Интерпретация введенных понятий в терминах хаусдорфовых аксиом *отделимости* единичного представления и некоторого представления ρ такова: единичное представление лежит в коре представления ρ , если не выполнена аксиома отделимости T_2 ; для точек подкорки не выполнена даже аксиома отделимости T_1 , но аксиома T_0 выполнена всегда, так как единичное представление замкнуто.

является собственным, т. е. прообраз ограниченного множества гильбертова пространства предкомпактен в группе. Этим свойством обладают все аменабельные группы, свободные группы [4], группы $O(n, 1)$, $U(n, 1)$ и др. (см. [5]). Примеры групп, не обладающим ни свойством Каждана, ни свойством Хагерупа, пока изучены недостаточно.

1.2. Особые представления групп ранга 1 и их разрешимых подгрупп. Из наиболее важных групп Ли — полупростых — только группы $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$, имеющие ранг 1, обладают особыми представлениями. Остальные полупростые группы (включая, как доказал Костант [6], даже группы $Sp(n, 1)$ ранга 1) обладают свойством Каждана: их единичное представление изолировано и фоковская модель построения групп токов неприменима. Заметим, что до сих пор теорема Костанта о $Sp(n, 1)$ не имеет геометрического доказательства.

Можно сказать, что анализ представлений групп токов для групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ достаточно хорошо развит. Работы в этом направлении начались с пионерских работ И. М. Гельфанда и авторов этой статьи, см. [7]–[9]. Общая схема фоковской модели, независимо от конкретной группы, была ранее рассмотрена Араки [14], см. [15], однако примеров полупростых групп до работы [7] не было. В этих работах, а также в работах [10]–[13] были найдены условия неприводимости представлений групп токов и другие их свойства. Принципиальное значение имели идеи работы [9], в которой для групп ранга 1 был предложен метод сведения задачи к разрешимой подгруппе полупростой группы на примере $SL(2, R)$. Развитие этой идеи в работах авторов данной статьи последних 10 лет привело к новым моделям представлений групп токов, эквивалентным фоковской, но построенным по другим (негауссовским) мерам Леви (см. [16], [17]). Это привело к построению интегральной, а затем пуассоновой и квазипуассоновой моделей представлений групп токов ([18], [19]). Возникла также так называемая бесконечномерная мера Лебега ([22]–[24]), являющаяся наиболее точным непрерывным аналогом лебеговой меры на конечномерном положительном октанте. Эта мера тесно связана с гамма-процессом Леви и представляет большой самостоятельный интерес.

1.3. Разрешимые подгруппы полупростых групп и уточнение разложения Ивасава. Известно, что для коммутативных и нильпотентных групп особые представления исчерпываются единичным представлением (см. [11], [12]). Но уже для разрешимых групп эта проблема исследована недостаточно. Нас интересует конкретный класс разрешимых групп, являющихся подгруппами групп $O(p, q)$, $U(p, q)$ и, в качестве первого примера, группы $U(2, 2)$. Мы работаем с ее разрешимой подгруппой, которую следует называть *группой Ивасава*. Такая подгруппа может быть определена в произвольной связной полупростой вещественной группе Ли (см. [25], где она названа максимальной связной треугольной подгруппой). Разложение Ивасава для групп состоит в том, что эта подгруппа является «дополнительной» к максимальной компактной подгруппе.

Разрешимая подгруппа (как и всякая аменабельная группа) обладает особым представлением, и поэтому возможна следующая стратегия построения представлений групп токов полупростой группы: сначала найти особое, унитарное или неунитарное, представление этой разрешимой подгруппы и построить представление ее группы токов, а затем пытаться продолжить особое представление на всю полупростую группу и конструировать продолжение представления на ее группу токов. Для групп ранга 1 этот прием, как отмечено выше, впервые

использован для $SL(2, R)$ в [9] и позднее исследован подробно в цикле работ авторов последних лет ([18], [19]). При переходе от групп ранга 1 к группам большего ранга эта идея построения по-прежнему остается рабочей.

Мы рассматриваем здесь этот вопрос на конкретном примере группы $U(2, 2)$, имея в виду и более общую ситуацию, которая будет изложена в другом месте. Мы подробно описываем здесь подгруппу Ивасава (группа P далее) для этого случая. Первый вопрос — каковы ее особые представления? Но здесь мы сталкиваемся с новой проблемой: для реализации нашего плана необходимо, чтобы это особое представление подгруппы Ивасава было точным¹. Авторам неизвестно, для каких групп это имеет место. Например, для нильпотентных групп точного особого представления не существует. Этот факт представляет интерес уже для группы Гейзенберга, и он эквивалентен одной из форм принципа неопределенности². Для аффинной группы $\text{Aff}(\mathbb{R})$ бесконечномерное представление (квазиэквивалентное регулярному) является точным особым представлением. Но уже для самых простых трехмерных разрешимых групп (в частности, группы S , см. далее) вопрос нетривиален.

Проблема. Для каких групп существует точное неприводимое унитарное особое представление и, в частности, для каких разрешимых групп? Более конкретно: когда существует такое представление для группы Ивасава полупростой вещественной группы Ли?

Таким образом, главная трудность лежит в построении точного особого представления группы Ивасава, унитарного или нет. *Построение неунитарного точного особого представления для группы $U(2, 2)$ есть основной результат этой работы*, и авторы не сомневаются, что такое построение можно провести для любой вещественной полупростой группы. Продолжение коцикла на всю полупростую группу и построение группы токов становятся возможными, потому что, как показывают результаты упоминавшихся выше работ, имеются модели (например, пуассонова модель — в отличие от фоковской модели) представления групп токов, которые никак не используют унитарность исходного представления. Вопрос о том, можно ли это сделать в унитарном представлении подгруппы Ивасава, пока остается открытым.

В заключение этого обзора укажем на несколько иной путь, который ближе к первоначальным работам по группам токов и к классическим работам по теории представлений полупростых групп. Он состоит в следующем. Хорошо известно, что особые представления полупростых групп ранга 1 лежат «в хвосте» дополнительных серий, а дополнительные серии есть у любой полупростой группы. Однако для групп ранга, большего 1, унитарные представления «не доходят» до единичного представления; более точно, унитарность теряется при деформации единичного представления. С другой стороны, известно, что в некоторых случаях для этих неунитарных представлений можно указать незнакоопределенную билинейную форму, инвариантную относительно действия группы. Свойства соответствующего пространства с индефинитной метрикой в этом случае плохо изучены, и вопрос об особом представлении, пусть и неунитарном, по-видимому,

¹Точное (или невырожденное) представление — это представление, ядро которого тривиально.

²Беседы первого автора с В. П. Хавиным на эту тему показали, что упомянутый факт о группе Гейзенберга, как будто, не имеет пока чисто аналитического (не представленческого) доказательства.

ранее не ставился. Наш альтернативный план состоит в аналитическом продолжении унитарных представлений подгруппы Ивасава и, в частности, в построении неунитарного особого представления на этой основе. Возможно, что указанные два подхода к теории представлений групп токов для полупростых групп ранга, большего 1, приведут к различным классам представлений.

§2. Группа $U(2, 2)$ и ее подгруппа Ивасава

2.1. Описание группы $U(2, 2)$. В качестве первоначального примера мы рассматриваем группу $U(2, 2)$ линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^4$, сохраняющих фиксированную эрмитову форму с сигнатурой $(2, 2)$; здесь выбрана эрмитова форма вида

$$x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_3 + x_2\bar{x}_4 + \bar{x}_2x_4.$$

Группа $U(2, 2)$ является одним из самых простых примеров полупростой группы Ли, вещественный ранг которой больше единицы (равен двум). Группы вида $U(p, q)$ называют псевдоунитарными. В настоящем параграфе мы уточняем разложения Ивасава для группы $U(2, 2)$ и изучаем структуру главного объекта — разрешимой подгруппы Ивасава P .

Мы будем представлять элементы g группы $U(2, 2)$ в форме блочных 2×2 -матриц с блоками — матрицами второго порядка,

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

(где g_{ij} — комплексные матрицы порядка 2), удовлетворяющих соотношению

$$g\sigma g^* = \sigma, \quad \text{где } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь e_2 — единичная 2×2 -матрица, а символ $*$ обозначает в комплексном случае матричное транспонирование совместно с сопряжением, а в вещественном — только транспонирование.

Эти соотношения эквивалентны следующим соотношениям между блоками матрицы g :

$$g_{12}g_{21}^* + g_{11}g_{22}^* = e_2, \quad g_{11}g_{12}^* + g_{12}g_{11}^* = 0, \quad g_{22}g_{21}^* + g_{21}g_{22}^* = 0.$$

Вещественная размерность группы $U(2, 2)$ равна 16. Главную роль в дальнейшем будет играть *разрешимая подгруппа P группы $U(2, 2)$, порожденная следующими двумя подгруппами N и S :*

(1) аддитивной (коммутативной) группой N косоэрмитовых блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} e_2 & 0 \\ n & e_2 \end{pmatrix},$$

где n — косоэрмитова матрица второго порядка: $n + n^* = 0$, и

(2) разрешимой подгруппой S ранга разрешимости 2 блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} s^{*-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где s — нижнетреугольная комплексная матрица с положительными элементами на диагонали:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ r & r_2 \end{pmatrix}, \quad r_1, r_2 > 0, r \in \mathbb{C}.$$

В дальнейшем мы иногда будем писать $s \in S$, имея в виду, что группе S принадлежит матрица вида (1).

Группы S и N имеют вещественную размерность 4, а группа P — вещественную размерность 8.

Общий вид элемента группы P таков:

$$\begin{pmatrix} s^{*-1} & 0 \\ X & s \end{pmatrix}$$

(мы будем иногда записывать его как пару (s, X)), где X — матрица второго порядка, удовлетворяющая условию, которое можно было назвать *относительной косоэрмитовостью* (относительно матрицы s):

$$sX^* + Xs^* = 0. \quad (2)$$

Непосредственно проверяется следующее утверждение:

Предложение 1. *Группа $U(2, 2)$ алгебраически порождена элементами группы P и инволюцией σ ; группы N и S пересекаются только по единичному элементу.*

Однородное пространство $U(2, 2)/K$, где K — максимальная компактная подгруппа группы $U(2, 2)$, и есть в точности пространство подгруппы P , чем и оправдано название «подгруппа Ивасава». (Это дает в дальнейшем возможность продолжения коцикла с подгруппы P на всю группу $U(2, 2)$.)

Поскольку группа S , очевидно, действует на аддитивной группе N косоэрмитовых матриц по правилу

$$n \mapsto sns^*, \quad s \in S, n \in N,$$

можно определить групповое полупрямое произведение $Q = S \ltimes N$ групп S и N . Непосредственно проверяется следующее важное утверждение:

Теорема 1. *Группы P и Q канонически изоморфны; изоморфизм $I: P \rightarrow Q$ задается формулой*

$$I: (s, X) \rightarrow (s, Xs^*),$$

где левая часть есть элемент подгруппы $P \subset U(2, 2)$, а правая — элемент полупрямого произведения Q (матрица Xs^* , очевидно, косоэрмитова). Обратный изоморфизм таков: $(s, n) \rightarrow (s, ns^{*-1})$, где n косоэрмитова.

Доказательство. Проверка гомоморфности умножения:

$$\begin{aligned} I((s_1, X_1) \circ (s_2, X_2)) &= I(s_1 s_2, X_1 s_2^{*-1} + s_1 X_2) \\ &= (s_1 s_2, X_1 s_1^* + s_1 X_2 s_2^* s_1^*) = I(s_1, X_1) I(s_2, X_2). \end{aligned} \quad \square$$

Отображение I переводит группу P в группу, матричная реализация которой состоит из совокупности пар (s, X) , удовлетворяющих соотношению (2). Поэтому изоморфизм полупрямого произведения подгрупп S и N , т. е. группы Q , с его матричной реализацией, т. е. с группой P , не есть прямое произведение тождественного изоморфизма подгруппы S и тождественного изоморфизма

нормального делителя N . Тем не менее группа P есть полупрямое произведение $S \ltimes N$ групп S и N .¹⁾

Общий вид блока элементов коммутанта группы S в обозначениях, принятых выше, таков:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix},$$

где r — комплексное число. Ранг разрешимости группы S равен 2. Таким образом, коммутант группы P есть полупрямое произведение группы $\mathbb{C}$ и коммутативной группы косозермитовых матриц (с нетривиальным действием $\mathbb{C}$).

Следствие 1. Ранг разрешимости группы P равен трем.

2.2. Представления подгруппы Ивасава и почти инвариантные меры. Наша цель состоит в изучении особого представления подгруппы P и последующего продолжения его на всю группу $U(2, 2)$. Мы будем изучать представления группы P как полупрямого произведения.

Группа N изоморфна группе всех своих непрерывных характеров $\hat{N}$, а группа S действует сопряженными автоморфизмами на группе характеров $\hat{N}$; при этом прямое и сопряженное действия на группе N (если ее отождествить с ее сопряженной) совпадают:

$$n \rightarrow sns^*, \quad \chi \rightarrow \chi_s, \quad \text{где } \chi_s(n) = \chi(sns^*).$$

Предложение 2. Имеется четыре орбиты положительной меры действия группы S автоморфизмами на группе $\hat{N}$ (и на группе N): они параметризуются знаками мнимой части диагональных элементов, т.е. являются соответственно орбитами элементов

$$\begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}.$$

На каждой орбите действие группы S является свободным и точным; поэтому каждую из орбит можно отождествить с группой S , а действие совпадает с действием правыми сдвигами группы на себе.

Заметим, что имеются также орбиты меньшей размерности, имеющие меру нуль, но они нам не понадобятся.

Очевидно, что все четыре действия группы S на невырожденных орбитах топологически изоморфны, а соответствующие представления полупрямого произведения отличаются лишь коциклом со значениями в $\mathbb{Z}_2$, на который умножаются мультипликаторы; поэтому достаточно рассмотреть лишь одну (любую) орбиту.

Унитарное представление полупрямого произведения группы на коммутативную группу (у нас $P = S \ltimes N$) канонически реализуется следующим образом.

¹⁾ В случае группы ранга 1 матричная реализация подгруппы Ивасава несколько проще; например, для группы $SL(2)$ подгруппа Ивасава P есть подгруппа треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ n & s \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{R},$$

и структура полупрямого произведения согласована с обычным матричным представлением, поскольку группа как множество есть прямое произведение нормального делителя, состоящего из матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$, и подгруппы матриц вида $\begin{pmatrix} s^{-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$.

Рассмотрим вероятностную меру μ на группе характеров (т.е. на группе $\hat{N}$), квазиинвариантную относительно действия (группы S). Все такие меры эквивалентны, поскольку группа S локально компактна и действует транзитивно. Поэтому в гильбертовом пространстве $L^2_\mu(\hat{N})$ можно определить унитарные представления группы P , индуцированные действием S , и представление группы N мультипликаторами, т.е. операторами умножения (на характеры группы $\hat{N}$, совпадающей с исходной группой N). Общие представления реализуются в векторнозначном пространстве $L^2_\mu(\hat{N})$, но мы их не рассматриваем.

Неприводимость приведенного представления полупрямого произведения равносильна эргодичности меры μ , и в силу сказанного выше можно было бы считать, что орбита есть сама группа S , т.е. рассматривать представление группы S в пространстве $L^2_\mu(S)$ по некоторой квазиинвариантной мере μ относительно правого действия группы.

Такие представления принадлежат коре группы P — это следует из того, что они в совокупности квазиэквивалентны регулярному представлению группы P , которое (в силу аменабельности группы S) слабо содержит единичное представление. Кроме того, коре принадлежит единичное представление, а также особые представления группы S , которые можно рассматривать как представления группы P , поскольку $S = P/N$. Исчерпывается ли кора этим списком, неизвестно, как неизвестно, являются ли построенные четыре представления особыми для группы P , иначе говоря, есть ли в них почти инвариантный вектор. Но сначала выясним структуру особых представлений группы S .

Лемма 1. *Группа S имеет континуум особых унитарных представлений, параметризуемых точками из $\mathbb{C}$, лежащими на единичной окружности (характерами). Точных особых представлений у группы S нет.*

Доказательство. Аффинная группа $\text{Aff}(\mathbb{R})$, т.е. группа матриц

$$\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ b & e^{-a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{R},$$

является группой Ивасава для $SL(2, \mathbb{R})$ и играет для нее ту же роль, что и группа P для группы $U(2, 2)$. Заметим, что как подгруппа группы $SL(2, \mathbb{R})$ она есть полупрямое произведение $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}$, согласованное с матричным представлением. Как сказано выше, у нас это не так. Особые унитарные точные представления группы $\text{Aff}(\mathbb{R})$ существуют (их два) и продолжаются до особого представления группы $SL(2, \mathbb{R})$.

Рассмотрим группу матриц

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ r & r_2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{C}, \quad r_1 > 0, \quad r_2 > 0. \quad (3)$$

Заметим, что если фиксировать детерминант матрицы ($= r_1 \cdot r_2$) и характер на группе $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, лежащий на окружности, то полученная подгруппа изоморфно отображается на группу $\text{Aff}(\mathbb{R})$ и поэтому все особые представления группы $\text{Aff}(\mathbb{R})$ поднимаются до особых представлений группы S ; ни одно из них не является точным; других особых представлений у этой группы нет. $\square$

Однако нас интересует не столько группа S , сколько группа P . Гипотетически, особые унитарные представления группы P можно построить, используя особые (неточные) представления группы S вместе с представлениями группы

P , построенными выше. Пока вопрос об их существовании открыт. Для полноты картины опишем модель гильбертова пространства особого унитарного представления для группы $SL(2, \mathbb{R})$ и ее треугольной подгруппы P . Рассмотрим пространство $L_m^2(\mathbb{R}_+)$ (m — мера Лебега на полупрямой). Удобнее перейти к преобразованию Фурье, и тогда нужное представление треугольной подгруппы (записанной в виде группы преобразований $x \mapsto e^\beta x + a$, $\beta, a \in \mathbb{R}$) реализуется в $L_{\hat{m}}^2(\mathbb{R})$ ($\hat{m}$ — лебегова мера на прямой) следующим образом:

$$(U_{a,\beta}F)(z) = \exp\{iae^z\}F(z + \beta), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Почти инвариантный вектор в этой модели есть произвольная функция f , удовлетворяющая для любых заданных $t, a, b \in \mathbb{R}$ условиям

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \text{если } x > t \in \mathbb{R}; \quad f \notin L_{\hat{m}}^2(\mathbb{R}); \\ (1 - \exp\{ie^zb\})f &\in L_{\hat{m}}^2(\mathbb{R}); \quad f(\cdot) - f(\cdot + a) \in L_{\hat{m}}^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Другое более распространенное описание особого представления (см. [7]) в пространстве аналитических функций связано с пределом представлений дополнительной серии при стремлении к единичному представлению.

2.3. Почти инвариантные меры и неунитарные представления. Назовем меру ν на группе S *почти инвариантной (справа)*, если она бесконечна, абсолютно непрерывна относительно правой меры Хаара на группе S (и, тем самым, квазиинвариантна относительно правых сдвигов $s \mapsto ss_0$) и все ее производные $d\nu(ss_0)/d\nu(s)$ определены и ограничены для любого $s_0 \in S$. (В силу указанного изоморфизма $S \rightarrow H$, где H — произвольная невырожденная S -орбита на группе характеров $\hat{N}$, это определение переносится на меры, сосредоточенные на любой из невырожденных орбит группы $\hat{N}$).

Условию почти инвариантности удовлетворяет, конечно, и мера Лебега на S , т.е. $ds = ds_{11}ds_{22}ds_{21}d\bar{s}_{21}$, поскольку $d(ss_0) = \pi(s)ds$, где $\pi(s) = s_{11}^3s_{22}$. Отсюда следует, что этому условию удовлетворяет любая мера вида $d\nu(s) = u(s)ds$, где $u(s)$ — произвольная функция, такая, что отношение $u(ss_0)/u(s)$ — ограниченная функция при любом $s_0 \in S$. В частности, ему удовлетворяет мера μ , инвариантная относительно правых сдвигов (мера Хаара):

$$d\mu(s) = \pi^{-1}(s)ds, \quad \pi(s) = s_{11}^3s_{22}.$$

Однако нам будет удобнее рассмотреть иную меру.

Пусть на пространстве X действует группа G и на X заданы две эквивалентные квазиинвариантные относительно действия группы G меры μ и ν . Предположим, что плотность одной меры по другой отделена от бесконечности и от нуля. Рассмотрим в пространствах $L_\mu^2(X)$ и $L_\nu^2(X)$ представления группы G , порожденные подстановками переменной $(U_gf)(\cdot) = f(g\cdot)$, и представления группы мультипликаторов, по модулю равных единице. Таким образом, мы получаем представления скрещенного произведения группы мультипликаторов и группы G . Хорошо известная изометрия между пространствами $L_\mu^2(X)$ и $L_\nu^2(X)$, состоящая в умножении функции на квадратный корень из плотности одной меры по другой, коммутирует с мультипликаторами, но не коммутирует, вообще говоря, с действием группы. Эта изометрия широко используется для того, чтобы подправить действие; например, если одна из мер инвариантна

и, тем самым, определяет унитарное представление упомянутого скрещенного произведения, то и подправленное действие тоже становится унитарным.

Пусть ν — почти инвариантная мера на H . Рассмотрим неунитарное представление группы P в гильбертовом пространстве $L^2_\nu(S)$, т.е. пространстве функций F на S с нормой $\|F\|^2 = \int_S |F(s)|^2 d\nu(s) < \infty$. По определению операторы представления подгрупп N и S задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} (T(n)F)(s) &= \chi_k(n, s)F(s) & \text{при } n \in N, \\ (T(s_0)F)(s) &= F(ss_0) & \text{при } s_0 \in S. \end{aligned}$$

Здесь $\chi_k(n, s)$ есть образ характера $\chi(\cdot) \in \hat{N}$ как функции на S при (единственном) изоморфизме S -орбиты в $\hat{N}$ с номером $k = 1, 2, 3, 4$ и группы S , сохраняющем действие S ; различие между четырьмя орбитами сводится к умножению образа на $\pm i$ по каждой из переменных. Из определения следует, что операторы $T(n)$ унитарны, а операторы $T(s_0)$ ограничены в силу почти инвариантности меры ν . Можно переписать формулы более компактно:

$$\begin{aligned} (T(n)f)(s) &= \chi(sns^*)f(s) & \text{при } n \in N, \\ (T(s_0)f)(s) &= f(ss_0) & \text{при } s_0 \in S, \end{aligned}$$

где χ — некоторый фиксированный характер S -орбиты H на группе характеров $\hat{N}$.

Нетрудно убедиться, что операторы представления подгрупп N и S порождают в совокупности представление всей группы P в пространстве $L^2_\nu(S)$. В частности, если $\nu = \mu$ — мера Хаара на S , это представление унитарно. Обозначим эти представления группы P через π_k , $k = 1, 2, 3, 4$; мы опускаем индекс k , поскольку все четыре представления в существенном различаются между собой лишь выбором характера на орбитах.

Теорема 2. *Неунитарные представления π группы P , определенные выше, операторно и пространственно неприводимы. При этом представления, отвечающие разным мерам и разным индексам k пространственно (т.е. унитарно) эквивалентны тогда и только тогда, когда меры отличаются множителем ($\nu' = c\nu$), а индексы k совпадают.*

2.4. Точное неунитарное особое неприводимое представление группы Ивасава. Изучим вопрос о том, как зависят кохомологии группы со значениями в пространстве $L^2_\nu(X)$ от почти инвариантной меры ν . Подчеркнем, что замена меры на эквивалентную и, в частности, унитаризация представлений (см. выше) не индуцируют изоморфизм групп кохомологий $H^1(G, \pi_\mu)$ и $H^1(G, \pi_\nu)$, где π_μ, π_ν — представления, соответствующие мерам μ и ν , так как, вообще говоря, пространственная изометрия не переводит коцикл группы со значениями в одном пространстве в коцикл со значениями в другом. Иначе говоря, кохомологии групп со значениями в гильбертовых пространствах $L^2_\mu(X)$ с различными почти инвариантными мерами μ при данном действии группы, вообще говоря, различны. Этим объясняется наш выбор почти инвариантной меры далее.

Зафиксируем почти инвариантную меру ν на пространстве S и введем пространство Z_ν измеримых функций на S , удовлетворяющих двум условиям:

$$\int_S |f(ss_0) - f(s)|^2 d\nu(s) < \infty \quad \text{для любого } s_0 \in S,$$

$$\int_S |(\chi(sns^*) - 1)f(s)|^2 d\nu(s) < \infty \quad \text{для любого } n \in N.$$

Очевидно, что $L_\nu^2(S) \subset Z_\nu$.

Элементы $f \in Z_\nu$ будут играть роль кограниц, а пространство функций вида $b(g) = T(g)f - f$ есть пространство коциклов. Если $f \in L_\nu^2(S)$, то $b(g) = T(g)f - f$ есть коцикл, когомологичный нулю. Отсюда следует

Лемма 2. *Представление группы P в пространстве $L_\nu^2(S)$ является особым тогда и только тогда, когда*

$$L_\nu^2(S) \subsetneq Z_\nu,$$

т. е. когда существует кограница, не лежащая в $L_\nu^2(S)$. Таким образом, группа когомологий имеет вид

$$H^1(P; L_\nu^2(S)) = Z_\nu / L_\nu^2(S).$$

Мера ν называется особой, если $H^1(P; L_\nu^2(S)) \neq 0$, т. е. существуют кограницы, не лежащие в $L_\nu^2(S)$. Авторам неизвестно, является ли мера Хаара m на S особой и, тем самым, неизвестно, является ли особым естественное унитарное представление группы P на $L_m^2(S)$. Поэтому мы выбираем другую почти инвариантную меру для построения особого, но уже неунитарного представления группы P .

В дальнейшем фиксируется почти инвариантная мера ν следующего вида:

$$d\nu(s) = |s|^{-4} ds, \quad \text{где } |s|^2 = \text{tr}(s^*s) = s_{11}^2 + s_{22}^2 + |s_{21}|^2.$$

Удобно представлять эту меру в полярных координатах на S . Для этого заметим, что многообразие элементов $\omega \in S$ с нормой $|\omega| = 1$ эквивалентно области на единичной сфере в $\mathbb{R}^4$. Назовем сферическими координатами матрицы s из формулы (3) число $r = |s|$ и матрицу $\omega = |s|^{-1}s$. Тогда $s = r\omega$ и выражение меры ν в полярных координатах имеет вид

$$d\nu(s) = r^{-1} dr d\omega,$$

где $d\omega$ — инвариантная мера на сфере.

Непосредственно проверяется следующее утверждение:

Теорема 3. *Представление π группы P в гильбертовом пространстве $L_\nu^2(S)$, где $d\nu(s) = |s|^{-4} ds$, является особым и обладает нетривиальным коциклом вида*

$$b(g) = T(g)f - f, \quad \text{где } f(s) = e^{-|s|/2}. \quad (4)$$

2.5. Продолжение особого неунитарного представления подгруппы P на всю группу $U(2, 2)$. Остается проверить, что особое представление продолжается до неунитарного представления всей группы $U(2, 2)$. Конструкция искомого продолжения основана на следующем свойстве группы $U(2, 2)$. Любой элемент $g \in U(2, 2)$ представим, и притом однозначно, в виде произведения $g = pk$, $p \in P$, $k \in K$, где K — максимальная компактная подгруппа элементов

$k \in U(2, 2)$, удовлетворяющих соотношению $kk^* = e$, т.е. подгруппа блочных матриц вида

$$k = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = e_p$ и $\alpha\beta^* + \beta\alpha^* = 0$ (разложение Ивасава).

Пусть T — особое представление подгруппы P в гильбертовом пространстве $H = L^2_\nu(S)$, определенное в теореме 2, и b — его нетривиальный коцикл, заданный формулой (4). Обозначим через H_0 линейное инвариантное подпространство в H , натянутое на векторы коцикла b .

Лемма 3. (1) Подпространство H_0 всюду плотно в H .

(2) Векторы $b(p)$, $p \neq e$, линейно независимы (свойство невырожденности).

Определим действия операторов $T(k)$, $k \in K$, на множестве векторов $b(p)$, $p \in P$, по формуле

$$T(k)b(p) = b(p'),$$

где $p' \in P$ определяется из соотношения $kp = p'k'$, $k' \in K$.

3. Операторы $T(k)$ удовлетворяют групповому соотношению $T(k_1k_2)b(p) = T(k_1)T(k_2)b(p)$ для любых $k_1, k_2 \in K$ и $p \in P$, а потому порождают представление подгруппы K в подпространстве H_0 .

Теорема 4. Операторы $T(k)$, $k \in K$, совместно с операторами $T(p)$, $p \in P$, порождают представление всей группы $U(2, 2)$ в подпространстве H_0 , в котором оператор инволюции $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & e_p \\ e_p & 0 \end{pmatrix}$ задается на множестве векторов $b(p)$ следующей формулой:

$$T(\sigma)b(p) = b(\hat{p}), \quad \hat{p} \in P,$$

где $\hat{p}$ однозначно определяется соотношением $\hat{p}\hat{p}^* = \sigma p p^* \sigma$. В этом продолжении операторы подгруппы P унитарны, операторы подгруппы K ограничены, а оператор инволюции неограничен и не продолжается на все пространство H . Продолжение 1-коцикла b с группы P на группу $U(2, 2)$ задается формулой

$$b(pq) = b(p) \quad \text{для любых } p \in P \text{ и } q \in Q.$$

Приложения описанной конструкции к представлениям группы токов будут изложены в другом месте. Ограничение группой $U(2, 2)$ в этой работе обусловлено лишь методическими целями: дать простой пример общей теории, которая, как полагают авторы, распространяется на широкий класс полупростых групп Ли и их группы токов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. М. Вершик, С. И. Карпушев, *Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции*, Матем. сб., **119**:4 (1982), 521–533.
- [2] Y. Shalom, *Rigidity of commensurators and irreducible lattices*, Invent. Math., **141**:1 (2000), 1–54.
- [3] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, *Kazdan's Property (T)*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [4] U. Haagerup, *An example of nonnuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property*, Invent. Math., **50**:3 (1978), 279–293.
- [5] P.-A. Cherix, et al., *Groups with the Haagerup Property: Gromov's A-T-Menability*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

- [6] B. Kostant, *On existence and irreducibility of certain series of representations*, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 627–642.
- [7] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций*, УМН, **28:5(173)** (1973), 83–128.
- [8] А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Неприводимые представления группы G^X и когомологии*, Функц. анализ и его прил., **8:2** (1974), 67–69.
- [9] I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Models of representations of current groups*, in: Representations of Lie groups and Lie algebras (Budapest, 1971), Akad. Kiadó, Budapest, 1985, 121–179.
- [10] R. S. Ismagilov, *Representations of infinite-dimensional groups*, Transl. Math. Monographs, vol. 152, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [11] A. Guichardet, *Sur la cohomologie des groupe topologiques II*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1972), 305–332.
- [12] P. Delorm, *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus et représentations*, Bull. Soc. Math. France, **105** (1977), 281–336.
- [13] Ф. А. Березин, *Представления непрерывного прямого произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара*, Труды ММО, **36** (1978), 275–293.
- [14] H. Araki, *Factorisable representations of current algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Ser. A, **5** (1969/1970), 361–422.
- [15] K. Parthasarathi, K. Schmidt, *Positive Definite Kernels, Continuous Tensor Products, and Central Limit Theorems of Probability Theory*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1972.
- [16] A. M. Vershik, M. I. Graev, *The basic representation of the current group $O(n, 1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure*, Indag. Math., **16:3/4** (2005), 499–529.
- [17] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Структура дополнительных серий и особых представлений групп $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$* , УМН, **61:5** (2006), 3–88.
- [18] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Интегральные модели представлений групп токов*, Функц. анализ и его прил., **42:1** (2008), 22–32.
- [19] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Интегральные модели представлений групп токов простых групп Ли*, УМН, **64:2(386)** (2009), 5–72.
- [20] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Пуассонова модель фоковского пространства и представления групп токов*, Алгебра и анализ, **23:3** (2011), 63–136.
- [21] А. М. Вершик, М. И. Граев, *Особые представления групп $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ и связанные с ними представления групп токов $U(\infty, 1)$ и $O(\infty, 1)$ в квазипуассоновом пространстве*, Функц. анализ и его прил., **46:1** (2012), 1–12.
- [22] А. М. Вершик, *Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?*, Труды МИАН, **259** (2007), 256–281.
- [23] A. M. Vershik, *Invariant measures for the continual Cartan subgroup*, J. Funct. Anal., **255:9** (2008), 2661–2682.
- [24] A. M. Vershik, *The behavior of the Laplace transform of the invariant measure on the hypersphere of high dimension*, J. Fixed Point Theory Appl., **3:2** (2008), 317–329.
- [25] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М, 1988.