Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Мохаммадзаде, Д. Б. Фукс, Когомологии алгебры Ли $\mathfrak{H}_2$: экспериментальные результаты и гипотезы, *Функц. анализ и его прил.*, 2014, том 48, выпуск 2, 67–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3145>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:19:04

УДК 512.664.3

Когомологии алгебры Ли $\mathfrak{H}_2$: экспериментальные результаты и гипотезы

© 2014. С. МОХАММАДЗАДЕ, Д. Б. ФУКС

Памяти Израиля Моисеевича Гельфанда

В настоящей статье рассматриваются когомологии с тривиальными коэффициентами алгебры Ли $\mathfrak{H}$ и ее максимальной нильпотентной подалгебры $L_1\mathfrak{H}$. Мы вычисляем когомологии $H^2(L_1\mathfrak{H})$ и формулируем далеко идущие гипотезы, касающиеся когомологий указанных алгебр Ли и основанные на обширном экспериментальном материале.

Говоря о классических бесконечномерных алгебрах Ли, когомологии которых по сей день остаются невычисленными, следует упомянуть в первую очередь алгебру Ли $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_2$ гамильтоновых векторных полей на плоскости. Методы, которые в применении к другим классическим бесконечномерным алгебрам Ли сводят вычисление их когомологий к конечномерным комплексам (см. [1]), дают в случае алгебры Ли $\mathfrak{H}$ только частичные результаты, и лучшее, чего пока удалось достичь, состоит в построении «экзотических когомологических классов» (см. [2]), само существование которых подчеркивает трудность задачи.

В настоящей статье мы анализируем частично известные, частично новые результаты об эйлеровых характеристиках комплексов, связанных с когомологиями алгебры $\mathfrak{H}$ и ее максимальной нильпотентной подалгебры $L_1\mathfrak{H}$, и формулируем, возможно чересчур смелые, гипотезы относительно этих когомологий, которые до известной степени подтверждаются проделанным нами вычислением когомологий $H^2(L_1\mathfrak{H})$. Если не оговорено противное, рассматриваемые в этой статье гомологии и когомологии — это гомологии и непрерывные когомологии с тривиальными коэффициентами.

§ 1. Алгебра Ли $\mathfrak{H}$ и ее когомологии: общие сведения

Алгебра Ли $\mathfrak{H}$ есть комплексная алгебра Ли с базисом

$$\{e_{ij} \mid i \geq -1, j \geq -1, i + j \geq -1\}.$$

Коммутатор описывается формулой

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \begin{vmatrix} i+1 & j+1 \\ k+1 & l+1 \end{vmatrix} e_{i+k, j+l}.$$

Эта алгебра имеет очевидную биградуировку $\mathfrak{H} = \bigoplus_{ij} \mathfrak{H}_{ij}$ с одномерными компонентами $\mathfrak{H}_{ij} = \mathbb{C}e_{ij}$ ($i \geq -1, j \geq -1, i + j \geq -1$). Соответственно биградуировку приобретают цепной и коцепной комплексы, а с ними гомологии и

КОГОМОЛОГИИ:

$$\begin{aligned} C_q(\mathfrak{H}) &= \bigoplus_{ij} C_q^{ij}(\mathfrak{H}), & C^q(\mathfrak{H}) &= \bigoplus_{ij} C_{ij}^q(\mathfrak{H}), \\ H_q(\mathfrak{H}) &= \bigoplus_{ij} H_q^{ij}(\mathfrak{H}), & H^q(\mathfrak{H}) &= \bigoplus_{ij} H_{ij}^q(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Простые соображения (см. [1]) показывают, что $H_q^{ij}(\mathfrak{H}) = 0$, $H_{ij}^q(\mathfrak{H}) = 0$ (для всех q), если $i \neq j$. Однако вычисление в случае $i = j$ остается непосильным для существующих методов. Нетрудно, впрочем, показать, что

$$\dim H_{-1,-1}^q(\mathfrak{H}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 2, 5, \\ 0, & \text{если } q \neq 2, 5, \end{cases} \quad \dim H_{00}^q(\mathfrak{H}) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = 0, 7, \\ 0, & \text{если } q \neq 0, 7 \end{cases}$$

(те же равенства выполняются для гомологий) и $H_{ii}^q(\mathfrak{H}) = H_q^{ii}(\mathfrak{H}) = 0$ при всех q , если $i = 1, 2, 3$. Однако когомологии $H_{4,4}^q(\mathfrak{H})$ оказываются нетривиальными (одномерными) при $q = 7, 10$ (и аналогичное утверждение верно для гомологий): явные формулы для соответствующих коциклов содержатся в [2]. В той же статье [2] показано, что когомологии $H_{ii}^*(\mathfrak{H})$ тривиальны при $i = 5$ и заведомо нетривиальны при $i = 7$ и 11 (эти результаты были получены при помощи компьютера). Дальнейшие вычисления в те годы не представлялись возможными.

§2. Теорема Перчика

Прорыв в вычислении когомологий алгебры Ли $\mathfrak{H}$ был достигнут в работе Перчика [3]. Идея была проста: вычисление когомологий конечномерного комплекса может быть бесконечно сложнее вычисления его эйлеровой характеристики. Непосредственно к вычислению когомологий $H_{ii}^*(\mathfrak{H})$ это соображение применить невозможно, потому что эйлерова характеристика комплекса $C_{ii}^\bullet(\mathfrak{H})$ всегда равна 0. Дело обстоит иначе для относительных когомологий $H^*(\mathfrak{H}, \mathfrak{sl}(2))$ (алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ вкладывается в $\mathfrak{H}$ как $\text{span}(e_{-1,1}, e_{00}, e_{1,-1})$). Правда, биградуировка при переходе к относительным коцепям и когомологиям пропадает, но остается обычная градуировка, наследуемая от градуировки $\mathfrak{H}_i = \bigoplus_{j+k=i} \mathfrak{H}_{jk}$. Вычисление относительных когомологий равнозначно вычислению абсолютных когомологий, ибо, как легко показать с помощью спектральной последовательности Серра–Хохшилда, $H_i^q(\mathfrak{H}) = H_i^q(\mathfrak{H}, \mathfrak{sl}(2)) \oplus H_i^{q-3}(\mathfrak{H}, \mathfrak{sl}(2))$ при всех $i \neq 0$.

Теорема 2.1 (Перчик). *Эйлерова характеристика комплекса $C_i^\bullet(\mathfrak{H}, \mathfrak{sl}(2))$ равна половине коэффициента при x^{2i} ($= t^0 x^{2i}$) в произведении*

$$\prod_{\substack{-1 \leq \alpha < \infty \\ \beta \equiv \alpha \pmod{2} \\ -\alpha - 2 \leq \beta \leq \alpha + 2 \\ (\alpha, \beta) \neq (0, 0)}} (1 - t^\beta x^\alpha).$$

Явное вычисление коэффициентов этого произведения представляет собой до сих пор не решенную комбинаторную задачу. Остается неизвестным даже, будут ли эйлеровы характеристики в теореме Перчика отличны от нуля в бесконечно многих случаях. Впрочем, Перчик вычислил, тоже при помощи компьютера,

коэффициенты при x^{2i} для $i \leq 35$ и обнаружил, что эти коэффициенты растут, хотя и довольно хаотически. В частности, последний найденный им коэффициент (для $i = 35$) был равен 10.

Трудно даже вообразить, насколько далеко позволяют продвинуться в вычислении рассматриваемых эйлеровых характеристик современные компьютерные средства. Не стремясь к установлению рекордов, мы произвели вычисления до $i = 129$. Результат представлен в таблице ниже (в которой эйлерова характеристика комплекса $C_i^\bullet(\mathfrak{H}, \mathfrak{sl}(2))$ обозначена через $E(i)$).

i	$E(i)$	i	$E(i)$	i	$E(i)$	i	$E(i)$	i	$E(i)$
-1	1	26	3	53	173	80	3584	107	8541
0	2	27	0	54	145	81	-5935	108	-1028485
1	0	28	0	55	271	82	-21098	109	-2151079
2	0	29	-1	56	62	83	-31806	110	-3195064
3	0	30	-3	57	47	84	-40358	111	-3758464
4	-1	31	3	58	-303	85	-36595	112	-3619783
5	0	32	-8	59	-428	86	-2204	113	-2444842
6	0	33	9	60	-583	87	6624	114	-241084
7	-1	34	0	61	-508	88	44607	115	2909301
8	0	35	10	62	-182	89	82862	116	6509215
9	0	36	-3	63	217	90	114857	117	9863184
10	0	37	2	64	1027	91	119528	118	12052883
11	-1	38	-9	65	1252	92	97775	119	12061060
12	0	39	-20	66	1775	93	29235	120	9163196
13	0	40	-5	67	1079	94	-64387	121	2834605
14	-1	41	-13	68	560	95	-189286	122	-6466360
15	1	42	21	69	-1374	96	-295141	123	-17871392
16	-1	43	5	70	-2562	97	-372236	124	-29128258
17	1	44	54	71	-4303	98	-360596	125	-37864369
18	-1	45	5	72	-4480	99	-253826	126	-40696075
19	0	46	24	73	-3613	100	-23742	127	-35201663
20	1	47	-33	74	-920	101	296868	128	-19167388
21	-2	48	-47	75	3333	102	663644	129	7151485
22	0	49	-82	76	7579	103	995744		
23	-1	50	-79	77	12288	104	1175649		
24	3	51	-4	78	12866	105	1123744		
25	-2	52	5	79	11810	106	725381		

Конечно, первое, что бросается здесь в глаза, — это то, что абсолютные величины эйлеровых характеристик достигают весьма больших размеров: в пределах таблицы более сорока миллионов. Но воистину удивительную картину можно увидеть, если построить логарифмический график функции $E(i)$. Этот график показан на следующей странице.

При небольших значениях i ничего интересного не происходит. Однако, начиная с некоторого места, функция E достигает альтернирующих локальных максимумов и минимумов, причем точки, в которых эти минимумы и максимумы достигаются, равномерно перемещаются вправо, а значения максимумов и минимумов растут экспоненциально.

Правдоподобное объяснение такого поведения функции E могло бы состоять в следующем. Абсолютная величина эйлеровой характеристики велика, если

когомологии сосредоточены более или менее в одной размерности. С ростом i эта размерность возрастает, и в какой-то момент нетривиальные когомологии оказываются расположенными в двух соседних размерностях, а абсолютная величина эйлеровой характеристики относительно невелика. Затем размерность нетривиальной группы когомологий смещается на единицу вправо и эйлерова характеристика меняет знак. При этом полная размерность когомологий растет экспоненциально.

Подтверждением этой гипотезы могло бы служить хотя бы частичное вычисление когомологий алгебры Ли $\mathfrak{H}$. Мы не располагаем таким вычислением, но приведем в следующем параграфе некоторые результаты, касающиеся когомологий алгебры Ли $L_1\mathfrak{H}$. В заключительном параграфе мы покажем, как эти вычисления согласуются с информацией об эйлеровых характеристиках комплексов коцепей алгебры Ли $L_1\mathfrak{H}$.

§3. Вычисление $H^q(L_1\mathfrak{H})$, $q \leq 2$

Алгебра Ли $L_1\mathfrak{H}$ есть подалгебра алгебры $\mathfrak{H}$ с базисом e_{ij} , $i + j \geq 1$. Она наследует от $\mathfrak{H}$ биградуировку, $L_1\mathfrak{H} = \bigoplus_{ij} L_1\mathfrak{H}_{ij}$, $L_1\mathfrak{H}_{ij} = \mathbb{C}e_{ij}$, и соответственно биградуировку получают коцепи и когомологии алгебры $L_1\mathfrak{H}$.

Очевидно, что $C^0(L_1\mathfrak{H}) = C^0_{00}(L_1\mathfrak{H}) \cong \mathbb{C}$ и $H^0(L_1\mathfrak{H}) = H^0_{00}(L_1\mathfrak{H}) \cong \mathbb{C}$.

Вычисление $H^1(L_1\mathfrak{H})$ также не составляет труда. Очевидно, что $C^q_{ij}(L_1\mathfrak{H}) = 0$ при $i + j < q$ и пространство $C^1_{ij}(L_1\mathfrak{H})$ одномерно и порождается коцепью b_{ij} , $b_{ij}(e_{ij}) = 1$. Таким образом, $b_{-1,2}$, $b_{0,1}$, $b_{1,0}$, $b_{2,-1}$ — нетривиальные коциклы, и они порождают когомологии $H^1_{ij}(L_1\mathfrak{H}) \cong \mathbb{C}$, $(i, j) = (-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)$. Этим одномерные когомологии и исчерпываются:

$$\text{если } j \geq 1, \text{ то } \delta b_{ij}(e_{-1,2}, e_{i+1,j-2}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ i+2 & j-1 \end{vmatrix} c_{ij}(e_{ij}) = -3(i+2) \neq 0,$$

$$\text{если } i \geq 1, \text{ то } \delta b_{ij}(e_{2,-1}, e_{i-2,j+1}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ i-1 & j+2 \end{vmatrix} c_{ij}(e_{ij}) = 3(j+2) \neq 0.$$

Так как для всякого $e_{ij} \in L_1\mathfrak{H}$ либо $i \geq 1$, либо $j \geq 1$, этим вычисление $H^1(L_1\mathfrak{H})$ заканчивается:

Теорема 3.1.

$$\dim H^1_{ij}(L_1\mathfrak{H}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) = (-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1), \\ 0, & \text{если } (i, j) \neq (-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1); \end{cases}$$

таким образом, $\dim H^1(L_1\mathfrak{H}) = 4$.

Вычисление $H^2_{ij}(L_1\mathfrak{H})$ более громоздко. Начнем с формулировки результата.

Теорема 3.2.

$$\dim H^2_{ij}(L_1\mathfrak{H}) = \begin{cases} 2, & \text{если } (i, j) = (1, 2), (2, 1), \\ 1, & \text{если } (i, j) = (-2, 5), (-1, 4), (0, 3), (1, 1), (1, 3), \\ & (2, 2), (3, 0), (3, 1), (4, -1), (5, -2), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

таким образом, $\dim H^2(L_1\mathfrak{H}) = 14$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, поскольку алгебра Ли $L_1\mathfrak{H}$ симметрична относительно i и j , $H^q_{ij}(L_1\mathfrak{H}) \cong H^q_{ji}(L_1\mathfrak{H})$; мы будем многократно использовать это тривиальное наблюдение.

Начнем со случая $i = -2$. Поскольку $C^1_{-2,j}(L_1\mathfrak{H}) = 0$, пространство когомологий $H^2_{-2,j}(L_1\mathfrak{H})$ совпадает с соответствующим пространством коциклов. Коцепь $c \in C^2_{-2,j}(L_1\mathfrak{H})$ определяется значениями $\alpha_s = c(e_{-1,s}, e_{-1,t})$ с $2 \leq s, 2 \leq t, s + t = j$. Заметим, что $\alpha_s = -\alpha_{j-s}$. Она является коциклом в том и только том случае, когда $\delta c(e_{-1,s}, e_{-1,t}, e_{0,j-s-t}) = 0$ при $2 \leq s < t, s + t < j$. Но

$$\begin{aligned} & \delta c(e_{-1,s}, e_{-1,t}, e_{0,j-s-t}) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & s+1 \\ 1 & j-s-t+1 \end{vmatrix} c(e_{-1,t}, e_{-1,j-t}) - \begin{vmatrix} 0 & t+1 \\ 1 & j-s-t+1 \end{vmatrix} c(e_{-1,s}, e_{-1,j-s}) \\ &= (t+1)\alpha_s - (s+1)\alpha_t. \end{aligned}$$

Если $j < 5$, то $C_{-2,j}(L_1\mathfrak{H}) = 0$ и, значит, $H_{-2,j}(L_1\mathfrak{H}) = 0$. Если $j = 5$, то имеются α_2 и α_3 и они связаны только условием $\alpha_2 = -\alpha_3$. Таким образом, $\dim H_{-2,5}^2(L_1\mathfrak{H}) = 1$. Наконец, при $j > 5$ из нашего уравнения следует, что $\alpha_s = k(s+1)$ при $2 \leq s \leq j-3$, где k — константа, и это, вместе с условием $\alpha_s = -\alpha_{j-s}$, показывает, что все α равны 0. Итак,

$$\dim H_{-2,j}^2(L_1\mathfrak{H}) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 5, \\ 0, & \text{если } j \neq 5. \end{cases}$$

Аналогичное соотношение верно для $H_{i,-2}^2(L_1\mathfrak{H})$. В дальнейшем мы будем считать, что $i > -2$, $j > -2$. В дополнение к этому, ввиду симметрии $i \leftrightarrow j$, мы можем считать, что $i \geq j$; поскольку $i + j \geq 2$, это означает, что $i \geq 1$.

Пусть $\gamma \in H_{ij}^2(L_1\mathfrak{H})$, и пусть $c \in C_{ij}^2(L_1\mathfrak{H})$ — коцикл класса γ . Положим $\gamma_{st} = c(e_{st}, e_{i-s, j-t})$; таким образом, $-1 \leq s \leq i+1$, $-1 \leq t \leq j+1$, $1 \leq s+t \leq i+j-1$. Очевидно, что $\gamma_{st} = -\gamma_{i-s, j-t}$. Поскольку $\delta b_{i,j}(e_{2,-1}, e_{i-2, j+1}) = 3(j+2) \neq 0$ (см. вычисление $H_{ij}^1(L_1\mathfrak{H})$), мы можем выбрать коцепь $c \in \gamma$, удовлетворяющую условию $c_{2,-1} = 0$, и это делает ее единственной (что оправдывает обозначение γ_{st}).

Так как $c(e_{2,-1}, e_{i-2, j+1}) = 0$,

$$0 = \frac{1}{3} \delta c(e_{2,-1}, e_{st}, e_{i-s-2, j-t+1}) = (t+1)\gamma_{s+2, t-1} + (j-t+2)\gamma_{st},$$

и это показывает, что

$$\gamma_{st} = -\frac{t+1}{j-t+2} \gamma_{s+2, t-1} = \frac{t(t+1)}{(j-t+2)(j-t+3)} \gamma_{s+4, t-2} = \dots$$

(при условии, конечно, что соответствующие $\gamma_{-, -}$ определены). Для $m = s+2t$ положим

$$\beta_m = (-1)^{t+1} \binom{j+2}{t+1} \gamma_{s, t};$$

предыдущие равенства показывают, что если $m = s+2t$, то β_m не зависит от выбора s и t . К тому же

$$\begin{aligned} \beta_{i+2j-m} &= \beta_{(i-s)+2(j-t)} = (-1)^{j-t+1} \binom{j+2}{j-t+1} \gamma_{i-s, j-t} \\ &= (-1)^j (-1)^{t+1} \binom{j+2}{t+1} (-\gamma_{st}) = (-1)^{j+1} \beta_m. \end{aligned}$$

Таким образом, класс γ полностью определяется числами β_m , $1 \leq m \leq (i+2j)/2$. К тому же, если $m = (i+2j)/2$ и j четно, то $\beta_m = 0$.

Далее,

$$\begin{aligned}
0 &= \delta c(e_{10}, e_{st}, e_{i-s-1, j-t}) \\
&= (2t-s-1)c(e_{s+1, t}, e_{i-s-1, j-t}) + (2j-i+s-2t+2)c(e_{st}, e_{i-s, j-t}) \\
&\quad - \begin{vmatrix} s+1 & t+1 \\ i-s & j-t+1 \end{vmatrix} c(e_{10}, e_{i-1, j}) \\
&= (2t-s-1)\gamma_{s+1, t} + (2j-i+s-2t+2)\gamma_{st} - \begin{vmatrix} s+1 & t+1 \\ i-s & j-t+1 \end{vmatrix} \gamma_{01} \\
&= (-1)^{t+1} \binom{j+2}{t+1}^{-1} [(2t-s-1)\beta_{m+1} + (2j-i+s-2t+2)\beta_m] \\
&\quad + \frac{1}{j+2} \begin{vmatrix} s+1 & t+1 \\ i-s & j-t+1 \end{vmatrix} \beta_1,
\end{aligned}$$

где, как прежде, $m = s + 2t$ (мы должны при этом считать, что $e_{st}, e_{i-s-1, j-t} \in L_1\mathfrak{H}$, что обеспечивается неравенствами $-1 \leq s \leq i$, $-1 \leq t \leq j+1$, $1 \leq s+t \leq i+j-2$).

Составим систему из полученных уравнений с $(s, t) = (3, -1), (0, 1), (2, 0), (4, -1)$ (этот выбор пар (s, t) объясняется тем, что мы хотим избежать появления β с индексами > 3). Получаются уравнения

$$-4\beta_2 + (2j-i+11)\beta_1 = 0, \quad (1)$$

$$6\beta_3 + 2(2j-i)\beta_2 + (j-2i)(j+1)\beta_1 = 0, \quad (2)$$

$$\beta_3 - (2j-i+4)\beta_2 + (3j-i+5)\beta_1 = 0, \quad (3)$$

$$-5\beta_3 + (2j-i+8)\beta_2 + 5\beta_1 = 0. \quad (4)$$

Каждое из этих уравнений имеет место при выполнении некоторых описанных выше условий. А именно,

уравнение (1) выполнено, если $i \geq 3$, $i+j \geq 4$,

уравнение (2) выполнено, если $i \geq 0$, $j \geq 0$, $i+j \geq 3$,

уравнение (3) выполнено, если $i \geq 2$, $i+j \geq 4$,

уравнение (4) выполнено, если $i \geq 4$, $i+j \geq 5$.

Все четыре уравнения выполняются, если $i \geq 4$, $j \geq 0$ и $(i, j) \neq (4, 0)$. Начнем с рассмотрения этого случая. Сначала заметим, что если $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — ненулевое решение, то $\beta_1 \neq 0$; действительно, если $\beta_1 = 0$, то из уравнения (1) следует, что $\beta_2 = 0$, и затем из любого из трех остальных уравнений вытекает, что $\beta_3 = 0$. Далее, рассмотрим уравнение $(2) + 4 \cdot (3) + 2 \cdot (4)$, Все слагаемые с β_2 и β_3 сокращаются, и остается β_1 с коэффициентом

$$(j-2i)(j+1) + 4(3j-i+5) + 10 = j^2 - 2ij + 13j - 6i + 30 = (j+3)(j-2i+10).$$

Так как $j \neq -3$, система может иметь ненулевое решение только при $j = 2i - 10$. В таком случае детерминант системы (1), (3), (4) есть

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3i-9 \\ 1 & 16-3i & 5i-25 \\ -5 & 3i-12 & 5 \end{vmatrix} = -4(9i^2 - 103i + 273).$$

Этот многочлен не имеет рациональных корней; таким образом, в рассматриваемом случае наша система имеет только нулевое решение. Наконец, если $\beta_1 = 0$, то наше уравнение приобретает вид

$$(2t - s - 1)\beta_{m+1} + (2j - i + s - 2t + 2)\beta_m = 0.$$

Конечно, при любом m можно подобрать s и t таким образом, что $m = s + 2t$ и $2t - s - 1 \neq 0$, и это показывает, что в рассматриваемом случае (т.е. при $i \geq 4$, $j \geq 0$, $(i, j) \neq (4, 0)$) все β равны нулю, коциклы отсутствуют и когомологии тривиальны.

Остается рассмотреть случаи, когда не все уравнения (1)–(4) имеют место. Случаи таковы: $(i, -1)$ с $i \geq 6$, а также $(1, 1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, -1)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, $(4, -1)$, $(4, 0)$, $(5, -1)$ (мы принимаем во внимание, что $i \geq j$ и $i + j \geq 2$).

Случай $(i, -1)$, $i \geq 6$. В этом случае имеют место уравнения (1), (3) и (4). Детерминант системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 9-1 \\ 1 & i-2 & 2-i \\ -1 & 6-1 & 5 \end{vmatrix} = -4i^2 + 20i + 24 = -4(i+1)(i-6).$$

Поскольку $i \neq -1$, система имеет нетривиальное решение только при $i = 6$. Решение таково: $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 4$ (должно быть $\beta_3 = \beta_1$). Таким образом, при $(i, j) = (6, -1)$ есть единственный кандидат в коциклы:

$$\begin{aligned} c(e_{2,-1}, e_{40}) &= 0, & c(e_{10}, e_{5,-1}) &= \gamma_{10} = -\beta_1 = -4, \\ c(e_{3,-1}, e_{30}) &= \gamma_{3,-1} = \beta_1 = 4, & c(e_{20}, e_{4,-1}) &= \gamma_{20} = -\beta_2 = -3; \end{aligned}$$

но это не коцикл: например, $\delta c(e_{2,-1}, e_{3,-1}, e_{11}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} c(e_{3,-1}, e_{30}) = 24 \neq 0$.

Значит, $H_{6,-1}^2(L_1\mathfrak{H}) = 0$ и, тем более, $H_{i,-1}^2(L_1\mathfrak{H}) = 0$ при $i > 6$, так как в этом случае $\beta_1 = 0$ и, значит, $\beta_m = 0$ при любом m (см. выше).

Случай $(1, 1)$. В $C_{11}^2(L_1\mathfrak{H}) \bmod \delta(C_{11}^1(L_1\mathfrak{H}))$ имеется единственная с точностью до множителя коцепь, $c(e_{10}, e_{01}) = 1$, и это коцикл, так как $C_{11}^3(L_1\mathfrak{H}) = 0$. Значит, $\dim H_{11}^2(L_1\mathfrak{H}) = 1$.

Случай $(2, 0)$. В этом случае β вообще отсутствуют ($\beta_1 = -\beta_1$) и когомологии тривиальны.

Случай $(2, 1)$. Имеются β_1 , β_2 и $\beta_3 = \beta_1$ (единственное из четырех уравнений, (2), превращается в $0 = 0$). Общая коцепь $c \in C_{21}^2(L_1\mathfrak{H}) \bmod \delta(C_{21}^1(L_1\mathfrak{H}))$ имеет вид

$$\begin{aligned} c(e_{2,1}, e_{02}) &= 0, & c(e_{10}, e_{11}) &= \gamma_{10} = -\frac{1}{3}\beta_1, \\ c(e_{01}, e_{20}) &= \gamma_{01} = \frac{1}{3}\beta_2, & c(e_{-12}, e_{3,-1}) &= \gamma_{-12} = -\beta_3 = -\beta_1. \end{aligned}$$

Эта коцепь является коциклом при любых β_1 , β_2 :

$$\delta c(e_{2,-1}, e_{10}, e_{-12}) = -3c(e_{-12}, e_{3,-1}) + 9c(e_{10}, e_{11}) = -3\beta_1 + 3\beta_1 = 0.$$

Таким образом, $\dim H_{21}^2(L_1\mathfrak{H}) = 2$.

Случай $(2, 2)$. Имеются β_1 и β_2 , также $\beta_3 = 0$, $\beta_4 = -\beta_2$, $\beta_5 = -\beta_1$. Выполнены два из четырех уравнений, (2) и (3), но означают они одно и то же:

$2\beta_2 = 3\beta_1$. Таким образом, мы можем взять $\beta_1, \dots, \beta_5 = 2, 3, 0, -3, -2$, и единственный потенциальный коцикл $c \in C_{22}^2(L_1\mathfrak{H})$ таков:

$$\begin{aligned} c(e_{2,-1}, e_{03}) &= 0, & c(e_{10}, e_{12}) &= -2, & c(e_{01}, e_{21}) &= 2, \\ c(e_{-12}, e_{30}) &= 0, & c(e_{3,-1}, e_{-1,3}) &= 8, & c(e_{20}, e_{02}) &= -3. \end{aligned}$$

Простая проверка показывает, что это действительно коцикл. Таким образом, $\dim H_{22}^2(L_1\mathfrak{H}) = 1$.

Случай (3, -1). Подобно случаю (2, 0), β отсутствуют и когомологии тривиальны.

Случай (3, 0). Имеется только β_1 ($\beta_2 = -\beta_1$), единственное из имеющихся в наличии уравнений, (2), превращается в $0 = 0$, единственный потенциальный коцикл $c \in C_{30}^2(L_1\mathfrak{H})$ определяется формулами

$$c(e_{2,-1}, e_{11}) = 0, \quad c(e_{10}, e_{20}) = \gamma_{10} = -\frac{1}{2}\beta_1, \quad c(e_{10}, e_{3,-1}) = \gamma_{10} = \beta_2 = -\beta_1,$$

и это действительно коцикл: $\delta c(e_{2,-1}, e_{10}, e_{01}) = -3c(e_{01}, e_{3,-1}) + 6c(e_{10}, e_{20}) = 3\beta_1 - \frac{6}{2}\beta_1 = 0$. Таким образом, $\dim H_{30}^2(L_1\mathfrak{H}) = 1$.

Случай (3, 1). Имеются β_1 и β_2 , а также $\beta_3 = \beta_2$ и $\beta_4 = \beta_1$. Выполняются три уравнения, (1), (2) и (3), но они значат одно и то же: $-2\beta_2 + 5\beta_1 = 0$. Таким образом, с точностью до пропорциональности, решение одно: $\beta_1 = \beta_4 = 2$, $\beta_2 = \beta_3 = 5$. Соответствующий потенциальный коцикл $c \in C_{3,1}^2(L_1\mathfrak{H})$ таков:

$$\begin{aligned} c(e_{2,-1}, e_{12}) &= 0, & c(e_{10}, e_{21}) &= -2, & c(e_{01}, e_{30}) &= 5, \\ c(e_{-1,2}, e_{4,-1}) &= -15, & c(e_{3,-1}, e_{02}) &= 6, & c(e_{20}, e_{11}) &= -5, \end{aligned}$$

и простая проверка показывает, что это действительно коцикл. Таким образом, $\dim H_{31}^2(L_1\mathfrak{H}) = 1$.

Случай (3, 2). Три из четырех уравнений выполняются: (1), (2) и (3). Детерминант системы

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 12 \\ 6 & 2 & -12 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -216$$

отличен от нуля, значит, все β равны нулю и $H_{32}^2(L_1\mathfrak{H}) = 0$.

Случай (3, 3). Три из четырех уравнений выполняются: (1), (2) и (3). Детерминант системы

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & 14 \\ 6 & 6 & -12 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = -504$$

отличен от нуля, значит, все β равны нулю и $H_{33}^2(L_1\mathfrak{H}) = 0$.

Случай (4, -1). Уравнений нет, есть только β_1 . Коцепь c ,

$$c(e_{2,-1}, e_{20}) = 0, \quad c(e_{3,-1}, e_{10}) = \beta_1,$$

является коциклом (потому что $C_{4,-1}^3(L_1\mathfrak{H}) = 0$), и, значит, $\dim H_{4,-1}^2(L_1\mathfrak{H}) = 1$.

Случай (4, 0). Имеется β_1 и $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = -\beta_1$. Уравнение (1) приобретает вид $7\beta_1 = 0$, значит, $H_{40}^2(L_1\mathfrak{H}) = 0$.

Случай $(5, -1)$. Имеется β_1 и $\beta_2 = \beta_1$. Каждое из уравнений (1) и (3) имеет вид $0 = 0$. Единственный потенциальный коцикл $c \in C_{5,-1}^2(L_1\mathfrak{H})$,

$$c(e_{2,-1}, e_{30}) = 0, \quad c(e_{3,-1}, e_{20}) = 1, \quad c(e_{4,-1}, e_{10}) = 1,$$

коциклом не является: $\delta c(e_{2,-1}, e_{01}, e_{3,-1}) = 6c(e_{20}, e_{3,-1}) = -6$. Значит, $H_{5,-1}^2(L_1\mathfrak{H}) = 0$.

Этим закончен перебор всех случаев. Теорема доказана.

§4. Эйлеровы характеристики комплексов $C_{ij}^\bullet(L_1\mathfrak{H})$

Обозначим через $E(i, j)$ эйлерову характеристику $\sum_q (-1)^q \dim C_{i,j}^q(L_1\mathfrak{H})$ комплекса $C_{i,j}^\bullet(L_1\mathfrak{H})$. Таблица чисел $E(i, j)$ может быть составлена с помощью простой компьютерной программы. Фрагмент этой таблицы, который может уместиться на журнальной странице, приведен на следующей странице (пустые клетки соответствуют нулям).

Мы видим, что в таблице чередуются области положительных и отрицательных значений, более или менее вида $c \leq i + j \leq C$. (Эта структура сохраняется при доступном нам расширении таблицы.) Первая «область» положительных значений сводится к $E(0, 0) = 1$. Это соответствует 0-мерным когомологиям. Затем область $i \geq -1, j \geq -1, i + j = 1$ соответствует 1-мерным когомологиям. Следующая область почти точно отвечает 2-мерным когомологиям, исключение составляют $E(1, 3) = E(2, 2) = E(3, 1) = 0$. Мы знаем, что $\dim H_{ij}^2(L_1\mathfrak{H}) = 1$ при $(i, j) = (1, 3), (2, 2), (3, 1)$, и это означает, как легко понять, что $\dim H_{ij}^3(L_1\mathfrak{H}) = 1$ для этих (i, j) . Можно предположить, что дальнейшие области соответствуют перекрывающимся областям нетривиальных когомологий размерностей 3, 4, 5 и т.д. Такова наша гипотеза.

В заключение мы приведем результат, связывающий функции $E(i)$ и $E(i, j)$.

Теорема 4.1. $E(i) = E(i, i) + E(i + 1, i + 1) + E(i - 1, i + 2) - E(i - 1, i + 1) - E(i, i + 1) - E(i, i + 2)$.

В известной степени, это соотношение объясняет сходство в поведении функций E одного и двух аргументов.

Доказательство. Поскольку $L_1\mathfrak{H}$ есть идеал в $L_0\mathfrak{H} = \bigoplus_{i+j \geq 0} \mathfrak{H}_{ij}$ и $L_0\mathfrak{H}/L_1\mathfrak{H} = \mathfrak{sl}(2) = \text{span}(e_{-1,1}, e_{00}, e_{1,-1})$, коцепи и когомологии алгебры Ли $L_1\mathfrak{H}$ обладают структурой $\mathfrak{sl}(2)$ -модуля. Обозначим стандартное $(k + 1)$ -мерное неприводимое представление $S^k \mathbb{C}^2$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ через V_k . Число компонент типа V_k в разложении $\mathfrak{sl}(2)$ -модуля $C_m^q(L_1\mathfrak{H})$ в сумму неприводимых представлений равно $\dim(C_m^q(L_1\mathfrak{H}) \otimes_{\mathfrak{sl}(2)} V_k)$. Каждая неприводимая компонента типа V_k обладает базисом, составленным из элементов пространств $C_{ij}^q(L_1\mathfrak{H})$ с

$$(i, j) = \left(\frac{m-k}{2} + s, \frac{m+k}{2} - s \right), \quad s = 0, 1, \dots, k$$

(кстати, из этого видно, что если $C_m^q(L_1\mathfrak{H})$ обладает неприводимой компонентой типа V_k , то $k \equiv m \pmod{2}$). Обозначим через $E_{\mathfrak{sl}(2)}(m, k)$ эйлерову характеристику комплекса $C_m^\bullet(L_1\mathfrak{H}) \otimes_{\mathfrak{sl}(2)} V_k$. Предыдущее описание неприводимых компонент $\mathfrak{sl}(2)$ -модуля $C_m^q(L_1\mathfrak{H})$ показывает, что

$$E_{\mathfrak{sl}(2)}(m, k) = E\left(\frac{m-k}{2}, \frac{m+k}{2}\right) - E\left(\frac{m-k}{2} - 1, \frac{m+k}{2} + 1\right).$$

Обратимся теперь к комплексу $C_m^\bullet(\mathfrak{H}, \mathfrak{sl}(2))$. По определению

$$C^q(\mathfrak{H}, \mathfrak{sl}(2)) = [\Lambda^q(\mathfrak{H}/\mathfrak{sl}(2))^{\mathfrak{sl}(2)}]^*,$$

где верхний индекс $\mathfrak{sl}(2)$ означает, что мы рассматриваем $\mathfrak{sl}(2)$ -инварианты (т.е. суммы компонент типа V_0). С другой стороны, $\mathfrak{H}/\mathfrak{sl}(2) = L_1\mathfrak{H} \oplus T$, где $T = \text{span}(e_{-1,0}, e_{0,-1})$; в частности, $T \subset \mathfrak{H}_{-1}$. Очевидно, что имеют место $\mathfrak{sl}(2)$ -изоморфизмы

$$\Lambda^0 T = V_0, \quad \Lambda^1 T = V_1, \quad \Lambda^2 T = V_0.$$

Итак,

$$C_m^q(\mathfrak{H}, \mathfrak{sl}(2)) = [C_m^q(L_1\mathfrak{H}) \otimes_{\mathfrak{sl}(2)} V_0] \oplus [C_{m+1}^{q-1}(L_1\mathfrak{H}) \otimes_{\mathfrak{sl}(2)} V_1] \oplus [C_{m+2}^{q-2}(L_1\mathfrak{H}) \otimes_{\mathfrak{sl}(2)} V_0],$$

откуда

$$\begin{aligned} E(i) &= E_{\mathfrak{sl}(2)}(2i; 0) - E_{\mathfrak{sl}(2)}(2i+1; 1) + E_{\mathfrak{sl}(2)}(2i+2; 0) \\ &= (E(i, i) - E(i-1, i+1)) - (E(i, i+1) - E(i-1, i+2)) \\ &\quad + (E(i+1, i+1) - E(i, i+2)), \end{aligned}$$

как утверждалось.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли*, Наука, М., 1984.
- [2] И. М. Гельфанд, Д. И. Калинин, Д. Б. Фукс, *О когомологиях алгебры Ли гамильтоновых формальных векторных полей*, Функц. анализ и его прил., **6:3** (1972), 25–29.
- [3] J. Perchik, *Cohomology of Hamiltonian and related formal vector fields Lie algebras*, Topology, **15:4** (1976), 395–404.

City College of San-Francisco
e-mail: smohammadzadeh@ccsf.edu
University of California, Davis
e-mail: fuchs@math.ucdavis.edu

Поступило в редакцию
12 января 2014 г.