Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Армарио, Ф. Х. Гарсия-Пачеко, Ф. Х. Перес-Фернандес, О векторнозначных банаховых пределах, *Функц. анализ и его прил.*, 2013, том 47, выпуск 4, 82–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/faa3146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 03:28:07

О векторнозначных банаховых пределах

© 2013. Р. АРМАРИО, Ф. Х. ГАРСИЯ-ПАЧЕКО, Ф. Х. ПЕРЕС-ФЕРНАНДЕС

1. Введение. В своей классической монографии 1932 г. (см. [2, р. 34]) Банах естественным образом продолжил функционал взятия предела с пространства сходящихся числовых последовательностей на пространство ограниченных числовых последовательностей.

Определение 1 [2]. Линейный функционал $\varphi: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ называется *банаховым пределом*, если:

- (i) $\varphi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \geq 0$ для $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$, таких, что $x_n \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) $\varphi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varphi((x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}})$ для $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$,
- (iii) $\varphi(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}$ обозначает постоянную последовательность из единиц.

Банах отметил, что линейный функционал $\varphi: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ является банаховым пределом тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора сдвига на ℓ_∞ и $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \varphi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ для всех $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$. В частности, для каждого банахова предела $\varphi: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ верны равенства $\varphi|_c = \lim$ and $\|\varphi\| = 1$. Поэтому банаховы пределы являются продолжениями (по Хану–Банаху) с единичной нормой функционала взятия предела с c на ℓ_∞ . С другой стороны, в 2010 г. Семенов и Сукочев [8] рассматривали инвариантные банаховы пределы и получили легко проверяемые ограничения для ограниченного линейного оператора H на ℓ_∞ , гарантирующие существование таких банаховых пределов B , для которых $B = B \circ H$.

Перенос понятия банахова предела на векторнозначный случай исследовался в [7], [4], [5]. Для адекватного переноса понятия банахова предела на векторнозначные последовательности достаточно заметить, что если $\psi \in S_{\ell_\infty}^*$ (через S с некоторым индексом обозначается единичная сфера в соответствующем пространстве) и $\psi(\mathbf{1}) = 1$, то для ψ выполняется условие (i) из определения 1: если $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S_{\ell_\infty}$ с $x_n \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $(1 - x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_{\ell_\infty}$ (через B с некоторым индексом обозначается единичный шар в соответствующем пространстве) и, следовательно, $1 = \psi(\mathbf{1}) = \psi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) + \psi((1 - x_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq \psi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) + 1$. Учитывая это, для числовых ограниченных последовательностей понятие банахова предела можно переформулировать следующим образом. Функционал $\varphi: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ является банаховым пределом, если и только если $\varphi \in S_{\ell_\infty}^*$, φ инвариантен относительно сдвига на ℓ_∞ и $\varphi|_c = \lim$. Такой подход позволяет корректно определить банаховы пределы для векторнозначных последовательностей.

Определение 2. Пусть X — вещественное нормированное пространство. Определим множество банаховых пределов на X формулой $\mathcal{BL}(X) := S_{\mathcal{CL}(\ell_\infty(X), X)} \cap \mathcal{N}_X \cap \mathcal{L}_X$.

Здесь через $\mathcal{CL}(\ell_\infty(X), X)$ обозначено пространство всех непрерывных линейных операторов из $\ell_\infty(X)$ в X , через $\mathcal{N}_X$ — подмножество в $\mathcal{CL}(\ell_\infty(X), X)$,

состоящее из всех операторов, инвариантных относительно сдвига на $\ell_\infty(X)$, а через $\mathcal{L}_X$ — подмножество в $\mathcal{CL}(\ell_\infty(X), X)$, состоящее из всех операторов, являющихся продолжениями функционала взятия предела на $c(X)$.

2. Существование банаховых пределов. Мы начнем с использования техники ультрафильтров для получения векторнозначных банаховых пределов в произвольных сопряженных банаховых пространствах. Следует подчеркнуть, что эта техника ранее использовалась в [5], хотя и для других целей.

Теорема 1. Пусть X^* — вещественное сопряженное банахово пространство. Тогда существует такой банахов предел $\varphi \in \mathcal{BL}(X^*)$, что если последовательность $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty(X^*)$ является w^* -сходящейся по Чезаро к $x^* \in X^*$, то $\varphi((x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}) = x^*$.

Доказательство. Рассмотрим фильтр на $\mathbb{N}$, состоящий из коконечных множеств. По лемме Цорна выберем ультрафильтр $\mathcal{F}$ на $\mathbb{N}$, содержащий этот фильтр. Ясно, что $\mathcal{F}$ не совпадает с $\mathcal{U}_n := \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\}$ ни для какого $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\varphi: \ell_\infty(X^*) \rightarrow X^*, \quad (x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \mathcal{F}\text{-}\lim \frac{x_1^* + \dots + x_n^*}{n}.$$

Проверим следующие утверждения.

(1) Отображение φ корректно определено. Действительно, шар

$$B_{X^*}(0, \|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty)$$

компактен и хаусдорфов в w^* -топологии. Так как каждый ультрафильтр на хаусдорфовом компакте сходится к единственному пределу, то $\mathcal{F}\text{-}\lim \frac{x_1^* + \dots + x_n^*}{n}$ существует и принадлежит $B_{X^*}(0, \|(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty)$.

(2) Отображение φ линейно, непрерывно и имеет норму 1. Действительно, из предыдущего п. (1) следует, что $\|\varphi\| \leq 1$. Для получения равенства $\|\varphi\| = 1$ достаточно рассмотреть любую постоянную последовательность единичной нормы.

(3) $\varphi|_{c(X^*)} = \lim$. Действительно, если последовательность $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ в X^* сходится к $x^* \in X^*$, то $(\frac{x_1^* + \dots + x_n^*}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к x^* . Значит, $(\frac{x_1^* + \dots + x_n^*}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ w^* -сходится к x^* и, следовательно, $\mathcal{F}\text{-}\lim \frac{x_1^* + \dots + x_n^*}{n} = x^*$ по построению ультрафильтра $\mathcal{F}$.

(4) Отображение φ инвариантно относительно сдвига. Действительно, для каждой последовательности $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty(X^*)$ справедливо соотношение $\varphi((x_{n+1}^* - x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}) = \mathcal{F}\text{-}\lim \frac{x_{n+1}^* - x_1^*}{n} = 0$, так как $(\frac{x_{n+1}^* - x_1^*}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к нулю.

(5) Если $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty(X^*)$ w^* -сходится к $x^* \in X^*$ по Чезаро, то $\varphi((x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}) = x^*$. Действительно, $(\frac{x_1^* + \dots + x_n^*}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ w^* -сходится к x^* , и, значит, $\mathcal{F}\text{-}\lim \frac{x_1^* + \dots + x_n^*}{n} = x^*$. $\square$

Заметим, что если X — вещественное банахово пространство, $\varphi \in \mathcal{BL}(X)$, а Y — подпространство в X , которое 1-дополняемо в нем, то

$$\ell_\infty(Y) \rightarrow Y, \quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto p(\varphi((y_n)_{n \in \mathbb{N}})),$$

есть банахов предел на Y , где $p: X \rightarrow Y$ — любая проекция с $\|p\| = 1$. Поэтому справедливо

Следствие 1. *Если вещественное банахово пространство 1-дополняемо в своем втором сопряженном, то на нем имеются банаховы пределы.*

Пространство c_0 есть пример банахова пространства без векторнозначных банаховых пределов. Действительно, если $\varphi \in \mathcal{BL}(c_0)$, то отображение

$$p: \ell_\infty \rightarrow c_0, \quad (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \varphi((y_1, 0, 0, \dots), (y_2, y_2, 0, 0, \dots), (y_3, y_3, y_3, 0, 0, \dots), \dots)$$

есть ограниченный линейный проектор, что невозможно в силу недополняемости c_0 в ℓ_∞ .

3. Векторнозначная лоренцева внутренняя характеристика почти сходимости. В [6] Лоренц использовал банаховы пределы при введении понятия почти сходимости. А именно, ограниченная последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ называется почти сходящейся, если найдется число $y \in \mathbb{R}$ (называемое почти пределом последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$), такое, что $\varphi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = y$ для всех банаховых пределов $\varphi: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$. В той же работе Лоренц также предложил следующий внутренний критерий почти сходимости: ограниченная последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ почти сходится к $y \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p x_{n+k} = y$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Позже, в [3] эта внутренняя характеристика была взята в качестве образца для распространения понятия почти сходимости на векторнозначные последовательности. А именно, последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в вещественном нормированном пространстве X называется почти сходящейся, если для некоторого $y \in X$ (называемого почти пределом последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и обозначаемого через $\text{AClim}_{n \rightarrow \infty} x_n = y$) равенство $\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p x_{n+k} = y$ выполняется равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Среди многих других фактов в [3] показано, что каждая почти сходящаяся последовательность обязательно ограничена. В самом деле, для заданного вещественного нормированного пространства X множество $\text{ac}(X)$ всех почти сходящихся последовательностей в X является замкнутым подпространством в $\ell_\infty(X)$. Кроме того, функционал взятия почти предела

$$\text{AClim}: \text{ac}(X) \rightarrow X, \quad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \text{AClim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

является непрерывным линейным оператором единичной нормы (см. [1], [3]). Ниже предложена векторнозначная версия лоренцевой внутренней характеристики почти сходимости. Предлагаемая техника отлична от той, которую использовал Лоренц, и существенно проще, так как не использует порядка на числовой прямой.

Теорема 2. *Пусть X — вещественное нормированное пространство, а $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность его элементов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ почти сходится к нулю в X ;
- (2) $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 0$ для всех $T \in \mathcal{N}_X$.

Доказательство. (1) Сначала допустим, что $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ почти сходится к нулю. Фиксируем $T \in \mathcal{N}_X \setminus \{0\}$. Положим $s := T((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Мы проверим, что $\|s\| < \varepsilon$ для произвольного $\varepsilon > 0$. Итак, фиксируем $\varepsilon > 0$. Найдется такое $p \in \mathbb{N}$, что

$$\left\| \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p x_{n+k} \right\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее,

$$\begin{aligned} s &= T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) \\ s &= T(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) \\ s &= T(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, \dots) \\ &\dots\dots\dots \\ s &= T(x_{p+1}, x_{p+2}, x_{p+3}, x_{p+4}, x_{p+5}, \dots). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(p+1)s = T(x_1 + \dots + x_{p+1}, x_2 + \dots + x_{p+2}, \dots),$$

т. е.

$$s = T\left(\frac{x_1 + \dots + x_{p+1}}{p+1}, \frac{x_2 + \dots + x_{p+2}}{p+1}, \dots\right),$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \|s\| &= \left\| T\left(\frac{x_1 + \dots + x_{p+1}}{p+1}, \frac{x_2 + \dots + x_{p+2}}{p+1}, \dots\right) \right\| \\ &\leq \|T\| \left\| \left(\frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p x_{n+k}\right)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{\infty} < \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) Теперь допустим, что $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 0$ для всех $T \in \mathcal{N}_X$, и предположим, что $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не является почти сходящейся к нулю. В [1, лемма 2.2] показано, что $\text{bps}(X)$ (множество последовательностей в X с ограниченными частичными суммами) совпадает со множеством

$$\{(z_{n+1} - z_n)_{n \in \mathbb{N}} : (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{\infty}(X)\}.$$

С другой стороны, нетрудно проверить, что все последовательности вида $(z_{n+1} - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_{\infty}(X)$, являются почти сходящимися к нулю. Так как функционал взятия почти предела непрерывен и $\text{ас}(X)$ замкнуто в $\ell_{\infty}(X)$, то мы получаем, что пространство всех последовательностей, почти сходящихся к нулю, также замкнуто в $\ell_{\infty}(X)$. В частности, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ не принадлежит замыканию множества $\text{bps}(X)$ в $\ell_{\infty}(X)$. Теперь введем такой непрерывный линейный функционал:

$$S: \text{bps}(X) \oplus \mathbb{R}(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}x \subseteq X, \quad (z_{n+1} - z_n + \lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lambda x,$$

где $x \in X \setminus \{0\}$ может быть выбран произвольно. По теореме Хана–Банаха продолжаем S до непрерывного линейного оператора $\hat{S}: \ell_{\infty}(X) \rightarrow \mathbb{R}x \subseteq X$. Заметим, что $\hat{S} \in \mathcal{N}_X$. Получаем противоречие с тем, что $S((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x \neq 0$. $\square$

Следствие 2. Пусть X — вещественное нормированное пространство. Если последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в X почти сходится к $x \in X$, то $T((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x$ для любых $T \in \mathcal{N}_X \cap \mathcal{L}_X$. В частности, $\varphi((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = x$ для всех $\varphi \in \mathcal{BL}(X)$.

Следствие 3. Пусть X — вещественное нормированное пространство. Тогда $\mathcal{BL}(X)$ совпадает с множеством всех продолжений (по Хану–Банаху) с единичной нормой функционала AClim взятия почти предела на все пространство $\ell_{\infty}(X)$.

Благодарности. Авторы выражают благодарность проф. В. М. Кадецу за его ценные замечания и советы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] A. Aizpuru, R. Armario, F. J. García-Pacheco, F. J. Pérez-Fernández, J. Math. Anal. Appl., **379**:1 (2011), 82–90. [2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Chelsea Publ., New York, 1978. [3] J. Boos, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, New York, 2000. [4] V. M. Kadets, B. Shumiatskiy, Матем. физ., анал., геом., **7**:2 (2000), 184–195. [5] V. M. Kadets, B. Shumiatskiy, Acta Math. Hungar., **90**:4 (2001), 293–305. [6] G. Lorentz, Acta Math., **80** (1948), 167–190. [7] A. L. Peressini, Studia Math., **35** (1970), 111–121. [8] E. M. Semenov, F. A. Sukochev, J. Func. Anal., **259**:6 (2010), 1517–1541.

Department of Mathematics, University of Cadiz
e-mail: rafael.armariomigueles@alum.uca.es

Department of Mathematics, University of Cadiz
e-mail: garcia.pacheco@uca.es

Department of Mathematics, University of Cadiz
e-mail: javier.perez@uca.es

Поступило в редакцию
30 октября 2011 г.

УДК 517.984.5

Спектральные кривые операторов Коши–Римана на эллиптических кривых с выколотыми точками*

© 2013. К. БОЛЕ, И. А. ТАЙМАНОВ

1. Введение. Спектральные кривые дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами лежат в основе теории конечнозонного интегрирования. Решение обратной задачи для конечнозонного оператора состоит в сопоставлении такого оператора спектральным данным, состоящим из спектральной кривой и некоторых дополнительных данных, связанных с ней. Для одномерных операторов Шрёдингера спектральная кривая была определена в [1]. В [2] это понятие было обобщено на двумерные операторы Шрёдингера, для которых спектральная кривая параметризует функции Флоке–Блоха на заданном уровне энергии.

В данной статье мы показываем, что аналогичная спектральная кривая определяется для оператора Коши–Римана на эллиптической кривой с выколотыми точками при наложении соответствующих граничных условий.

Теорема 1. Пусть X — эллиптическая кривая, $X = \mathbb{C}/\{\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2\}$, где e_1 и e_2 — порождающие решетки периодов, и пусть $p_1, \dots, p_N$ — попарно различные точки на X . Рассмотрим линейную задачу

$$\bar{\partial}\psi = 0, \quad (1)$$

$$\psi(z + e_j) = e^{2\pi i \langle k, e_j \rangle} \psi(z), \quad j = 1, 2, \quad (2)$$

*Первый автор (К. Б.) был поддержан грантом DFG Sfb/Tr 71 “Geometric Partial Differential Equations”, второй автор (И. А. Т.) — программой Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики в математических и физических науках”, оба автора также были поддержаны Математическим институтом Хаусдорфа в Бонне.